

AZ
ELMÉLETI PHYSIKA
KÉZIKÖNYVE.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MEGBIZÁSÁBÓL

IRTA

D^r FRÖHLICH IZIDOR

A BUDAPESTI KIR. TUDOMÁNY-EGYETEMEN AZ ELMÉLETI PHYSIKA NY. R. TANÁRA.

A M. T. AKADÉMIA R. TAGJA.

ELSŐ KÖTET:

KINEMATIKA.

(A MOZGÁS TANA.)

BUDAPEST.

1892.

FRÖHLICH IZIDOR.

★

K I N E M A T I K A.

(A MOZGÁS TANA.)

KÜLÖNÖS TEKINTETTEL A KEZDŐK IGÉNYEIRE.

A SZÖVEG KÖZÖTTI HÁROMSZÁZÖT ÁBRÁVAL.

BUDAPEST.

KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

1892.

JOHANNES KEPLER

A. M. T. A. K. A. D. É. M. I. A.

LAUREA • KÖNYV • AL

JOHANNES KEPLER • AGRICOLA • AGRICOLA

JOHANNES KEPLER • AGRICOLA • AGRICOLA

A. M. T. A. K. A. D. É. M. I. A.
FÜTTKAI NYVATA



FRANKLIN-TÁRSULAT, NYOMDÁJA.

Mezger Tudományok Akadémia
Könyvtára 792 / 958 sz.

ELŐSZÓ.

A M. T. Akadémia az 1888. év végén e könyv szerzőjét az elméleti physika egy nagyobb szabású kézikönyvének megírásával bízta meg s egyes részeinek folytatólagos kiadását kilátásba helyezte.

Szerző a M. T. Akadémia ezen megbízását nem csak az iránta tanusított bizalom kitüntető jelének tekinti, melyet mint legbecsesebb kincseinek egyikét féltékenyen őriz és csorbítatlan épségben tartani törekszik, hanem még inkább mint a kulturális működés egyik fontos körébe való meghívását. E tevékenység feladata, a hazai tudományos művelődésnek alapot vető kézikönyvek megírásával oly irodalmi segédeszközt teremteni, mely egyrészt az egyes tudomány-ágaknak magyar nyelven való tanulmányozását lehetővé teszi, másrészt pedig arra alkalmas, hogy olvasóját a jelenlegi európai tudományos színvonal magaslatára emelje.

Mind e két czél részben a főiskolai tanítás által is elérhető; de ennek kizárólagos alkalmazásával korántsem oly teljesen és tartósan, mint akkor, ha az ebbeli törekvést, az oktatást alkalmas kézi- vagy segédkönyvek támogatják.

Hogy ez utóbbiakra még a legjobb tanítás mellett is szükség van, azt a tudományokban legelőrehaladottabb nemzetek példája is kétségtelenül bizonyítja. Tudvalevő, hogy a főiskolai oktatásnak saját nemzeti hagyományai alapján való legczélszerűbb berendezése daczára, e nemzetek tudományos irodalma folytonosan; a legkülönbözőbb célú, sokszor kitünően sikerült kézikönyvekkel gazdagodik vagy pedig az ilyen régebbi műveknek a tudomány haladó színvonalának megfelelően és folytonosan javított kiadásai látnak napvilágot. Az e fajta irodalmi termékek ott nemcsak nagy kedveltségnek és elterjedésnek örvendenek s így a tudománynak szélesebb körökben való terjesztését, gyakran még a haladását is lényegesen előmozdították és még jelenleg is előmozdítják, hanem sokszor, különösen Franciaországban, tudományos iskolákat is alapítottak.

I. Ezen tények és tapasztalatok valamint ide vágó hazai viszonyainknak gondos megfontolása vezéreltek a rám bízott munka megírása közben, melynek magvát a budapesti tudomány-egyetemen az elméleti physika minden ágáról tartott sok évi előadásaim képezik. Komolyan számot vetve magammal s ideiglenesen elodázva a tudomány fejlesztésére irányított — fáradtsággaljáró, de egyúttal élvezetet s benső meglelégedést nyújtó — buvárlásaimat, minden

törekvésem oly mű létesítésére irányult, melylyel egyrészt a hazai matematikai-physikai művelődésnek mennél nagyobb mértékben szolgálhassak, de a mely másrészt az európai tudományosság mértékét teljesen megűsse.

Az első czélt csak úgy véltem sikeresen megközelíthetni, ha munkámat a tágasabb értelemben vett matematikai tudományok irodalmának nálunk jelenleg fennálló viszonyaiba bele illesztve, e talajba bele ültetve, mindenek előtt megfeleljek a tudományos művelődés egészséges haladása ama tapasztalatbeli első feltételének, mely annak *folytonosságában* áll. Arra törekedtem, hogy munkám, a hazai tudományos talajban gyökerezve s mintegy belőle kinőve, a benne felőlelt igazságok szakadatlan, hézag nélkül összszefüggő rendszerét adja. Ezen oknál fogva művemet akként rendeztem be, hogy a physikai alapismeretek és a matematikai segédapparatus minimumával (az analysis és az analitikai geometria első elemeivel) rendelkező kezdő is hasznát vehesse, hogy benne e tudományág *alapronalait* is könnyen érthető előadásban találhassa. Tettem ezt azért, mert nem tartom még elérkezettnek azt az időt, melyben magyar tudományos kézikönyvnek kizárólagosan csak teljesen megérett és kiképzett szakférfiak számára való megírása kívánatos volna; az ily munkák gazdagabb tudományos irodalommal dicsekedő nemzeteknél is csak kivételesen jelennek meg.

A második czélunk, az európai tudományos niveaúnak elérésére a nemzetközi tudomány jelenkori vívmányainak lelkiismeretes tekintetbe vételével és felhasználásával törekedtem, a nélkül, hogy a munka érthetőségét bárhol is szem elől tévesztettem volna.

Ily mű mind oktató feladatánál, mind rendszerességénél és színvonalánál fogva nem lehet kis terjedelmű; ilyennek létesítése szerzője munkaerejét sok évre foglalja le s ennek egyszerre megjelenése már terjedelménél fogva sem volna előnyös. Ezért a M. T. Akadémia e mű egyes részeinek kötetenként való kiadását határozta el.

II. Ez alkalommal e munka tulajdonképeni első részének,* az elméleti mechanikának első kötete, a *kinematika* vagy a mozgás tana avagy a mozgás geometriája tétetik közzé; a következő kötet a dinamikát fogja hozni.

Előre bocsátom, hogy a mechanikát, a modern, nézetem szerint helyes felfogásnak megfelelőleg, *kinematikára* és *dinamikára* osztot-

* E mű bevezető, de függetlenül is használható része *„Mathematikai repertórium physikusok számára”* címmel a M. T. Akadémia kiadásában 1890-ben jelent meg s főleg a physika elméleti tárgyalásánál gyakrabban felmerülő matematikai segédeszközöket foglalja magában.

tam. AMPÈRE volt az első, ki «Essai sur la Philosophie des Sciences» című munkájában (1834) a mozgás tanának az erők tanától s egyzersmind a tömeg tanától való különválasztását és a (nem egészen helyesen készült) «kinematika» névvel való elnevezését javasolta; ő e tant már 1835 óta e czímen a párisi École Polytechnique-en elő is adta. Az általa kezdeményezett eljárás kézikönyvekben és előadásokban nagyjában véve évről évre nagyobb mértékben talál ugyan alkalmazást, de azért a kinematika tanítói s a kinematikai művek szerzői a felölelt anyag tartalma és terjedelme, ennek csoportosítása és kezelése körül egymástól igen lényegesen eltérnek.

Vannak, kik a kinematikát egyenesen a geometriához tartozónak tekintik; de ez ellen az a körülmény szól, hogy míg a geometria tárgyát a térbeli vonatkozások képezik, melyek mindenkor függetlenek attól, vajjon a geometriai alakzatokat mozgás vagy pedig pontok tet-szőleges aggregálása által keletkezetteknek tekintjük, addig minden kinematikai vonatkozás és fogalom a mozgással, a helyzetváltozás *folytonos* folyamatával¹ elválaszthatatlanul van egybekapcsolva. Hiszen a mechanikának és a physikának «*idő*»-nek nevezett sajátzerű független változóját szintén csak mozgás, és pedig rendesen földünk tengelye körüli forgása határozza meg! Geometria kinematika nélkül létezhetik, de kinematika geometria nélkül nem.

Másrészt a nevezett két disciplina érintkezései oly számosak és oly bensők, hogy jelentékeny számú geometriai vonatkozásokat, különösen a görbe vonalak- és felületekét igen előnyösen tárgyalhatni kinematikai alapon, mert ez által e vonatkozások gyakran új világításban tűnnek elő.²

Másoknál a kinematika csak a merev (esetleg még a rugalmas) rendszerek avagy testek mozgástana; gyakran inkább csak ezek mozgásának a géptanra alkalmazott tana,³ sőt egyes szerzőknél a legegyszerűbb kinematikai fogalom, a sebesség csak elvétve fordul elő, míg a gyorsulásnak már nyoma sincs.⁴

Ismét mások⁵ a geometriai szempont és eljárás dominálásával s a gyakorlati alkalmazás majdnem teljes kizárásával a kinematikát felette elvontan tárgyalják. Így W. SCHELL a tömegtől, illetve a tömeg- és az erő fogalmától el nem választható tömeg-középpont, tehetetlen-

¹ V. ö. e mű 5. §-át.

² L. G. DARBOUX: Leçons sur la Théorie générale des Surfaces, Paris, 1887, 1889.

³ V. ö. e mű 13. §-ában BURMESTER művét.

⁴ U. o. F. REULEAUX.

⁵ U. o. H. RÉNAL és W. SCHELL.

ségi (általánosságban a négyzetes) nyomaték és a munka fogalmát tisztán geometriai értelmezéssel, mint térfogatok, felületek görbék geometriai középpontját, négyzetes nyomatékait,¹ illetve mint gyorsulási munkát tünteti elő. Az ily kinematika inkább sajátzerű mechanikai abstractionnak, mely első tanulmányozásra alig alkalmas, mintsem mozgástannak látszik.

Végre vannak még szerzők,² kik megkísérlették az elméletet a géptanra való gyakorlati alkalmazásával egyesíteni; de a kísérlet az elméletre nézve anynyiban nem mondható sikerültnek, a menynyiben benne az elméleti tételeknek inkább csak idézését, mint szabatos bizonyítását látjuk.

III. Jelen kinematikám megírásánál eleinte első sorban a mozgás tanának azon tartományait tartottam szem előtt, melyek az elméleti physikai tanulmányok keretébe tartoznak; de a munka haladásával és különösen tekintettel arra, hogy magyar nyelven teljes kinematika még nem jelent meg,³ e kötetet teljes, rendszeres kinematikává bővítettem ki.

Terjedelme ezen oknál és hazai mathematikai irodalmunk hézagoss voltánál fogva (mi által több rendbeli geometriai és analytikai tételnek a szövegben való bebizonyítása vált szükségessé), végre a nagyszámú példák és feladatok miatt nagyobb lett, mint kívántam; de ez a körülmény e könyvnek alább említendő berendezése következtében e műnek hátrányára nem szolgál s használhatóságát a kezdőre nézve semmikép sem nehezíti meg.

E kötet önmagában befejezett s a mű megjelenendő többi részeitől teljesen független egésznek képez,⁴ mely a pontnak és a merev pontrendszereknek (a szilárd testeknek) rendszeres és teljes, a geometriai és analytikai módszereknek egyenlő alkalmazásával feldolgozott mozgástannát öleli fel. A benne felkarolt anyagot, annak felosztását és elrendezését a XI—XXXI. lapokon lévő tartalomjegyzék részletesen tünteti elő.

Általános irányánál fogva e könyv sem bizonyos tanterv, sem vizsgálati szabályzat szerint nem készült; de a mozgás tanából ezek követelményeinél jóval többet ölel fel. Terjedelme daczára azon-

¹ E fogalmak csak *egyenletes* sűrűségű testek megfelelő fogalmaiból vonhatók le.

² V. ö. e mű 13. §-ában E. Bour művét.

³ V. ö. e mű 13. §-ában felsorolt Horváth Ignác-téle kinematikát.

⁴ Legyen szabad itt megjegyeznem, hogy a Math. repertóriumot (zárójelek között) csak a szükséges mathematikai kifejtésekre való utalás czéljából idéztem oly sok helyen; az az olvasó, ki az idézett, a szövegben alkalmazott tételeket ismeri, az idézeteket mellőzheti.

ban tartalmát úgy választottam és berendezését úgy intéztem, hogy benne a mechanikai ismereteket követelő bármely pályára készülő ifjú minden esetre megtalálhassa azt a kinematikai alapot, mely őt a dynamikának és a géptanra alkalmazott mozgástannak sikeres tanulmányozására képesíti.

Különös gondot fordítottam ugyanis az elemi részek szabatos, részletes és mindenek előtt könnyen érthető kidolgozására, melyekkel azokat, kik előtt a kinematika új tárgy, e tanba egyszerű módon kívánom bevezetni. Erre nézve a tartalomjegyzéket követő XXXII. lapon *azon fejezetek és paragraphusok vannak részletesen felsorolva, melyek a könyv terjedelmének még harmadrészét sem téve ki, magukban véve összefüggő kis kinematikai vezérfonalat képeznek s e tudományág első tanulmányozására ajánlhatók*, míg a többi első olvasásnál mellőzhető.

A könyv többi részei az előbbieken alapúlva, ezek folytatását képezik és a haladottabb kezdőnek vannak szánva, ki bennük a tudomány modern vívmányait, több helyen új, de mindenütt következetes és érthető tárgyalásban fogja találni és ki e műből a kinematika jelen állásáról átnézetes képet, e tan önálló tovább művelésére pedig kellő alapot nyerhet.

Gondosan kiválasztott, a kellő helyeken felvett, jelentékeny számban a géptanra alkalmazott kinematikából is merített, összesen száznál több mozgásbeli példa, könnyen követhető kidolgozásban a kifejtett elméleti tételeknek gyakorlati mozgás-problémákra való alkalmazását tünteti elő. Másrészt az egyes főfejezetekhez csatolt, egészben véve háromszázötven, nagyrészt megoldásuk eredményével kísért feladat az olvasó saját erejének gyakorlására nyújt sokoldalú alkalmat.

IV. Végre kedves kötelességet teljesítek, midőn hálámnak és köszönetemnek adok kifejezést.

Mindenek előtt a mélyen tisztelt M. T. Akadémiához fordulok, melynek megtisztelő bizalma s így erkölcsi támogatása valamint adozatkészsége nélkül e mű nem láthatott volna napvilágot, vagy legalább csak sokkal szerényebb terjedelemben és alacsonyabbra tűzött czéllal. Első tudományos testületünk eme buzdításával és támogatásával új bizonyítékát adta annak, hogy követni és folytatni akarja ez alkalommal is a tágasabb értelemben vett matematikai tudományok hazai könyv-irodalmának fejlesztése körül fennállása óta kifejtett működése tradícióját, mely az Akadémia által 1834-ben kiadott *«Mathematikai Műszótár»*-tól kezdve, irodalmunk ezen ágának legfontosabb jelenségeihez, mint TAUBNER KÁROLY¹ és VÁLLAS ANTAL² matematikai,

¹ Első és másodrendű görbék összrendesekre stb. 1844.

² Felsőbb egyenletek. 1842—48.

GYÖRÝ SÁNDOR¹ matematikai és physikai, VÉSZ JÁNOS ÁRMIN² matematikai és geometriai, PETZVAL OTTÓ³ matematikai, mechanikai és géptani műveihez fűződik és mely napjainkban KÖNIG GYULA⁴ nagy «Analízis»-ének megírására és támogatására és BOLYAI FARKAS «Tentamen»-jének sajtó alatt lévő új kiadására vezetett.

A M. T. Akadémia hozzájárulásával kiadott e művek, mindegyik saját céljához képest és színvonalának megfelelően, megtették, illetve még megteszik a maguk szolgálatát és hatását tudományos culturánk oly nehezen felvirágozó matematikai részében, mely e közreműködésnek köszönheti vívmányai legnagyobb és leglényegesebb részét. E művek el nem némuló és el nem némítható tanúi a M. T. Akadémia azon tevékenységének, melylyel fontos feladatát az irodalom ezen terén is nem csak felismerte, hanem teljesítette és folytonosan teljesíti.

Engedje meg ennek kapcsán a mélyen tisztelt Akadémia, hogy e helyen is legmélyebb köszönetemnek és hálámnak adjak kifejezést azon kitüntető bizalomért, melylyel egy «elméleti physika» megírásával megbízni kegyeskedett s melylyel alkalmat nyújtott, hogy saját erőmhöz képest, de fennálló tudományos viszonyaink és a mű megérthetőségének gondos tekintetbe vételével hozzájárulhassak e tudományágnak a hazai irodalomban való meghonosításához.

Jól tudom, hogy ez nagy feladat; nem zárkozom el munkámnak tőlem talán legjobban felismert tökéletlenségei elől; de ha e czélt jelen munkámmal bármily csekély mértékben is sikerülne elérnem, sőt, ha vele még csak a tudományos talaj előkészítését is előmozdíthatnám, ebben fáradozásaim legszebb jutalmát leném!

Köszönetet mondok még két budapesti főiskolai tanárnak, kiket saját kívánságukhoz képest nem nevezek meg s kik e könyv egyes, saját speciális szakjaikba vágó fejezeteit revideálni szívesek voltak; továbbá BARTONIEK GÉZA és GRUBER NÁNDOR budapesti tanároknak, kik e könyv első tizenhat ivének javításában segédkeztek s végre CSILLAG VILMOS tanárjelöltnek, ki rajzaim és utasításaim alapján a 88—274. sz. ábrákat a perspectiva szabályai szerint készítette el.

Elismerést érdemel végre a Franklin-Társulat nyomdája is, mely a munka szabatos szedése és csinos kiállítása érdekében mindent elkövetett.

Budapest, 1892 január 1.

A szerző.

¹ A felsőbb analysis elemei 1836—40. Hangrendszer kiszámítása. 1858.

² Felsőbb mennyiségtan. 1861—62. Leirati mértan. 1865.

³ Erő- és géptan. 1861. Felsőbb mennyiségtan. 1867—68.

⁴ Analízis. I. 1887.

TARTALOM.

	Lap
Előszó	v
Tartalom	xi
<i>Figyelmeztetés</i>	xxxii
A «Kinematika» sajtóhibái s reá vonatkozó néhány megjegyzés	xxxiii
A «Math. repertórium» sajtóhibái s reá vonatkozó néhány megjegyzés	xxxv

BEVEZETÉS.

Az anyagi rendszerekről, a mozgásról és az erőkről.

Az elméleti mechanika tárgya és felosztása.

1. §. Anyagi rendszer, anyagi pont	3
2. §. Belső és külső vonatkozások és hatások	3
3. §. Alakzat (Configuráció)	4
4. §. A helyzet megállapítása. Diagramm	4
5. §. Mozgás. Tér. Idő. Pálya	4
6. §. Erő és anyag. Fellépésük elválaszthatatlan	5
7. §. Tömeg. Az anyag megmaradása	6
8. §. Mérés. Mértékegység. A hosszúság, felület és térfogat egységei	6
9. §. A mekkoraságok (menynyiségek) jellege (mérete, dimenziója). Hosszúság, tömeg, idő jellege	7
10. §. Alapegységek, lezármaztatott egységek. Mértékrendszerek. Abszolút rendszer. Mechanikai rendszer. C. G. S. rendszer	8
11. §. Az elméleti mechanika tárgya ; felosztása. Kinematika, dinamika. Kinetika, statika	9
12. §. Az elméleti mechanika rendszere	10
13. §. Az elméleti mechanika könyv- és értekezés-irodalmának néhány elterjedtebb jelensége	11

KINEMATIKA.

I. A pont kinematikája.

A. ÁLTALÁNOS RÉSZ.

1. Elmozdulás (*dislocatio*).

14. §. Mozgás, helyváltozás. A pont mozgása ; a pálya ; egyenesvonalú és görbevonalú mozgás ; a mozgás iránya	15
15. §. Elmozdulás. Vector (íránymenynyiség). Scálar (léptékes menynyiség). A vector három meghatározó része	15

	Lap
16. §. Különbség az elmozdulás és a befutott pályáiv között. Egyenlő (egyenértékű) elmozdulások	16
17. §. Elmozdulások (vectorok) összetevése és szétbontása (helyettesítése, egyenértékűsége). Összetevő (componens). Eredő (resultans). Az eredő az összeteteendők sorrendjétől független. Geometria eljárási	16
18. §. Általánosítás. Tetszőleges elmozdulások (vectorok) összetevése és szétbontása. Az elmozdulások sokszöge (a vectorok polygonja)	18
19. §. Elmozdulások (vectorok) összetevése és szétbontása derékszögű összetevőkre. Componens tetszőleges irány szerint	19
20. §. Általánosítás. Tetszőleges elmozdulások (vectorok) összetevése derékszögű componenscikké. A helyettesítés jelentése	20
21. §. Három ferdeszögű elmozdulás (vector) analytikai összetevése. A parallelogramm (egyenközény) esete	21
22. §. Az elmozdulás (vector) szétbontása sík polárkoordináták szerint. Vezérsugári (radiális) és forgató (rotatórius) összetevő	22
23. §. Az elmozdulás (vector) szétbontása térbeli polárkoordináták (gömb-összrendezők) szerint	23
24. §. Az elmozdulás nyomatéka (a vector momentuma); jellege, előjele és tengelye. A nyomaték vector. Tengelynyomaték	24
25. §. Vectorpárok; nyomatékuk, tengelyök	25

2. Sebesség (gyorsaság, celeritas, velocitas).

26. §. A sebesség definitiója: az elmozdulás változásának mérve	27
27. §. Egyenesvonalú, egyenletes mozgás. Sebességének kifejezése és jellege	27
28. §. Középssebesség a nem egyenletes mozgásnál	28
29. §. Az elmozdulás változása a görbevonalú mozgásnál. A sebesség általános kifejezése	29
30. §. A sebesség vector; nagysága és iránya; képviseltetése, mértéke	29
31. §. A görbevonalú mozgás sebességének származtatása az egyenesvonalú egyenletes mozgás sebességéből	30
32. §. A sebesség szétbontása egymásra merőleges három összetevőre. A componensek kifejezése coordináták segítségével	31
33. §. A pont vetületének mozgása egyenlő a sebesség vetületével. A sebesség összetevője tetszőleges irány szerint	32
34. §. A sebesség szétbontása sík polárkoordináták szerint. Vezérsugári (radiális) és forgató (rotatórius) összetevő	32
35. §. A sebesség szétbontása térbeli polárkoordináták (gömb-összrendezők) szerint	34
36. §. A sebesség nyomatéka. A nyomaték jellege. A nyomaték kifejezése sík mozgásnál derékszögű és polárkoordinátákban	35
37. §. Az elemi sector területe polár- és derékszögű coordinátákban.	

	A vezérsugár forgása. A sebesség nyomatéka a felületi sebesség kétszeresével egyenlő	37
38. §.	Sebességek összetevésének kinematikai jelentése. Elemi elmozdulások összetevése. Elemi elmozdulások együttlétezése (coëxistentiája)	38
39. §.	Sebességek összetevésének visszavezetése elemi elmozdulások (vectorok) összetevésére	39

3. Gyorsulás (sebesedés, acceleráció).

40. §.	A gyorsulás definitiója mint a sebesség változásának mérve. Gyorsulás és lassulás	40
41. §.	A gyorsulás tetszőleges görbevonalú mozgásnál. A gyorsulás vector. Egysége. Jellege. Mértéke	40
42. §.	A gyorsulás szétbontása egymásra merőleges három összetevőre	42
43. §.	A gyorsulás derékszögű összetevői, kifejezve az összszerendezőkkel. A vetület gyorsulása egyenlő a gyorsulás vetületével. Tetszőleges componens	43
44. §.	A gyorsulás szétbontása sík polárkoordináták szerint. Vezérsugári és forgató (radiális és rotatórius) gyorsulás. Szöggyorsulás	44
45. §.	A gyorsulás szétbontása térbeli polárkoordináták (gömb-összrendezők) szerint	46
46. §.	A gyorsulás szétbontása érintő és deréklő (tangentiális és normális) összetevőkre	47
47. §.	A deviáció (eltérés) fogalma. Értékének megállapítása	49
48. §.	A gyorsulás nyomatéka. A nyomadék kifejezése sík mozgásnál. Felületi gyorsulás	50
49. §.	Különböző gyorsulások összetevésének kinematikai jelentése. Az összetevés a vectorok szabályai szerint történik	52

4. A térbeli mozgás sebességének és gyorsulásának néhány általános tulajdonsága.

50. §.	HAMILTON hodographja (sebességi görbéje)	53
51. §.	Térbeli görbevonalú pontmozgásnál a gyorsulás mindig a pályára oszuláló (símuló vagy görbületi) síkjában fekszik. Általános bizonyítás	55
52. §.	Ugyanezen tételnek egyszerűbb bizonyítása	56
53. §.	A sebesség nyomatéka térbeli mozgásoknál. A síkra vetített mozgások sebességi nyomatéka	58
54. §.	VARIGNON tétele. Térbeli mozgás sebességi nyomatéka vector. Iránya (tengelye) a leírt felületi elem pozitív normálisa. Kétféle bizonyítás	59

	Lap
55. §. A gyorsulás nyomatóka térbeli mozgásoknál. E nyomatóka vector	60
56. §. A vezérsugár forgása a kezdőpont és az összszerendezői tengelyek körül. A sectorsík forgása a vezérsugár körül térbeli mozgásoknál	62
57. §. Fontos jegyzet a merev rendszernek pont körüli mozgására nézve	65
58. §. A pálya geometriai tulajdonságai, kifejezve a mozgás jellemzői segítségével	65

5. Magasabb rendű gyorsulások.

59. §. A magasabb rendű gyorsulásokról általánosságban. Magasabb rendű hodographok	66
60. §. Véges elmozdulás, mint végtelen sok magasabb rendű elmozdulás (magasabb rendű deviáció) összege. Pályák magasabb rendű érintkezése	68
61. §. A magasabb rendű gyorsulások tangenciális és normális összetevői sík mozgásoknál	69
62. §. Összefüggés síkbeli pályák másodrendű gyorsulásának normális componense és a símuló parabola között	71
63. §. A magasabb rendű gyorsulások tangenciális, normális és binormális összetevőinek kifejezése az alsóbb rendű ily összetevők segítségével	76

6. A térbeli pontmozgás, vonatkoztatva azt a rádiusvector és a sebesség által meghatározott — és az ehhez hodographi viszonyban lévő derékszögű koordináta-rendszerre (SZILY tárgyalási módja).

64. §. A görbe vonalak geometriai sajátosságainak összefüggése a pályák kinematikai tulajdonságaival. SZILY eljárása	78
65. §. A rádiusvector és a sebesség-, a tangens és a (fő-)normális által meghatározott $R_1R_2R_3$ és TNB két koordináta-rendszer egymáshoz hodographi viszonyban van	79
66. §. A sebesség egyenletei az $R_1R_2R_3$ rendszerre vonatkoztatva. A vezérsugár forgása az R_3 körül	81
67. §. A gyorsulás egyenletei a TNB rendszerre vonatkoztatva. A sebesség forgása a B körül	82
68. §. A rádiusvector és az érintő körüli forgások szögsebességei	83
69. §. Az iránycosinusok sebességeinek számítása	84
70. §. Az elsőrendű gyorsulás componensei az $R_1R_2R_3$ -, a másodrendűei a TNB rendszerben	85

71. §. Alkalmazás a pálya görbületi és csavarodási viszonyaira. Símuló (momentán) csavar, momentán centrum	86
--	----

7. Centrális (középponti) mozgás.

72. §. A centrális (középponti) mozgás jellemzője: a gyorsulás szilárd pont (a centrum) felé tart vagy ettől el van fordítva	88
73. §. A centrális mozgás mindig síkbeli mozgás. A felületek elve	89
74. §. A centrális mozgás polárkoordinátákra vonatkoztatva. A pálya differentiálegyenlete. Apsis-vonalak	91
75. §. Oly centrális mozgásnál, hol a gyorsulás csak a távolság függvénye, a sebesség négyzetének változása csak a helyzetkülönbségtől függ, de független a helyzetváltozás utjától	92
76. §. A centrális mozgás néhány jellemző egyenlete, ha a gyorsulás csak a távolság függvénye	93
77. §. A mozgás differentiálegyenletei polárkoordinátákban, ha mind a radiális, mind a rotatórius gyorsulás a zérustól különböző	96
78. §. A centrális pályák hodographjainak néhány általános tulajdonsága	98

8. A pont relativ mozgása.

79. §. A pont absolut és relativ mozgásáról általánosságban	100
80. §. Pont mozgása egy másik ponthoz képest. Párhuzamos koordináta-rendszerek	100
81. §. A relativ mozgás nem változik, ha a két ponthoz egyenértékű sebességeket adunk	101
82. §. Két pontnak egymáshoz viszonyított relativ pályája egymással egyenlő, de ellentett fekvésű	102
83. §. A relativ összrendezők, sebességek és gyorsulások általános kifejezései tetszőlegesen mozgó koordináta-rendszerben	104
84. §. Állandó helyzetű két tengelyrendszerre vonatkozólag a sebességek és bármily rendű gyorsulások ugyanazok	105
85. §. Sík mozgás vonatkoztatása a síkban forgó derékszögű összrendezői tengelyrendszerre. Állandó szögsebesség	106

9. A pont mozgásának leírása.

86. §. A mozgás teljes ismeretéhez szükséges adatok. A mozgás leírása. Három független meghatározó rész	109
87. §. Az összrendezők, vagy a sebességek vagy a gyorsulások az ismert adatok	109
88. §. Általánosítás. A pont kinematikájának általános problémája, viszszevezetve matematikai problémára	111

10. A pont kényszermozgása.

	Lap
89. §. Szabad mozgás. Kényszer és akadály. Kényszermozgás. A pontmozgás szabadságának különböző fokai	113
89a. §. A feltételi gyorsulás mindig merőleges a pályára	114

B. RÉSZLETES RÉSZ.

1. Példák és eljárások a pont egyenesvonalú mozgására.

90. §. A leírt út mint az időnek explicit, egész, racionális függvénye van adva. Egyenletes mozgás; egyenletesen és nem egyenletesen gyorsuló mozgás	116
91. §. Periodikus (szakaszos) mozgás. Egyszerű harmonikus mozgás. Periodus, amplitúdó. Elongáció, pházis	120
92. §. Az egyszerű harmonikus mozgás, tekintve ezt mint az $s'' + \omega^2 s = 0$ egyenlet teljes integrálját. A megfejtés kétféle eljárása	123
93. §. Egyenlő periodusú két egyszerű harmonikus mozgás összevetése egyszerű harmonikus mozgássá. Analitikai és graphikai eljárás	127
94. §. Általánosítás. Tetszőleges számú egyenlő periodusú egy egyenesben végbemenő egyszerű harmonikus mozgás összetevése (helyettesítése)	129
95. §. Az $s'' - \omega^2 s = 0$ egyenlet által meghatározott mozgás. A megfejtés kétféle eljárása	130
96. §. Az $s'' + 2\kappa s' \pm \omega^2 s = 0$ egyenlet megfejtése. Három eset: Csillapított egyszerű harmonikus mozgás. Aperiodikusan csillapított mozgás. Kivételes eset	133
97. §. A csillapított egyszerű harmonikus mozgás jellemző sajátosságainak megvizsgálása	137
98. §. A pont egyenesben mozog, gyorsulása az egyenes egy szilárd pontja (a centrum) felé van fordítva és e ponttól való távolság négyzetével fordítva arányos. (Esés nagy magasságból.)	142
99. §. Valamely pont oly gyorsulás alatt kénytelen egyenesben mozogni, mely gyorsulás iránya a vonalon kívül fekvő szilárd ponton (centrumon) megyen át és a távolság valamely hatványával arányos	145
100. §. Valamely pont egyenesvonalú mozgást végez oly gyorsulás alatt, melynek iránya mindig a pályán kívül fekvő szilárd ponton megyen át és a távolság tetszőleges függvénye	150
101. §. Ötven feladat a pont egyenesvonalú mozgására	153

2. Példák és eljárások a pont görbevonali mozgására.

	Lap
102. §. Általános megjegyzések. Egyenesvonalú, parabolás-, sinusis-, láncvonal-, hyperbolás mozgás	158
103. §. Ellipsises mozgás. A pálya középpontja a mozgás centruma. Derékszögű és polárcoordináták	163
104. §. Üldöző és futó görbe. Mozcás ezen görbéken. Három eset megkülönböztetése	165
105. §. Átkelő görbe. Hajó átkelése egyenletes sebességű folyó egyik partjáról a másikra	170
106. §. Egymásra merőleges, egyenlő vagy különböző periodusú két egyszerű harmonikus mozgás összetevése. LISSAJOUS görbéi	175
107. §. ROBERVAL módszere a görbék érintőinek a sebesség komponenseiből való szerkesztésére. Példák (ellipsis, parabola, hyperbola, spirálisok, conchois)	179
108. §. A ballistikus probléma légüres térben	183
109. §. Példák a pont relativ mozgására	188
110. §. Példa a pont térbeli (általánosabb és egyszerű csavargörbén való) mozgására	191
111. §. Ötvenöt feladat a pont görbevonali mozgására	193

3. Példák és eljárások a centrális mozgásra.

112. §. A gyorsulás a távolsággal egyenesen arányos. A pálya alakja vonzó és taszító gyorsulás esetében	199
113. §. Folytatás. A coordináták és az idő között fennálló összefüggés. Keringési idő	204
114. §. Ugyanezen feladat: Tárgyalás derékszögű coordinátákban	206
115. §. Ugyanezen feladat. A pályák hodographjai	209
116. §. Az egyedüli centrális pályák, melyek hodographjai szintén centrális görbék, azok a pályák, melyeknél a gyorsulás a távolsággal egyenesen arányos	212
117. §. COTES spirálisai. A gyorsulás a távolság harmadik hatványával fordítva arányos	213
118. §. COTES spirálisai. Folytatás. A pálya differentialegyenletének integrációja és az eredmény értelmezése	215
119. §. COTES spirálisai. A pályák egyenleteinek egyenes levezetése	220
120. §. A gyorsulás a távolság első hatványával fordítva arányos. A mozgás leírása	221
121. §. A centrális mozgás egyenlete, ha a pálya a körtől csak kevésbé különbözik	223
122. §. A gyorsulás egyik része a távolság négyzetével, másik része köbével fordítva arányos	225
123. §. A centrális gyorsulás törvénye, ha a mozgás KEPLER törvényei szerint történik	227

	Lap
124. §. A pálya alakja adva van, keressék a centrális gyorsulás törvénye. Példák	229
125. §. A centrális gyorsulás a távolságnak és az iránynak a függvénye. Első példa. Kétféle eljárás	232
126. §. A centrális gyorsulás a távolságnak és az iránynak a függvénye. Második példa	236
127. §. Általános eset, melyben a centrális mozgás pályájának egyenlete egyszerű quadraturákra vezethető vissza. Kétféle eljárás	239
128. §. Példák két centrumból eredő gyorsulásokra, ha az egyes gyorsulások csak a távolság függvényei. Kivételes eset	240
129. §. Ötvenöt feladat a centrális mozgásra	242

4. Eljárások és feladatok kenyszermozgásokra.

130. §. A feltéti gyorsulás. Öt feladat	252
---	-----

II. Merev rendszerek (szilárd testek) kinematikája.

Általános észrevétel a merev pontrendszerek mozgására nézve.

131. §. A merev rendszer elmozdulása és mozgása, visszavezetve három pont elmozdulására és mozgására	254
132. §. A merev rendszer mozgásának főesetei. Sík-, gömbi-, általános mozgás	254
133. §. Merev rendszerek translációja (haladó vagy önmagukhoz párhuzamos elmozdulása) és egyszerű (tengely körüli) rotációja (forgása)	255

A. MEREV RENDSZEREK SÍK MOZGÁSA.

A sík mozgásról általánosságban.

134. §. Sík mozgás jellemző feltétele. A mozgás visszavezetése két pont mozgására	256
---	-----

1. Véges és elemi elmozdulások helyettesítése forgások által. Momentán (instantán) centrum.

135. §. A sík elmozdulás mindig helyettesíthető e síkban végbemenő forgás által. E forgás jellemzőinek meghatározása	256
136. §. Kivételes esetek. Transzláció, haladó elmozdulás (a rendszer önmagához párhuzamos elmozdulása)	258
137. §. Véges forgás. Végtelen kicsiny (elemi, momentán, instantán) forgás. A momentán (instantán) centrum	259
138. §. A sík mozgás mint a pillanati forgások egymásutánja, A momentán (instantán) centrumok vagy pólusok görbéje vagy a pólus pályája	261

2. *Sík görbék (póluspályák) egymáson való gördülése. Ruletták. Kinematikai lánczok. Mechanismusok.*

	Lap
139. §. Minden sík mozgás párhuzamos hengerek, vagy a pólusgörbék egymáson való gördülése által helyettesíthető	261
140. §. A bázis (alap-) görbe és a gördülő görbe (roulante) egyenlete, ha a rendszer mozgása ismeretes. A gördülés analitikai előtűntetése	262
141. §. Ruletták, mint a rendszer pontjainak pályái. Parametereik. Egyenletük	265
142. §. A sík gördülő mozgás problémájának különböző fogalmazása	266
143. §. A gördülő görbe meghatározása egy rulettából és az alapgörbéből	266
144. §. A ruletta differentialegyenlete, ha az alapgörbe egyenes	267
145. §. Kinematikai lánczok (tagozatok) és mechanismusok. Négytagú lánczok mozgása	268
146. §. Többtagú kinematikai lánczok. Egyenes vezetés. Egyenesben vezetők	269

3. *Példák és eljárások a momentán centrumra, a sík gördülésre, a kinematikai lánczokra és mechanismusokra.*

147. §. Példák a momentán centrumok és ezek görbéinek felkeresésére (változatlan hosszúságú vonal siklása; a hajtórúd mozgása)	270
148. §. Kör gördülése kétszer nagyobb sugarú kör belső kerületén. Az egyenes vezetés egyszerű esete	273
149. §. Cycloisok és trochoisok. Alakjuk. Egyenleteik	274
150. §. A közönséges cyclois néhány tulajdonsága	275
151. §. Epitrochoisok, hypotrochoisok, peritrochoisok. Egyenleteik	277
152. §. Epicycloisok, hypocycloisok, pericycloisok; összefüggésük. Példák	280
153. §. Példák a gördülő görbe felkeresésére, ha az alapgörbe és egy ruletta ismeretes	284
154. §. WATT egyenesben vezetőjének elmélete, mint a kinematikai lánczok és az egyenes vezetés egyszerű esete. WATT parallelogrammja	286
155. §. PEAUCELLIER egyenesben vezetője (inverseurje)	292

4. *Rendszerek sík mozgásainak összetevése és szétbontása.*

I. Geometriai tárgyalás.

156. §. Sík elmozdulások (párhuzamos tengelyű forgások) összetevése és szétbontása	294
--	-----

	Lap
157. §. A rendszer véges elmozdulásainak sorrendje az elmozdulások eredményére nézve lényeges. A sorrend megfordításánál fellépő különbség transláció	295
158. §. Kivételes eset. Egyenlő nagyságú, de ellentett jelű két forgás eredménye transláció	295
159. §. Forgás és transláció összetevése egy párhuzamos tengelyű, egyenlőszögű forgássá	296
160. §. Forgás szétbontása translációra és párhuzamos tengely körüli egyenlőszögű forgásra	297
161. §. Forgás szétbontása forgásra és translációra két közös tengelyű, de ellentett forgás segítségével	297

II. Analitikai tárgyalás.

162. §. Az egy és a két síkbeli véges forgás létesítette elmozdulás analitikai kifejezése	298
163. §. A két forgás sorrendjének megfordításából származó transláció	299
164. §. Kivételes eset. Egyenlő nagyságú, ellentett előjelű két forgásból származó transláció	299
165. §. Az eredő forgás jellemzői, kifejezve az összezteendő két forgás jellemzőiből	301
166. §. Elemi forgások összetevése; az eredmény az elmozdulások sorrendjétől független. Általánosítás	302
167. §. Síkbeli (párhuzamos tengelyek körüli) szögsebességek összevetése. Az eredő szögsebesség jellemzői	303

5. A sík mozgás (első rendű) gyorsulása.

168. §. Síkban mozgó rendszer tetszőleges pontjának gyorsulása, vonatkoztatva a rendszer más pontjára	304
169. §. A sebességek momentán centrumának gyorsulása. A gördülés sebessége. Geometriai eljárás	305
170. §. Tetszőleges pont gyorsulásának egyszerű kifejezése. A gyorsulás momentán centruma. A tangenciális és normális gyorsulások körei. Inflexiók kör	306
171. §. A gyorsulás momentán centruma. Analitikai eljárás. Egyszerűsítés. Geometriai szerkesztés. A gyorsulás vonatkoztatva e centrumra	308
172. §. A gyorsulás centruma állandó forgásnál. A sebesség centrumának gyorsulása	310

*6. Merev rendszer sík mozgásának magasabb
rendű gyorsulásai.*

	Lap
173. §. A másodrendű gyorsulás analitikai előtűntetése. E gyorsulás centruma	311
174. §. A másodrendű gyorsulásnak saját középpontjára vonatkozó centripetális és rotatórius componensei	312
175. §. A másodrendű gyorsulásnak a sebességek középpontjára vonatkoztatott tangentiális és normális öszszetevője	313
176. §. Síkbeli mozgás másodrendű gyorsulásának geometriai előtűntetése	315
177. §. A rendszer tetszőleges rendű gyorsulásai és ezek momentán centrumai	317
178. §. Állandó viszonyt és állandó iránykülönbséget mutató magasabb rendű gyorsulások	318
179. §. A sík mozgás magasabb rendű gyorsulásainak néhány általános sajáttsága	319

*7. A sík mozgás pólusgörbéinek és rulettáinak
görbületi viszonyai.*

180. §. Az alap- és a gördülő görbe görbülete, kifejezve a gördülés jellemzőivel	321
181. §. Az inflexiós kör átmérője, az alap és a gördülő görbe görbülete. Speciális esetek	323
182. §. A ruletta görbületi sugara. A gördülés sugara	324
183. §. Az EULER-SAVARY-féle szerkesztés a ruletták görbületére vonatkozólag	326
184. §. Az EULER-SAVARY-féle szerkesztés módosítása: a sebességek és a gyorsulások momentán centrumának ismerete elegendő	328
185. §. Példák: Az epicyclois és az ellipsis görbületi sugarának megszerkesztése	329
186. §. Tétel a ruletták görbületéről	331
187. §. A sebességi és a gyorsulási középpontok megszerkesztése két ruletta görbületi középpontjaiból	333
188. §. A ruletták forduló pontjai	334

*8. Síkban mozgó görbék beburkolói. Zárt
ruletták területe.*

189. §. A sík mozgásnál származó envelope-ok. Geometriai és analitikai tárgyalás. Példa	336
190. §. Síkban mozgó merev görbe beburkolójának görbületi középpontja. Egyenesek beburkolói. A forduló pontok köre	338
191. §. Az önmagukban zárt ruletták területe	340

*9. Sikló mozgás és relativ mozgás a síkban.
Fogazott kerekek. Példák.*

	Lap
192. §. A sikló mozgás jellemzője. Egyszerű és összetett sikló mozgás	343
193. §. Tetszőleges görbe sikló haladása saját beburkolóján	344
194. §. Relativ mozgás a síkban. Síkok relativ mozgása a síkban. Tétel a rendszerek síkbeli relativ mozgásáról	345
195. §. A fogazott kerékművekről általánosságban. Körtörcék hengeres fogainak általános tulajdonságai	347
196. §. Az epicycloidalis fogazás egyszerű esete. Egyenes oldalú fogak	349
197. §. Epicycloidalis fogazás. Általános eset	350
198. §. A fogak profilje körevelens (körlefejtő)	353

10. Feladatok merev rendszerek síkbeli mozgására.

199. §. Tizenegy feladat a momentán centrumokra és görbékire	354
200. §. Huszonhat feladat a gördülő mozgásra és a ruletták alakjára	356
201. §. Tizenkét feladat kinematikai lánczokra (tagozatokra) és mechanismusokra	362
202. §. Tíz feladat a síkbeli mozgások gyorsulására	368
203. §. Nyolcz feladat az alapgörbe, a gördülő görbe és ruletták görbületi viszonyaira	369
204. §. Tizenhárom feladat mozgó sík görbék envelope-jaira és zárt ruletták területére	371
205. §. Húsz feladat síkbeli relativ mozgásokra, sikló mozgásokra és kerekek fogazására	372

**B. MEREV RENDSZEREK GÖMBI (SPHÄRIKUS, PONT
KÖRÜLI) MOZGÁSA.**

A gömbi mozgásról általánosságban.

206. §. A gömbi mozgás jellemző feltétele. E mozgás visszavezetése két pont mozgására	375
---	-----

1. A gömbi elmozdulás és gömbi mozgás geometriai tárgyalása.

207. §. A gömbi elmozdulás helyettesíthető a szilárd ponton átmenő tengely körüli forgással. A pólus. A forgás jellemzői	375
208. §. Momentán (instantán) forgás. Jellemző elemei. A momentán (instantán) pólus	377
209. §. Gömbi mozgás, mint a momentán forgások egymásutánja. A momentán tengelyek kúpja. Első pólusgörbe. Közös csúcsú két kúp gördülése egymáson. Második pólusgörbe	377

210. §. Gömbi ruletták. Gömbi cycloisok és developpansok. Problémájuk fogalmazása	378
---	-----

2. Gömbi elmozdulások és sebességek analitikai kifejezése forgások által és megfordítva.

211. §. Véges forgás létesítette elmozdulás analitikai kifejezése	379
212. §. Gömbi véges elmozdulás analitikai helyettesítése forgás által	380
213. §. Pont körüli véges forgások kifejezése EULER három független szöge segítségével	381
214. §. Pont körüli véges forgás jellemzőinek (RODRIGUES koordinátáinak) kifejezése a véges elmozdulás jellemzői által és megfordítva	382
215. §. Elemi forgás létesítette elmozdulás analitikai kifejezése. Elemi elmozdulások helyettesítése forgás által	385
216. §. Elemi forgás létesítette elmozdulás és sebesség kifejezése derékszögű összrendezőkben	386
217. §. A pont gömbi elmozdulása és sebessége helyettesíthető a fixponton átmenő számtalan, de egy síkban fekvő tengely körüli forgás és ennek sebességei által	387
218. §. A momentán forgás jellemzőinek meghatározása az elmozdulások (sebességek) derékszögű componenseiből	388

3. Példák a gömbi mozgásra és gömb-(kúp-)mechanismusokra.

219. §. Gúlának és kúpok gördülése congruens gúlának és kúponak, továbbá síkon és legnagyobb körön	389
220. §. Előnyomuló rotációk. A präcessió három esete. Példák	391
221. §. A föld tengelyének präcessiója (a napéjegyenvonal előnyomulása)	394
222. §. CARDANO általános (universalis) csuklója (HOOKE-féle kulcs)	395
223. §. CARDANO csuklójának (HOOKE kulcsának) elmélete	397
224. §. Kúpos fogazott kerekek	400

4. Gömbi mozgások összetevése és szétbontása (forgások és szögsebességek összetevése és szétbontása, ha tengelyeik közös ponttal bírnak).

225. §. Gömbi véges elmozdulások (egymást metsző tengelyek körüli véges forgások) geometriai összetevése egy forgássá	401
226. §. Az összetevés eredménye az elmozdulások egymásutánjától függ; a sorrend megfordítása	402
227. §. Kivételes eset: egyenlő nagyságú, de ellentett előjelű két forgás	403

	Lap
228. §. Véges két gömbi forgás létesítette elmozdulások analitikai kifejezése	404
229. §. Véges két gömbi forgás analitikai összetevése egy forgássá	406
230. §. Pont körüli elemi forgások összetevése egy elemi (eredő) forgássá	407
231. §. Az eredő forgás jellemzőinek meghatározása. Az elemi forgások parallelogrammja	408
232. §. Az elemi forgás vector. Az összetevés vételének általánosítása és megfordítása	409
233. §. Elemi forgások szétbontása és összetevése egymásra merőleges három tengely szerint	410
234. §. Elemi forgás létesítette elmozdulás, kifejezve a forgás derékszögű összetevői által létesített elmozdulások segélyével	411
235. §. A tengely körüli forgásszögnek a tengelyek szerinti derékszögű vetületei nem egyenlők a vezérsugárnak a kezdőpont körüli forgásszöge vetületeivel az összszerendezői síkokra	413
236. §. A felületi (sectoriális) sebesség a pont körüli mozgásnál	414
237. §. Elemi forgások vector jellegének analitikai bebizonyítása	415
238. §. A szögsebesség vector. A szögsebességek parallelogrammja és polygonja	416
239. §. Szögsebességek vonatkoztatása derékszögű coordinátákra. Összetevés. Az elmozdulás és a forgássebesség derékszögű componensei	417
240. §. A szögsebesség derékszögű összetevőinek kifejezése az EULER-féle szögsebességi componensek segélyével és megfordítva	418

5. Gömbi elemi mozgások általános analitikai megvizsgálása.

241. §. Közös kezdetű, álló és forgó (szilárd és elszállító) két derékszögű coordináta-rendszer geometriai vonatkozásai	419
242. §. A momentán forgás jellemzői, kifejezve az álló (szilárd) coordináta-rendszerre vonatkoztatott adatok segélyével	420
243. §. A momentán forgás jellemzői, kifejezve a mozgó (elszállító) coordináta-rendszerre vonatkoztatott adatok segélyével	421
244. §. Az iránycosinusok differentiálquotiensei (cosinussebességek), kifejezve a szögsebességek összetevői által	422
245. §. Az alap- (szilárd) kúp és a gördülő kúp egyenletei	424
246. §. Az alapkúp és a gördülő kúp közös érintő síkkal birnak	426
247. §. A gömbi mozgás analitikai viszszafejtése kúpok gördülésére	427

6. Gömbi mozgás (első rendű) gyorsulása.

248. §. A gyorsulás derékszögű vetületei szilárd tengelyekre	429
249. §. RIVALS tétele. Gömbi mozgás gyorsulásának összetéve szöggyorsulásból és centripetális gyorsulásból	429

	Lap
250. §. A gömbi gyorsulások más kifejezései. A kúpok gördülő sebessége	431
251. §. A gömbi gyorsulások egyszerűsített kifejezései, ha a momentán forgás tengelye a Z -tengely	432
252. §. Általánosságban csak a rendszer szilárd pontjának gyorsulása zérus	432
253. §. A gömbi mozgás normális és tangenciális gyorsulása derékszögű és polárkoordinátákban	433
254. §. Speciális esetek, melyekben a gömbi gyorsulás egyes összetevői zérusok	434
255. §. A gömbi gyorsulás derékszögű összetevői a merev rendszerrel mozgó tengelyek mentén	436
256. §. A gömbi gyorsulás vetületei az elszállító koordináta-tengelyekre	437

7. Gömbi mozgás magasabb rendű gyorsulásai.

257. §. Gömbi mozgás másodrendű gyorsulásának analitikai előtűntetése. E gyorsulás középpontja. Másodrendű szöggyorsulás	438
258. §. Gömbi mozgás másodrendű gyorsulásának geometriai előtűntetése	440
259. §. E gyorsulás derékszögű összetevőinek egyszerűsített kifejezései az analitikai és geometriai eredmények alapján	444
260. §. Gömbi mozgás tetszőleges rendű gyorsulásai és ezeknek néhány általános tulajdonsága	446

8. A momentán pólusok görbéinek és a gömbi rulettáknak görbületi viszonyai.

261. §. Összefüggés a szögsebesség, a gördülés sebessége és a pólusgörbék geodásiai görbülete között. Geometriai és analitikai eljárás	448
262. §. A gömbi ruletták geodásiai görbületének középpontja	451
263. §. Az EULER-SAVARY-féle szerkesztés alkalmazása a gömbi ruletták geodásiai görbülete középpontjainak meghatározására	453
264. §. Gömbön mozgó merev gömbi görbék beburkolóinak geodásiai görbülete	454
265. §. A gömbi ruletta osculáló síkjának fekvése	456
266. §. A gömbi ruletta görbülete egyenlő osculáló síkja és a gömb metszéséből származó gömbi kör görbületével	457
267. §. A pályák osculáló síkjainak speciális helyzetei	458

9. Feladatok a rendszerek gömbi (pont körüli) mozgására.

	Lap
268. §. Tizenhat feladat a momentán centrumokra és görbéire, a kúpok gördülésére, a gömbi ruletták alakjára és gömbi (kúpos) kinematikai lánczokra	459
269. §. Tizenöt feladat a gömbi mozgás gyorsulására és a gömbi ruletták görbületi viszonyaira	463

C. MEREV RENDSZEREK ÁLTALÁNOS MOZGÁSA.

1. Az általános elmozdulás és mozgás geometriai tárgyalása és visszavezetése csavarmozgásra vagy gördülő és sikló mozgásra.

270. §. Merev rendszer általános elmozdulásának szétbontása (helyettesítése) translációra és forgásra	467
271. §. Az általános elmozdulás rotatórius componense minden pontra nézve ugyanaz	468
272. §. Az általános elmozdulás visszavezetése csavarmozgásra	469
273. §. Merev rendszer általános mozgása mint elemi csavarmozgások egymásutánja. A momentán csavarmozgás meghatározó adatai	470
274. §. A csavarmozgás sebességi diagrammja a momentán tengelyre merőleges sík. Következtetések	471
275. §. A csavarmozgás visszavezetése gördülő és sikló mozgásra. Tengelyfelületek, axoidok	472
276. §. A momentán csavarmozgás elemi elmozdulási és sebességi összetevői. A símuló csavargörbe	473
277. §. CHASLES tétele. Merev vonal általános elmozdulásának visszavezetése tengely körüli forgásra	475

2. Általános elmozdulások és mozgások összevetése és szétbontása.

278. §. Két általános véges elmozdulás (csavarmozgás) összetevése, visszavezetve egymást nem metsző tengelyek körüli forgások összetevésére	476
279. §. Egymást nem metsző két tengely körüli véges forgások összevetése egy translációvá és egy forgássá. Geometriai tárgyalás. Végeredmény	476
280. §. Általános véges elmozdulások (csavarmozgások) helyettesítése (összetevése) sík és gömbi mozgások segítségével	477
281. §. Merev rendszer elemi forgásának (szögsebességének) analitikai szétbontása párhuzamos tengelyű egyenlő forgásra s a forgás síkjában fekvő translációra és viszont	477

	Lap
282. §. Általánosítás. Tetszőleges irányú és helyzetű tengelyek körüli elemi forgások összehelyezése forgássá és translációvá	479
283. §. A csavarmozgás jellemzőinek meghatározása a rendszer valamely pontjának translációjából és e ponton átmenő tengely körüli elemi forgásból	481
284. §. Merev rendszer általános elemi mozgásának (a csavarmozgásnak) viszszafejtése (helyettesítése) conjugált két egyenes körüli forgásra	483

3. Példák a merev rendszerek, kinematikai lánczok és mechanizmusok általános mozgására.

285. §. Példa általánosabb gördülő mozgásra	486
286. §. Tetszőleges hengerkerekek mozgásának átvitele csigák és vég nélküli szíjak (kötelek) közvetítésével	487
287. §. Tetszőleges tengelyű hengerkerekek közvetetlen egybekapcsolása végak nélküli szíjak segítségével	487
288. §. A vég nélküli csavar és elmélete	488
289. §. Hyperboloidos fogazott kerek és ezek elmélete	491
290. §. A MANNESMANN-féle csőhengergézés kinematikája	494

4. Merev rendszer általános elemi elmozdulásának és sebességének analitikai megvizsgálása.

291. §. A térben szilárd tengelyek és a rendszerrel mozgó (elszállító) tengelyek geometriai vonatkozásai	498
292. §. A csavarmozgás kimutatása a szilárd coordináta-rendszerben	499
293. §. A csavarmozgás kimutatása a mozgó rendszerrel haladó (elszállító) tengelyrendszerben	501
294. §. A szilárd és a mozgó tengelyekre vonatkozó sebességek és szögsebességek összefüggése	502
295. §. A momentán csavartengely geometriai helye. A szilárd és a mozgó tengelyfelületek (az axoidok) egyenletei	503
296. §. A szilárd és a mozgó tengelyfelületeknek (az axoidoknak) a közös generatrix helyén közös érintő síkjaik vannak	506
297. §. A csavartengely mentén fekvő pontok sebessége	509
298. §. Coincidáló pontok és megfelelő görbék; ezek érintői s az általuk határolt területek	510

5. Kinematikai pólusok (fókusok) és poláris (focális) síkok. Conjugált egyenespárok. Egyenesvonalú felületek (axoidok).

Lap

299. §.	A rendszer oly pontjai, melyek sebességei bizonyos adott irányhoz párhuzamosak, a momentán tengelyhez párhuzamos egyenesben fekszenek	512
300. §.	Kinematikai fókus (pólus, zéruspont). Poláris (focális) sík. A charakteristika	513
301. §.	Néhány tétel a kinematikai pólusokról és a poláris síkokról	514
302. §.	Egy egyenes mentén fekvő pólusok polársíkjainak egymáshoz való hajlása	516
303. §.	A conjugált egyenesekről. Alaptulajdonságaik	517
304. §.	Adva van egy egyenes, fejeztessék ki conjugált egyenesének helyzete a momentán forgás jellemzői által	518
305. §.	Tételek a conjugált egyenesekről. Conjugált egyenesek párpai	519
306. §.	Az egyenesvonalú felületek (az axoidok) néhány sajátosságai, származtatva a generatrix-egyesnek általános mozgásából	521
307. §.	Az egyhéjú hyperboloid egyenesvonalú felület. Kinematikai és geometriai sajátosságai	525
308. §.	Három tetszőleges egyenes egyhéjú hyperboloidot határoz meg. Négy tetszőleges egyenest két egyenes mindig metsz	527
309. §.	A conjugált egyenesek két párja mindig egy egyhéjú hyperboloidon fekszik	529
310. §.	CHASLES és BOUR tételei az axoidokról, az alap- és a mozgó egyenesvonalú felületekről	529

6. Sugárcomplexusok és sugárcongruentiák.

311. §.	A sugárcomplexusok definitiója. Lineáris complexus egyenletei	533
312. §.	Az elsőfokú sugárcomplexus az önmagukhoz conjugált egyenesek összessége	534
313. §.	Az elsőfokú complexusok néhány alaptulajdonságáról	536
314. §.	Az elsőfokú complexus egyeneseseinek eloszlására vonatkozó tételek	537
315. §.	Tétel oly görbéről, melynek érintői egy sugárcomplexushoz tartoznak	539
316. §.	Ugyanily görbékre vonatkozó másik tétel	541
317. §.	Tételek oly egyenesvonalú felületekről, melyek generatrixei elsőfokú complexushoz tartoznak. Az egybeeső érintési pontok és pólusok s' görbéi	541
318. §.	Elsőfokú complexus egyeneséből alkotott egyenesvonalú felületek sík metszőgörbéjének osztálya ugyanaz, mint az s' görbék rendje	544

319. §.	A congruentiákról és directrixekről. A congruentia tengelye és centrális síkja. A congruentiát elsőfokú két complexus határoz meg	545
320. §.	Lineáris complexusok kéttagú csoportja (lineáris complexusok sora); ezek tengelyfelülete (a cylindroid)	547
321. §.	Lineáris complexusok háromtagú csoportja. A közös egyenesvonalú felület egyhéjú hyperboloid (a regulus)	548
322. §.	Adott két egyenes mellett a conjugált tengelypárok congruentiát alkotnak	549
323. §.	Adott egy egyenes mellett a conjugált egyenespárok összességét az ezen egyenesen átmenő valamenynyi egyenes képezi	550

7. Merev rendszer általános mozgásának (elsőrendű) gyorsulása.

324. §.	A rendszer gyorsulási összetevői szilárd koordináta-rendszerben	550
325. §.	A rendszer gyorsulásának szétbontása translatórius, szöggyorsulási és centripetális componensekre	551
326. §.	E gyorsulások kifejezéseinek egyszerűsítése a koordináta-rendszer alkalmas választása folytán	552
327. §.	Az abszolút gyorsulásnak az elszállító rendszer tengelyeire való vetületei	553
328. §.	Az általános gyorsulás középpontja; ennek helyzete. E gyorsulásnak ezen középpontra vonatkoztatott kifejezései	555
329. §.	Az általános gyorsulás normális és tangenciális componensei derékszögű és polárcordinátákban	556
330. §.	Speciális esetek, melyekben az általános gyorsulás egyes componensei zérusok	558
330a. §.	A merev rendszer egyes pontjai pályáinak geometriai tulajdonságai. A görbületi tengelyek és az osculáló gömb szerepe	561
330b. §.	Merev pontrendszer általános rulettái és a szilárd s a mozgó egyenesvonalú felületek (az axoidok)	567

8. Merev rendszer általános mozgásának magasabb rendű gyorsulásai.

331. §.	Az általános mozgás másodrendű gyorsulásának analitikai előtűntetése	568
332. §.	E gyorsulás derékszögű componenseinek egyszerűsített kifejezései	568
333. §.	Az általános mozgás másodrendű gyorsulásának geometriai előtűntetése	570
334. §.	Merev rendszer általános mozgásának tetszőleges rendű gyorsulásai	573

*9. Merev rendszer relativ mozgása általános-
ságban.*

	Kap
335. §. Az abszolút, az elszállító és a relativ sebesség	574
336. §. Az abszolút, az elszállító, az összetett centripetális és a relativ gyorsulás. CLAIRAUT (CORIOLIS) tétele. Analytikai tárgyalás	575
337. §. CORIOLIS (CLAIRAUT) tétele. Geometriai tárgyalás	577
338. §. Esetek, melyekben a CORIOLIS-féle gyorsulás zérus	579
339. §. A relativ gyorsulás kifejezései. CORIOLIS tételének megfordítása	580
340. §. A relativ mozgás magasabb rendű gyorsulásai. CORIOLIS tételének általánosítása	581
341. §. Mozgó tengelyekre vonatkoztatott magasabb rendű sebességeknek és gyorsulásoknak az egygyel alacsonyabb fokúakból való származtatása a relativ mozgás alapján	584
342. §. Alkalmazás a magasabb rendű gyorsulások tangenciális, normális és binormális összetevőinek képzésére	585
343. §. Az elszállító rendszer tengelyei az egymást orthogonálisan metsző felületek metszővonalainak érintőjéhez párhuzamosak legyenek	586
344. §. Alkalmazás a magasabb rendű gyorsulásoknak a térbeli polárkoordináták szerinti szétbontására	591

*10. Példák a pont és a merev pontrendsze-
rek relativ mozgására.*

345. §. CORIOLIS (CLAIRAUT) tétele magában foglalja RIVALS tételét	592
346. §. Példa: A gyorsulás szétbontása sík polárkoordináták szerint CORIOLIS tétele alapján	593
347. §. Példa: A gyorsulás szétbontása térbeli polárkoordináták szerint CORIOLIS tétele alapján	594
348. §. Valamely pontnak egy forgó gömb (a föld) felületéhez viszonyított relativ mozgása	596
349. §. Folytatás. A forgó gömbhöz (a földhöz) viszonyított relativ mozgás differenciálegyenletei	598
350. §. A forgás befolyása a gömbfelületi gyorsulás nagyságára és irányára. Függő ön a forgó gömbön; a szabad esés gyorsulása	600
351. §. A földet forgó lelapult forgási ellipsoidnak tekintve, az eredő földnehézségi gyorsulás. CLAIRAUT tapasztalati, közelítő formulája	602
352. §. Lelapult sphäroid gravitacionális (attractionális) vonzásának gyorsulása. Alkalmazás a földre. A forgás befolyása a földnehézségi gyorsulás nagyságára és irányára	603
353. §. A forgó föld-ellipsoid felületéhez viszonyított relativ mozgás differenciálegyenletei	605

354. §.	Valamely mozgó pont a föld-sphäroid tetszőleges érintő síkján tartozik maradni; milyen a mozgása, ha az csak a földnehézségi erő alatt, surlódás nélkül történik?	608
355. §.	Valamely szabad pontnak a föld felületéhez viszonyított mozgása (elhajított test mozgása a föld forgásának tekintetbe vételével). A mozgás-egyenletek integrációja	612
356. §.	A függőlegesen felfelé vagy lefelé hajított (eső) test mozgása a föld forgásának tekintetbe vételével	614
357. §.	Tetszőleges irányban elhajított test mozgása a föld forgásának tekintetbe vételével	616

11. Merev rendszerek kényszermozgása. Példák.

358. §.	A mozgás szabadságát korlátozó feltételekről általánosságban. Kényszer és akadály	619
359. §.	A pont, az egyenes vonal és a pontrendszerek mozgása szabadságának különböző fokai és az ezeket szabályozó kényszerítő feltételek	620
360. §.	A merev rendszer négy pontja előírt négy felületen mozog; létezik meghatározott két egyenes, mely a rendszer minden lehetséges elemi elmozdulása közben conjugált marad	624
361. §.	Négy feltétel mellett végbemehető momentán csavarmozgások jellemzői. Ezek tengelyfelülete (a cylindroid)	625
362. §.	A merev rendszer öt pontja előírt öt felületen tartozik maradni. E mozgás néhány általános tulajdonsága	627
363. §.	A merev rendszer három pontja előírt három felületen mozog	629
364. §.	A merev rendszer két pontja előírt két felületén mozog	631
365. §.	A merev rendszer egy pontja előírt felületen mozog	631
366. §.	A feltételek helyettesítése gyorsulásokkal. A feltételi gyorsulások számításáról	631
367. §.	Első példa merev rendszerek kényszermozgására	632
368. §.	Második példa a merev rendszerek kényszermozgására	634

12. Feladatok a merev rendszerek általános és relativ mozgására.

369. §.	Huszonhét feladat a merev rendszerek általános mozgására	636
370. §.	Öt feladat merev rendszerek gömbi és általános mozgása magasabb rendű gyorsulásaira	640
371. §.	Huszonhárom feladat a pontok és a merev rendszerek relativ mozgására	641

FIGYELMEZTETÉS.

A kezdőnek, ki az analysis és az analytikai geometria legelső elemeivel rendelkezik s ki előtt a kinematika *új tárgya*, e tan első tanulmányozására e műnek következő, magukban véve összefüggő kis kinematikai vezérfontalat képező paragrafusai ajánlhatók (a többiek az első olvasnál mellőzhetők):

BEVEZETÉS: 1—12. §§.

I. A pont kinematikája.

A) Általános rész:

1. Fejezet. 14—20, 22, 24, 25. §§.
2. Fejezet. 26—34, 36—39. §§.
3. Fejezet. 40—44, 46—50. §§.
4. Fejezet. 53, 54, 55. §§.
7. Fejezet. 72—75, 78. §§.
8. Fejezet. 79—81. §§.
9. Fejezet. 86—88. §§.
10. Fejezet. 89. §., 89a §. első kikezdése.

B) Részletes rész:

1. Fejezet. 90*—93*, 98* §§.
2. Fejezet. 102*, 103* §§. 106* I. §. része, 108* §.
3. Fejezet. 112*, 123*, 124* §§.

II. Merev rendszerek kinematikája.

ÁLTALÁNOS MEGJEGYZÉSEK: 131—133. §§.

A) Sík mozgás:

1. Fejezet. 134. §., 135. §. 1. pontja, 136. §., 137. §. 1 és 2. pontja, 138. §.
2. Fejezet. 139. §., 141. §. 1. pontja, 142, 145, 146. §§.
3. Fejezet. 147*—150* §§., 151* §. I. pontja, 152* §. 3. pontja, 154* §. 1. és 4. pontja.
4. Fejezet. 156—161. §§.
9. Fejezet. 192. §.

B) Gömbi (sphärikus, pont körüli) mozgás:

1. Fejezet. 206—210. §§.
2. Fejezet. 216. §.
3. Fejezet. 219*—222* §§.
4. Fejezet. 225—227, 230—234, 238—239. §§.

C) Merev rendszerek általános mozgása:

1. Fejezet. 270—275. §§., 276. §. 1. pontja.
2. Fejezet. 278—281. §§.
3. Fejezet. 286*, 287* §§., 288* §. 1. pontja, 290* §.
10. Fejezet. 350*, 351*, 352* §§.
11. Fejezet. 358, 359, 360. §. 1. pontja.

* A csillaggal jelölt paragrafusok részletesen kidolgozott példákat tartalmaznak.

A «Kinematika» észrevett sajtóhibái és reá vonatkozó néhány megjegyzés.

11. lap 14. sora alulról, igtasd közbe KRAFT F.: Sammlung von Problemen der analytischen Mechanik. Két kötet. Stuttgart 1884 és 1885.
12. lap utolsó sora után: ZECH P.v.: Sammlung von Aufgaben aus der theoretischen Mechanik nebst Auflösungen. 2. kiadás. Stuttgart 1891.
28. lap Jegyzete második sorában defineálva helyett olvasd definiálva.
50. lap 10. sora alulról: $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ helyett olvasd: $2\delta_x, 2\delta_y, 2\delta_z$.
55. lap (4) és (5) egyenlete nyomása nem lévén tisztza,

$$\text{olvasd } y'z'' - z'y'' \text{ s i. t.}$$
55. lap (6) egyenlete nyomása nem lévén tisztza, olvasd s'^3
65. lap (1) egyenlete nyomása nem lévén tisztza, olvasd $\frac{x'}{s'}$ s i. t.
66. lap (5) egyenlete nyomása nem lévén tisztza,

$$\text{olvasd } s'x'' - x's'' \text{ s i. t.}$$

$$y'z'' - z'y'' \text{ s i. t.}$$

$$x''^2 \text{ s i. t.}$$

$$fx''' \text{ s i. t.}$$
80. lap első és harmadik sorának nyomása nem lévén tisztza,

$$\text{olvasd } x, x', x'' \text{ s i. t.}$$

$$\text{és } x', x'', x''' \text{ s i. t.}$$
82. lap (9) egyenlete nyomása nem lévén tisztza, olvasd $y z' - z y'$ s i. t.
83. lap (9₁) " " " " " " $y'z'' - z'y''$ s i. t.
84. lap (11₁) " " " " " " $y'z'' - z'y''$ s i. t.
125. lap (14) " " " " " "

$$\text{olvasd } (A_1s_1 + A_2s_2)'' + \omega^2(A_1s_1 + A_2s_2) = 0.$$
129. lap 6 sora felülről, egyenlete nyomása nem lévén tisztza,

$$\text{olvasd } (s_1 + s_2)'' + \omega^2(s_1 + s_2) = 0.$$
133. lap (1) egyenlete nyomása nem lévén tisztza,

$$\text{olvasd } s'' + 2\kappa s' + \omega^2 s = 0.$$
136. lap 18. sora felülről, egyenlete nyomása nem lévén tisztza,

$$\text{olvasd } s'' + 2\kappa s' - \omega^2 s = 0.$$
137. lap 15. sora alulról, egyenlete nyomása nem lévén tisztza, t helyett

$$\text{olvasd } t, .$$
141. lap utolsó sora egyenlete nyomása nem lévén tisztza,

$$\text{olvasd } t'' = \frac{1}{2}T - t'.$$
192. lap negyedik sora felülről } egyenlete nyomása nem lévén tisztza,
és hetedik sora alulról }

$$\text{olvasd } x''^2, y''^2, z''^2.$$

249. lap utolsó sora, egyenlete nyomása nem lévén tiszta,
 olvasd $x'' = x \sum K_i - \sum K_i x_i$ s i. t.
250. lap 10 sora felülről, egyenlete nyomása nem lévén tiszta,
 olvasd $x'' = \xi'' = K\xi$ s i. t.
60. lap 20. sora felülről, definált helyett olvas definiált.
78. lap; a 6. fejezetecím harmadik sorából «két» elhagyandó.
87. lap 6. sor felülről, $\cos(EAF)$ helyett olvasd $\cos(EAT)$.
114. lap 7. sorában felülről, kifeszíthetetlen helyett olvasd: kinyújthatatlan.
131. lap (7) egyenlete után igtasd:
 Itt a_1 és a_2 *positiv*, ha $c = -i\gamma$, $\omega\tau = \alpha + \frac{1}{2}i\pi$, hol α és γ *positiv*; értékeik: $a_1 = \gamma e^\alpha$; $a_2 = \gamma e^{-\alpha}$.
149. lap lábjegyzéke első sora végéhez igtasd: $y \cdot t$.
153. lap 15. sor felülről $2\pi : \omega$ helyett olvasd $\pi : \omega$.
153. lap 4. feladata $v = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$ egyenletében v helyett olvasd s .
156. lap 27. feladatában $\pi : \omega$ helyett olvasd $2\pi : \omega$.
159. lap 18. sor felülről cseréld fel egymással az x -et és y -t.
162. lap 5. sor alulról mozgást helyett olvasd a gyorsulás törvényét.
169. lap 18. sor felülről távolság helyett olvasd távolságot.
172. lap 6. sor felülről $V_x : V_y$ helyett olvasd $V_y : V_x$.
187. lap 4. sorába felülről zérus után igtasd: vagy.
198. lap 11. sora felülről; első betűje x'' .
208. lap 7. sora felülről; első betűje x'' .
211. lap (10) egyenletének utolsó betűje δ'' .
233. lap utolsó sora után igtasd: Ez az eljárás kiterjeszthető bármily rendű lineáris differenciálegyenletre.

Jegyzet a közönséges differenciálegyenletekről, ezek integráljairól és megoldásairól.

A jelen kötetben csak *közönséges* (totális, egy független változót tartalmazó) differenciálegyenletek lépnek fel; rendjük megegyezik legmagasabb differenciálquotiensük rendjével. Ezek megvizsgálásánál felmerülő függvényekre nézve a terminologia nagyon különböző.

Így sokan azt a véges egyenletet a függő és független változó között, mely az ily n -edrendű differenciálegyenletnek eleget tesz és n számú független, a differenciálegyenletben elő nem forduló állandót tartalmaz ez egyenlet *teljes integráljának* nevezik; oly véges egyenletet pedig, mely kevesebb ily állandót tartalmaz, *partikuláris integrálnak*: az előbbi az utóbbiakból összzetehető.

Mások minden véges függvényt, mely a differenciálegyenletet kielégíti, ez egyenlet *megoldásának* nevezik; e függvény *általános megoldásának* vagy még *törzsegyenletnek* mondatik, ha ez a legáltalánosabb véges összefüggés, mely az egyenletnek megfelel, különben a megoldás *partikuláris*. Egyes esetekben *singuláris* megoldások is léphetnek fel, melyek az általánosban nem tartalmazvák.

Ismét mások ugyanazt a véges összefüggést *teljes integrálnak* vagy *általános megoldásnak* nevezik, a szerint, a mint gondolat-menetünkben e függvényt tekintjük előbb létezőnek és a differenciálegyenletet belőle leszámraztatottnak, vagy megfordítva, ezen utóbbiból a megoldás bizonyos folyamata segélyével képezettnek tekintjük a véges összefüggést.

Jelen kötetben ezen elnevezések váltakozva használtak.

A «Mathematikai repertórium» észrevett sajtóhibái és reá vonatkozó megjegyzések.

3. lap 6 és 7. sor alulról $\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1-\sin^2 \alpha}}$ helyett olvasd $\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1-\cos^2 \alpha}}$;
15. lap 4. tételében $1 > x > 1$ helyett olvasd $1 > x > -1$.
15. lap 21. §. 1. tételében $\frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$ helyett olvasd $\frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$.
18. lap 24. §-ának 4. pontja elhagyandó.
23. lap 16. sorában felülről, $A_0 x_1 x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n$ helyett
olvasd $A_0 x_1 x_2 x_3 \dots x_{n-1} x_n$.
41. lap 43. §. végéhez: Egy α, β, γ iránycosinusú, a, b, c összszerendező A ponton áthaladó egyenes s egy x, y, z helyzetű B pont közötti legrövidebb p távolság, ha $r = AB$ és ε az r és az egyenes által bezárt szög:

$$p^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2;$$

$$p^2 = r^2 \sin^2 \varepsilon = [\beta(c-z) - \gamma(b-y)]^2 + [\gamma(a-x) - \alpha(c-z)]^2 + [\alpha(b-y) - \beta(a-x)]^2.$$
75. lap 8. formulájához: $2b$ a két gócpont egymástól való távolsága.
77. lap legfelső sora elé: $r = a \cos \vartheta + b$; a PASCAL-féle csigagörbe.
88. lap 5 és 6. sor alulról, $\frac{1}{q} = \frac{1}{P} = \frac{1}{R}$ helyett olvasd $\frac{1}{q} = P = R$.
116. lap, a felülről számítandó 6. sor után: A görbületi vonal elemének kezdő- és végpontjából mint talppontokból a felületre emelt normálisak *egy* síkba, a fémetszet síkjába esnek.
116. lap utolsó sora után: E szerint a legrövidebb (geodásiai) görbe főnormálisa és így görbületi sugara is, mindenütt egybeesik a felület normálisával.
119. lap 12. sora felülről: a $d\varepsilon$ szög szintén zérus helyett olvasd: a $d\varepsilon$ szög az O -hoz és az M -hez tartozó osculáló síkok közötti szög.
122. lap legfelső sorához:
 A_0 determináns még írható:

$$A_0 = |a_{ik}|; \quad a_{ik} = a_{ki}, \quad \text{vagy} \quad A_0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$
 $(i, k = 1, 2, 3, 4)$
122. lap 10. sora alulról: $A_{11} > 0, \quad A_0 < 0$ helyett $A_{11} < 0, \quad A_0 > 0$.
122. lap 3. sora alulról: $A_0 > 0$ " " $A_0 < 0$.
160. lap 9. sora fölülről: $\int \sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)} dx$ " $\int \frac{\sqrt{1-k^2 x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

171. lap 16. sora fölülről: 1 geographiai mértföld helyett 1 geographiai vagy német mértföld.

171. lap 17. sora fölülről: 1 német mértföld helyett 1 régi északnémet mértföld.

171. lap 19. sora fölülről után: A tengeri mértföld jelenleg a föld-quadrans közepes ívperce, azaz $\frac{1}{5400}$ része = 1851·8 méter.

174. lap alulról számítandó 13 és 14. sora helyett

$$\left. \begin{array}{l} \text{A földnehézség gyorsulása} \\ \text{Budapesten} \\ \text{A másodperc-inga hossza} \\ \text{Budapesten} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{GRUBER észlelései sze-} \\ \text{rint, az adriai tenger} \\ \text{szinére redukálva} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} g=9\cdot80880 \frac{\text{méter}}{(\text{mpcz})^2} \\ \lambda=0\cdot9938404 \text{ méter.} \end{array} \right.$$

175. lap 10 és 11. sora felülről: $\frac{0\cdot0339117}{9\cdot8316030}$ helyett $\frac{0\cdot0339117}{9\cdot780728} = 0\cdot00346640$.

$$\text{Kiegészítések 2. lap 14 és 15. sora felülről: } = \frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{\tau^2}$$

$$\text{helyett } = \frac{1}{\varrho^2 + \tau^2 \varrho'^2}.$$

Kiegészítések 2. lap 17 és 18. sora felülről: elhagyandó.

ELMÉLETI MECHANIKA.

KINEMATIKA ÉS DYNAMIKA.

ANIMATOIN ITTAMIN

ANIMATOIN ITTAMIN

BEVEZETÉS.

Az anyagi rendszerekről, a mozgásról és az erőkről általánosságban.

Az elméleti mechanika tárgya és felosztása.

1. §. Anyagi rendszer, anyagi pont.

Minden tudományos tárgyalást avval kezdünk, hogy megvizsgálás céljából bizonyos *tárgyat* kiszemelünk és ezen tárgyat a térben lévő egyéb testek kizárásával kutatjuk és vele addig foglalkozunk, míg a megindított vizsgálatot be nem fejeztük.

A térben lévő többi testtől ily módon szigorúan *elhatárolt* részét a természeti anyagnak *anyagi rendszernek* nevezzük. (A rendszer határolása vagy a valóságban van meg, vagy pedig csak gondolatbeli.)

Midőn az anyagi rendszer vagy a test, melyre figyelmünket fordítjuk, oly kicsiny kiterjedésű, hogy a *megejtendő vizsgálat szempontjából* egyes részeinek egymástól való távolsága elhanyagolható, ezt anyagi részecsnak vagy röviden *anyagi pontnak* nevezzük.

A nap körül keringő valamely bolygó önmagában véve nagy kiterjedésű anyagi rendszert képez; de midőn annak mozgását a nap körül vizsgáljuk, akkor a nap és a bolygó között lévő roppant távolsághoz képest a bolygó méreteitől eltekinthetünk és ezt, az említett mozgás megközelítő vizsgálata alkalmával, anyagi pont gyanánt tárgyalhatjuk.

Hasonlóan tekinthetjük a föld felülete közelében elhajított testet első közelítésben anyagi pontnak, ha annak mozgását a föld közelében megvizsgáljuk.

2. §. Belső és külső vonatkozások és hatások.

Valamely *anyagi rendszer egyes részei* között általánosságban vonatkozások állanak fenn, vagy hatások lépnek fel; ezeket *belső* vonatkozásoknak vagy *belső* hatásoknak mondjuk.

Ellenben *külső* vonatkozások vagy *külső* hatások olyanok, melyek egyfelől az *egész rendszer* vagy *annak bármely része*, másfelől a *rendszeren kívül fekvő*, ahhoz nem tartozó test vagy testek között fennállanak.

A külső vonatkozásokat csak anynyiban vizsgáljuk, a mennyiben a tekintetbe vett rendszerünkre befolyással vannak, ellenben a rendszeren kívül levő testek egymáshoz való vonatkozásai és egymásra való hatásai a szemügyre vett rendszer vizsgálatánál figyelmen kívül hagyhatók.

A föld és a holdból álló anyagi rendszerben a föld és holdja között fellépő vonzás egy *belső* vonatkozás; ellenben a nap vonzása, akár a földre, akár holdra, *külső* vonatkozás.

Továbbá, valamely rugalmas test egyes részei között működő rugalmassági erők a testnek *belső* vonatkozásaihoz tartoznak; ellenben a föld és ezen rugalmas test között fellépő gravitációs vonzás *külső* vonatkozás.

3. §. Alakzat. (Configuratio).

Ha valamely anyagi rendszert egyes részeinek kölcsönös helyzete megállapítása céljából tárgyalunk, rövid elnevezést vezetünk be, mondván, hogy a *meglévő helyzeti vonatkozások összessége a rendszer alakzata* (configurációja).

Ha egy adott időpillanatban a rendszer alakzatát ismerjük, ez annyit jelent, hogy az anyagi rendszer minden egyes (anyagi) pontjának helyzetét, viszonyítva a rendszer minden többi pontjának helyzetéhez, az adott időpillanatban ismerjük.

4. §. A helyzet megállapítása. Diagramm.

Anyagi rendszerek alakzata különböző módon tüntethető elő.

Legegyszerűbben történik ez *minta* vagy *diagramm* segítségével, melynek lényege az, hogy alakzata, alakja, teljesen megegyezik a rendszerével, míg a többi tulajdonságokra nézve a megegyezés nem szükséges.

Közelebbről pedig *diagrammnak* nevezzük az oly, általánosságban *térbeli* geometriai alakot, mely az anyagi rendszer térbeli viszonyai és vonatkozásai tanulmányozására alkalmas.

Ha a következőkben a rendszer alakzatáról szólnunk, szellemi vagy testi szemünk előtt tartjuk a diagrammot, mely az anyagi rendszer alakzatával teljesen megegyezik, de annak egyéb (anyagi) tulajdonságaival nem bír.

Ha a diagrammot *rajzban* állítjuk elő, akkor a *három méretű* alakzatnak *két méretű sémáját* nyerjük.

Valamely *anyagi rendszer diagrammja a rendszer minden anyagi pontja diagrammjának az összessége.*

Anyagi pont (része) *diagrammja matematikai* (geometriai) *pont*, melynek nincs alakja.

Pont helyzete rendszeren *összrendezők* (*koordináták*) segítségével lesz meghatározva.

5. §. Mozgás. Tér. Idő. Pálya.

A *mozgás* általánosságban a *helyváltozás* folyamata.

Minden helyváltozás a *térben* történik és *időben* megyen végbe.

[A *tér* a jelenségek egymásmelletiségét, az *idő* ezek egymásutánját tünteti elő. E két fogalom a mozgás fogalmának megállapítására szükséges és elegendő.]

Valamely rendszer mozgása minden tekintetben egyenlő az alakzatának mozgásával; ezért a mozgásra és ennek tanulmányozására nézve az anyagi rendszer helyettesíthető konfigurációja által.

Az anyagi rendszerek és pontok mozgása, a mozgás természeténél fogva, csak *folytonos* lehet; a helyváltozás két helyzet között ugyanis csak úgy történhetik, hogy a rendszer minden közbeneső helyzeten megyen keresztül és hogy valamenynyi pont mozgásának iránya csak folytonosan változhatik.*

Az anyagi vagy geometriai pont helyzeteinek azon folytonos sorozata, melyen a pont mozgása közben áthalad: a pont *pályája*.

Pontrendszer mozgásánál minden egyes pontnak meg van a maga pályája.

A mozgás megvizsgálásánál a *pálya térbeli tulajdonságait* és a *helyváltozás időbeli viszonyait* vesszük tekintetbe.

6. §. *Erő és Anyag. Fellépésük elválaszthatatlan.*

A természettudományokban *erő*-nek nevezzük mindazt, a mi hatást gyakorolni vagy hatást megakadályozni képes.

Anyag-nak nevezzük mindazt, a min a természeti jelenségek fellépnek és lefolynak. (Anyag a természet jelenségeinek *substrátuma*.)

Az erőről mondjuk, hogy ez az anyagot hatásképesé teszi, hogy ez által az anyag képes leszen, érzékeinkre hatni, hogy az erő által válik csak az anyag észrevehetővé.

Az anyagról ellenben mondjuk, hogy ez erőt képes kifejtetni, hogy az erő rajta nyilvánul, hogy az anyag az, a mire az erő hatni képes.

Ezen definitiókból az a jellemző körülmény következik, hogy az erő és az anyag minden természeti jelenségnél egyszerre, együttesen lép fel, és hogy anyag erő nélkül vagy erő anyag nélkül nem eshetik érzéki tapasztalásunk keretébe.

E szerint az erő és az anyag külön-külön fellépése a megfigyelhető jelenségeknél lehetetlen; minden kísérlet, az erőt és az anyagot philosophiai vagy metaphysikai uton egymástól egészen függetlenül definiálni, teljesen meghiúsult.

[Nem tekinthetjük az érzékeink közvetítésével hozzáférhető világban az oly anyagot létezőnek, a melyen erő ne nyilvánúlna (hiszen ellenkező esetben az anyagot nem vehetnők észre) és viszont nem tekinthetjük létezőnek az oly erőt, a mely ne nyilvánúlna anyagon (mert ellenkező esetben az erő jelenlétéről nem lehetne tudománkunk)].

Maga az erő különböző körülmények között igen különbözőképen nyilvánúlhat; hatásának módja szerint megfelelő névvel jelöljük; így: súly, nyomás, feszültség, rugalmasság, vonzás, taszítás, mozgató erő s í. t. elnevezésekkel.

* Az ütközésnél látszólag hirtelen bekövetkező változása a mozgás irányának csak közelítő, a rugalmas hatásokat elhanyagoló felvétel; ez az irány akkor megyen át az ellenkezőbe, mikor a sebesség zérus.

7. §. *Tömeg. Az anyag megmaradása.*

Anyagi rendszerhez tartozó valamenynyi anyagi rész *anyag-tartalmának összege a rendszer tömegét* képezi.

A tapasztalat kimutatta, hogy a természeti jelenségek lefolyása közben az anyag sajátosságai változhatnak ugyan, de azt is, hogy az anyag mint ilyen soha sem semmisülhet meg, legfeljebb az egyik rendszerből átmehet a másikba vagy más anyaggal egyesülve, más anyagi rendszert alkothat.

Ezen sajátságát az anyagnak kifejezi az *anyag megmaradásának elve*, mely szerint a természet anyagkészletének összes mennyisége (tömege) változatlan.

8. §. *Mérés. Mértékegység. A hosszúság, felület és térfogat egységei.*

Midőn valamely konkrét mennyiséget (quantitas, mekkoraság) pontosan, számbelileg ismerni akarjuk, akkor ezt egy másik, de *ugyanazon természetű, ugyanazon nemű* mekkorasághoz kell *viszonyítanunk*.

Ezt a viszonyba állítást, ezt az összehasonlítást *mérésnek* nevezzük; az a mekkoraság pedig, a melyhez a többi, ugyanazon természetű (vele homogén) mennyiségeket viszonyítjuk, ezeknek *mértékegysége*.

A hány különböző természetű mekkoraság létezik, anynyi különböző nemű mértékegység van.

Ezek értelmében minden konkrét mennyiségnek algebrai jelekben való szigorú előtűntetése *két tényezőt* tartalmaz; az egyik a tekintetbe vett mennyiség *egysége*, a másik a mennyiségben lévő ezen *egységek száma*; az egyik tényező e szerint a mennyiséggel homogén, egynemű vagy ugyanazon jellegű, a másik tényező ellenben puszta szám, a mennyiség *mérőszáma*.

1. Jelelje l valamely meghatározott *hosszúságot*, L a hosszúság egységét, λ ezen egységek számát az l -ben.

A három mennyiség összefüggése:

$$l = \lambda \cdot L \quad (1)$$

2. A *felület* egysége legyen F ; az f felületben foglalt ily egységek száma legyen φ ; áll

$$f = \varphi \cdot F \quad (2)$$

De valamely felület területe az l_1 és l_2 oldalú derékszögű egyenközény felülete által is tüntethető elő, hol az (1) szerint $l_1 = \lambda_1 L$; $l_2 = \lambda_2 L$; ezért még:

$$f = \lambda_1 \lambda_2 \cdot L L \quad (2a)$$

Összehasonlítva ezen egyenletet a megelőzővel és felvéve, hogy a φ szám a $\lambda_1 \lambda_2$ számszorozattal egyenlő, származik a felület egysége gyanánt (1. a köv. §-ot):

$$F = L^2 \quad (3)$$

víz tömege) a három alapegység: az ezekből keletkező rendszert W. THOMSON szerint a *centimetergrammsecond* rendszernek nevezik; ennek jelölése: C. G. S. az angol és francia, c. g. s. a német szerzőknél.

Tárgyalásunk menetében az egymásután fellépő geometriai, kinematikai, mechanikai és physikai menynyiségek jellegét (méretét) és egységét a megfelelő helyen gonddal fogjuk megvizsgálni és megállapítani.

11. §. *Az elméleti mechanika tárgya; felosztása. Kinematika, dinamika. Kinetika, statika.*

A tágasabb értelemben vett mechanika általánosságban tárgyalja a mozgás tulajdonságait, továbbá az anyagi rendszerekre működő erőket és az ezek által létesített mozgásokat és mozgásváltozásokat.

Közelebbről ezen tudományt két főrésze szokás osztani; az első a kinematika, vagy *phoronomia*, a második a szorosabb értelemben vett mechanika, vagy helyesebben *dynamika*.

1. A kinematika vizsgálja a mozgás geometriai tulajdonságait, tekintet nélkül arra, hogy mi az, a mi a természetben mozog és mik a mozgás okai. Ezen sajátjánál fogva a kinematikát még a mozgás geometriájának* is nevezik vagy egyszerűen a mozgás tanának.

2. A dinamika tanához jutunk, ha a kinematika abstract eredményeit a természetben tényleg végbenő mozgások teljes tanulmányozására alkalmazzuk. A dynamikában ugyanis tekintettel vagyunk arra, a mi mozog, vagyis a testek anyagára (tömegére) és a mozgást létesítő vagy változtató okokra (a természeti testek egymásra hatására), azaz az erőkre, melyek a testek mozgási állapotát lényegesen változtatják. Ezért a dynamikát gyakran az erők tanának is nevezik.

2a. A dynamikát szokás statika és kinetika részekre osztani; a statika vizsgálati tárgyát képezi az erők azon hatása, melynél nyugalom, egyensúly áll fenn; a kinetika az erőknek azon hatását tárgyalja, melynél ezek anyagi rendszerek mozgását létesítik vagy a már meglévő mozgásukat változtatják. E szerint a statika a kinetikának csak speciális esete, midőn ugyanis az anyagi rendszerek mozgása, vagy mozgásuk változása zérus.

3. Mind a kinematika, mind a dinamika tárgyalását didactikai szempontból előnyös, a legegyszerűbb geometriai alaknak, illetve a legegyszerűbb anyagi rendszernek vizsgálatával kezdeni, vagyis a geometriai pont illetve az anyagi pont mozgásából kiindulni és ebből átmenni az összetettebb viszonyok és vonatkozások vizsgálatára.

3a. A pontén kívül a pontrendszerek kinematikája és dynamikája képezi a mechanika tárgyát.

* Sokszor még LAGRANGE szerint a négydimenziós tér geometriájának is, mivel benne három térbeli és egy időbeli koordináta lép fel.

12. §. *Az elméleti mechanika rendszere.*

I. A megelőző §. értelmében a *kinematika* a következő főfejezetekre osztható:

1. *A pont kinematikája.*
2. *Változatlan vagy merev pontrendszerek kinematikája.*
3. *Szilárd, de rugalmas pontrendszerek kinematikája (a rugalmas deformációk tana).*
4. *Folyékony pontrendszerek kinematikája (a cseppfolyós és a légnemű folyadékok deformációinak tana).*

A 3. és 4. fejezet a változó pontrendszer néhány esetének kinematikáját tartalmazza.

II. A *dynamika* megfelelő főfejezetei pedig a következők:

1. *Az anyagi pont és a véges számú pontokból álló anyagi rendszerek dynamikája.*
2. *Merev anyagi rendszerek dynamikája.*
3. *Szilárd, de rugalmas anyagi rendszerek dynamikája (a rugalmasság tana).*
4. *Folyékony anyagi rendszerek dynamikája (cseppfolyós és légnemű testek dynamikája [hydrodynamika]).*

III. Ezen főfejezetekben említettekén kívül is vannak mozgásjelenségek, melyek az elméleti mechanika keretébe tartoznak, melyeknek a kiterjeszthetetlen fonalak, a lánczok, a nem szilárd rugalmas húrok s i. t. egyensúlyi és mozgási viszonyai; ezeket a hozzájuk legközelebbi főfejezetekhez csatoljuk.

Jegyzet. A kinematika és a dinamika között fennálló kapcsolatot (avagy az átmenetet az előbbiről az utóbbira) legjellemzőbben fejezi ki NEWTON második axiomája (tapasztalati tétele), mely szerint önmagában vagy rendszerével együtt mozgó bármely anyagi pontra működő erő egyenlő (avagy helyettesíthető) a pont tömege és gyorsulása szorzatával.

Ennélfogva az anyagi pont dynamikája csak egy tényezővel, a pont tömegével, különbözik a pont kinematikájától. Az anyagi rendszerek dynamikája a pontrendszerek kinematikájából ugyan ily egyszerű úton nyerhető, de különbségük tetemesen bonyolódottabb.

Jelen elméleti mechanikában csak a ponttal, a véges számú pontok rendszerével és a merev pontrendszerrel foglalkozunk; vizsgáljuk ezek *szabad mozgását* valamint *feltételeknek alávetett mozgásukat* (az úgynevezett *kényszermozgást*) és felöljük az említett kisebb terjedelmű fejezeteket is.

Tárgyalásainkat a legegyszerűbb viszonyok és vonatkozások megállapításával kezdjük és lépésről lépésre átvizsgálva a fokonyomottabb jelenségeket, befejezzük a mű ezen részét a legáltalánosabb mechanikai elvek fejtegetéseivel, ezeknek általános koordinátákban való kifejezésével és tényleges problémákra való alkalmazásával.

A rugalmas deformációt és a rugalmasság erőit, továbbá a cseppfolyós és a légnemű testek (gázok) mechanikáját az elméleti physika külön részeiben, a rugalmasság tanában és a hydromechanikában fogjuk tárgyalni.

13. §. *Az elméleti mechanika könyv- és értekezés-irodalmának néhány elterjedtebb jelensége :*

- D'ALEMBERT Jean le Rond.: *Traité de Dynamique*. Nouvelle édition. Paris 1758.
- BELANGER M.: *Traité de Cinématique; Traité de la Dynamique d'un point materiel; Traité de la Dynamique des systèmes matériels*. Paris 1864—66.
- BOUR E.: *Cours de Mécanique et Machines*. Atlaszszaal. Három kötet. Második és első kiadás. Paris, 1887, 1868, 1874.
- BURMESTER L.: *Lehrbuch der Kinematik*. Első kötet három részben. Atlaszszaal. Leipzig, 1886—88.
- DELAUNAY Chr.: *Traité de Mécanique rationnelle*. Sixième édition. Paris 1878. (Német fordításban KREBS-től, Wiesbaden 1868).
- DUHAMEL J. M.: *Cours de Mécanique*. Troisième édition. Két kötet. Paris 1862—63. (Német fordításban WAGNER-től, Braunschweig, 1853, és EGGERS-től, második kiadás, Leipzig 1861).
- EULER LEONHARD: *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*. Első kiadás, Rostock és Greifswald, 1765; második 1790. («Mechanik und Theorie der Bewegung der festen Körper» czímmel németre fordította WOLFERS. Négy kötet. Greifswald 1848—53).
- FUHRMANN A.: *Aufgaben aus der analytischen Mechanik*. Két kötet. Második kiadás. Leipzig, 1879 és 1882.
- HAMILTON W. ROWAN: *On a general method in Dynamics*. Két rész. London 1834—35; és *Elements of Quaternions*. London 1866. (Német fordításban GLAN-tól két kötetben. Leipzig 1882—4).
- HELMHOLTZ H.: *Ueber die Erhaltung der Kraft*. Berlin 1847; új kiadás 1889.
- HERRMANN EMIL: *Technikai mechanika*. (Erőműtan I. rész.) Szerző kiadása. Budapest, Franklin-társulat nyomdája. 1885.
- HORVÁTH IGNÁC: *Mechanika, I. Rész: Kinematika, I. kötet: A pont kinematikája* 192 l. Budapest 1874. Több nem jelent meg.
- JACOBI C. G. J.: *Vorlesungen über Dynamik*. (Herausgegeben von Clebsch.) Berlin 1866.
- JULLIEN P. M. (S. J.): *Problèmes de Mécanique rationnelle*. Deuxième édition. Két kötet. Paris, 1866—67.
- KIRCHHOFF G.: *Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik*. Harmadik kiadás (az elsőnek majdnem változatlan lenyomata). Leipzig 1883.
- KÖNIG GYULA: *A dinamika alapegyenleteinek jelentéséről*. M. T. Akadémia, Értekezések a Matematikai tudományok köréből, XIV. kötet, 1. sz. 1—43 lap. 1888.
- LAGRANGE JOSEPH LOUIS: *Mécanique analytique*. Troisième édition (publié par J. BERTRAND). Két kötet. Paris 1853—55. Ezen utóbbit írja kiadta G. DARBOUX, 1888—89. (Német fordításban H. SERVUS-tól, Berlin, 1887.)
- LAURENT H.: *Traité de Mécanique rationnelle*. Deuxième édition. Két kötet. Paris 1878.
- MATHIEU L.: *Dynamique analytique*. Paris 1878.
- MAXWELL J. C.: *Matter and motion*. London 1876. (Német fordításban FLEISCHL-től: *Substanz und Bewegung*. Braunschweig 1878 és 1881).
- NEUMANN F.: *Einleitung in die theoretische Physik*. (Herausgegeben von PAPE). Leipzig, 1883.
- NEWTON ISAAC: *Philosophiæ naturalis principia mathematica*. Első kiadás, London 1687. Ezt követte számos új kiadás. (Németre fordította WOLFERS: «Mathematische Principien der Naturlehre» czímmel. Berlin 1872).

- PETZVAL OTTO: Mechanikának elvei. Pest, 1850.
- PETZVAL OTTO: Erő- és géptan. Két kötet. Pest, 1861.
- POINSON L.: Théorie nouvelle de la rotation des corps. Dixième édition. Paris 1861. (Angol fordításban WHITNEY-től, Cambridge 1834; Német fordításban SCHELLBACH-tól, Berlin 1851).
- POISSON S. D.: Traité de Mécanique. Deuxième édition. Két kötet. Paris 1833.
- PUISEUX P. Leçons de Cinématique, Mécanismes, Hydrostatique, Hydrodynamique. Paris 1890.
- RANKINE W.: Manual of applied mechanics. Eleventh edition. London 1882.
- RAUSENBERGER O.: Lehrbuch der analytischen Mechanik. Két kötet. Leipzig, 1888.
- RÉSAL H.: Traité de Cinématique pure. Paris 1862.
- RÉSAL H.: Traité de Mécanique générale. Hat kötet. Paris 1873—81.
- REULEAUX F.: Theoretische Kinematik. Atlaszsza. Két kötet. Braunschweig 1875.
- RITTER A.: Lehrbuch der analytischen Mechanik. Második kiadás. Leipzig 1883.
- ROUTH E. J.: Dynamics of a system of rigid bodies. Negyedik kiadás. Két kötet. London 1882—1884. (Számos problémával).
- de SAINT-GERMAIN A.: Recueil d'Exercices sur la Mécanique rationnelle. Deuxième édition, entièrement refondue. Paris 1889.
- de SAINT-GERMAIN A.: Résumé de la Théorie d'un mouvement d'un solide autour d'un point fixe. Paris 1887.
- SCHELL W.: Theorie der Bewegung und Kräfte. Második kiadás, két kötet. Leipzig 1879—80. (Számos irodalmi adattal).
- SOMOFF J.: Theoretische Mechanik. (Oroszból németre fordította ZIWET). Két kötet. Leipzig 1878—79.
- STURM C.: Cours de Mécanique. Cinquième édition par de SAINT-GERMAIN. Két kötet. Paris 1883.
- SZILY K.: Adalék a pontmozgás tárgyalásához. M. T. Akadémia Matematikai és Természettudományi Értesítője, VII. kötet, 140—150 ll. 1889.
- TAIT AND STEELE: Treatise on the Dynamics of a particle. Fifth edition. London 1882. (Számos példával és feladattal).
- THOMSON AND TAIT: Treatise on Natural Philosophy. New edition. Egy kötet, két félkötetben. Cambridge 1879—83. (Az első kiadás német fordítása WERTHEIM-től, Braunschweig 1871—74).
- VILLIÉ E.: Traité de Cinématique. Paris 1888.
- VILLIÉ E.: Compositions d'Analyse et de Mécanique. Paris 1885.

KINEMATIKA.

(A MOZGÁS TANA.)

KINMEE TIKI.

THE MONKS' LAND.

KINEMATIKA.

I. A pont kinematikája.

A. ÁLTALÁNOS RÉSZ.

1. Elmozdulás (dislocatio).

14. §. *Mozgás, helyváltozás. A pont mozgása ; a pálya ; egyenes vonalú és görbe vonalú mozgás ; a mozgás iránya.*

Mozgás általánosságban a helyváltozás folyamata (5. §.).

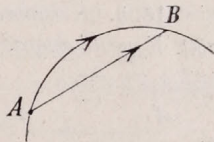
A mozgás a térben történik és időben megyen végbe ; e szerint a mozgás mérése is (8. §.) a tér és az idő segítségével történik.

A pont, mozgása közben egymásután más meg más geometriai helyzeteket foglal el, mely helyzetek, mivel a mozgás folytonos, folytonosan következnek egymásra. Ezen helyzetek összessége a pont pályáját képezi.

Ha a pálya egyenes vonal, a mozgás egyenes vonalú, ellenkező esetben görbe vonalú.

A pálya egyenes vonalú és görbevonalú részekből összetett is lehet.

A mozgás iránya az az irány, melyben a pont, bármily helyzetéből a közvetlenül rá következő helyzet felé halad ; ezért a mozgás iránya a pálya minden pontjában egybeesik a pályához húzott mindenkori érintő irányával.



1. ábra.

15. §. *Elmozdulás. Vector. Scálar. A vector három meghatározó része.*

1. Legyen A a mozgó pont helyzete t_1 időpillanatban, B a helyzet t_2 -ben (1. ábra) ; a két helyzet különbsége az elmozdulás (dislocatio) ; ez előtűntethető a két helyzetet egybekapcsoló \vec{AB} egyenes által.

Az elmozdulás tárgyalásánál eltekinthetünk attól az időköztől, a mely alatt az elmozdulás bekövetkezik, mert általános geometriai tulajdonságai az időnek tekintetbe vétele nélkül is vizsgálhatók meg és ettől függetlenek.

Az elmozdulás *nagysága* egyenlő az \overrightarrow{AB} egyenes vonal hosszával, *iránya* pedig ezen egyenes pozitív irányával.

2. Az oly mennyiséget, mely egyenes vonal hossza és iránya által teljesen meg van határozva vagy a mely ily vonal hossza és iránya által képviselhető, vector jellegű (irányított) mennyiségnek vagy *vector* (irány-) *menyiségnek*, röviden *vectornak* nevezzük. Sokszor *mértani mennyiségnek* is nevezik. Meghatározására három adat szükséges (v. ö. a 3. pontot). Ilyen vector az elmozdulás, a sebesség, a gyorsulás, az erő, a forgató nyomaték s í. t.

Evvél ellentétben az oly mennyiséget, mely iránnyal nem bír, mely már egy adat által teljesen meg van határozva, *scálar* (léptékes-) *menyiségnek* vagy röviden *scálarnak* nevezzük; ilyen a tömeg, az eleven erő, a munka, az erély s í. t.

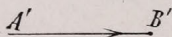
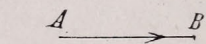
3. Az elmozdulás *e szerint vector mennyiség*; ezt ezentúl mindig egyenes vonal által fogjuk előtűntetni.

Az elmozdulást meghatározó adatok, ugyanis *hossza* és *iránya* tulajdonképen egymástól független *három* meghatározó részből állanak: a *hosszból* és *két szögből*, mely a térben lévő szilárd két irány vagy két sík és a vector iránya között foglaltatik.

Ezek helyettesíthetők más három meghatározó rész által is (pl. a vector derékszögű vetületei által, 19. §).

Jegyzet. Az elmozdulásnak a következő §§-okban megállapítandó tulajdonságai, a fent tett megjegyzés értelmében, közvetlenül érvényesek minden vectormennyiségre nézve.

16. §. *Különbség az elmozdulás és a tényleg befutott pályáiv között. Egyenlő elmozdulások.*



2. ábra.

A pont által tényleg befutott pályarész az AB ív (1. ábra), mely általánosságban véve az elmozdulástól, az \overrightarrow{AB} húrtól különbözik; ezen különbség annál kisebb lesz, mennél kisebb az ívrész, a melyre vonatkozó elmozdulást tárgyaljuk; végtelen kicsiny ívrésznél a pályarész és az elmozdulás magasabb rendű kicsinyek elhanyagolásával egybeesőnek tekinthető.

Ha két elmozdulás hossza ugyanaz és irányuk ugyanaz, vagy egymáshoz párhuzamos, akkor a két elmozdulás egyenlő. Így az \overrightarrow{AB} és az $\overrightarrow{A'B'}$ elmozdulások egyenlők (2. ábra).

17. §. *Elmozdulások (vectorok) összetevése és szétbontása (helyettesítése, egyenértékűsége). Összetevő (componens). Eredő (resultans). Az eredő az összetevőndők sorrendjétől független. Geometriai eljárás.*

Legyen a mozgó pont az A és B helyzetek között lévő C helyzetben (3. ábra).

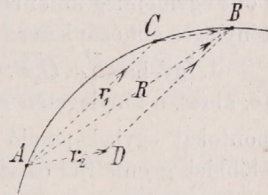
1. Az elmozdulás A -tól C -ig \vec{AC} egyenes; az elmozdulás C -től B -ig a \vec{CB} egyenes.

Úgy tekinthető az elmozdulás A -tól B -ig, mint a mely egymásra következő két elmozdulásból, ugyanis az \vec{AC} és a \vec{CB} elmozdulásokból keletkezett. Ezt írhatjuk következő egyenlet alakjában:

$$\vec{AB} \text{ elmozdulás} = \vec{AC} \text{ elmozdulás} + \vec{CB} \text{ elmozdulás} \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\text{vagy röviden:} \quad \vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

Ezen, *geometriailag* veendő egyenlet röviden azt fejezi ki, hogy az \vec{AB} elmozdulás két más elmozdulás geometriai összege gyanánt tekinthető; ezekből egyszersmind az \vec{AB} legegyszerűbb módon szerkeszthető. Ugyanis az egyik, \vec{AC} elmozdulás C végpontjától a másik, \vec{CB} elmozdulás nagyság és irány szerint vitetik fel; a két vector szabad végpontja, A és B az \vec{AB} egyenes által lesz egybekapcsolva, mely utóbbit a kettőből eredő elmozdulás.



3. ábra.

Ezen geometriai szerkesztés teljesen azonos a közönséges egyenközeny- ($ACBDA$) szerkesztéssel (v. ö. a 21. §-ot).

Az \vec{AC} -t és a \vec{CB} -t *összszetevő-* (*componens-*), a belőlük származó \vec{AB} -t *eredő* (*resultans*) elmozdulásnak nevezzük.

1a. A két összevetendő elmozdulás *sorrendje* a végeredményre nem folyhat be, mert, akár előbb történt az \vec{AC} és azután a \vec{CB} elmozdulás, akár pedig előbb az \vec{AD} (mely az \vec{CB} elmozdulással egyenlő) és azután a \vec{DB} (mely az \vec{AC} elmozdulással egyenlő), a két elmozdulás két szabad végpontja mindig az A és B . Evvel be van bizonyítva, hogy a *pont eredő elmozdulása az összevetendő elmozdulások sorrendjétől független*.

1b. Ez a két elmozdulásnak egy harmadik elmozdulássá való *összszetevésének* eljárása. Az *összszetevés* lényegében véve egy *helyettesítés*, mert az \vec{AC} és \vec{CB} elmozdulásokat *helyettesítettük a velők egyenértékű \vec{AB} elmozdulással*.

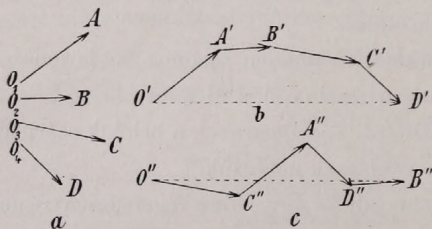
2. A megfordított eljárás szerint az \vec{AB} elmozdulást az \vec{AC} és a \vec{CB} két elmozdulásra szétbonthatjuk azaz, helyettesíthetjük az \vec{AB} elmozdulást a vele összesen egyenértékű \vec{AC} és \vec{CB} két elmozdulással. A szétbontásra nézve azonban, általánosságban, bizonyos szabadságunk van.

Ugyanis, adott két elmozdulásból mindig csak *egyetlenegy* eredő elmozdulást tehetünk össze; ellenben *egy* adott elmozdulást számtalan féle módon bonthatjuk két elmozdulásra, mert számtalan párja az egyenes vonalaknak létezik, melyek szabad két végpontja egybeesik a szétbontandó elmozdulás két végpontjával.

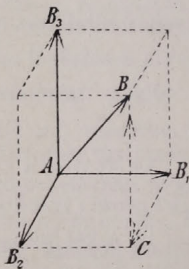
18. §. Általánosítás. Tetszőleges elmozdulások (vectorok) összevetése és szétbontása. Az elmozdulások sokszöge (a vectorok polygonja).

A megelőző §. szerkesztése általánosítható oly esetekben, melyekben bármily, különböző, de egyidejűleg fellépő okoknál fogva a pont egyidejűleg különböző elmozdulásokat szenvedne. Ekkor a pont tényleges elmozdulása az egyes elmozdulások geometriai összege lesz.

1. Így, ha $\vec{O_1A}$, $\vec{O_2B}$, $\vec{O_3C}$, $\vec{O_4D}$... volnának az egyes elmozdulások, (4. ábra), a ténylegesen származó elmozdulás az O' és D' szabad végpontokat egybekapcsoló egyenes $\vec{O'D'}$. Ezen utóbbi egyenértékű az előbbieket geometriai összegével és így ezeket helyettesítheti.



4. ábra.



5. ábra.

2. Viszont az $\vec{O'D'}$ adott elmozdulás szétbontható az egyes $\vec{O'A'}$, $\vec{A'B'}$, $\vec{B'C'}$, $\vec{C'D'}$ elmozdulásokra, azaz ezek összege által helyettesíthető. Ezek összesége csak azon feltétlen van alávetve, hogy a belőlük szerkesztett, nyitott $O'A'B'C'D'$ polygon O' és D' két végpontja egybeesék az adott $\vec{O'D'}$ elmozdulás végpontjaival; különben az egyes elmozdulások száma és helyzete tetszőleges.

Az $O'A'B'C'D'$ sokszög az elmozdulások (vectorok) polygonja; ez általánosságban térbeli sokszög.

3. Itt is egészen közömbös az eredményre nézve, mily sorrendet követünk az egyes elmozdulások összetevésénél, a polygon szabad

két végpontjának helyzete csak az oldalak hosszától és irányától függ, de nem az oldalak felrakásának sorrendjétől, a mint azt az $O'A'B'C'D'$ és az $O''C''A''D''B''$ polygonok összehasonlítása mutatja (4. ábra, b és c).

19. §. *Elmozdulások (vectorok) összetevése és szétbontása derékszögű összetevőkre. Componens tetszőleges irány szerint.*

1. Jeleljék r az \vec{AB} elmozdulás hosszát (5. ábra) és a, b, c irány-cosinusait, melyekre nézve áll $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, akkor (a Math. repertorium 43. §-a szerint) az \vec{AB} vetületei az egyes tengelyekre:

$$\vec{AB}_1 = r_x = ra; \quad \vec{AB}_2 = r_y = rb; \quad \vec{AB}_3 = r_z = rc; \quad \dots \quad (1)$$

mely vetületeket ezentúl r_x, r_y, r_z betűkkel jeleljük.

A vectorok polygonja értelmében (18. §.), az \vec{AB} egyenértékűnek tekinthető az \vec{AB}_1 , a \vec{AB}_2 , a \vec{AB}_3 elmozdulások geometriai összegével.

A szétbontás (helyettesítés) derékszögű összszerendezők szerint az általános vector-szétbontásnak az a speciális esete, melynél a vectorok polygonja egymásra merőleges három oldalból, nevezetesen $\vec{AB}_1, \vec{AB}_2, \vec{AB}_3$ -ből áll.

Az r_x, r_y, r_z mennyiségeket az elmozdulásnak az X, Y, Z összszerendezői tengelyek menti három összetevőjének vagy componensének nevezzük; ezek egyszersmind az elmozdulás vetületei az X, Y, Z tengelyekre.

Ezekből az elmozdulás számára ered:

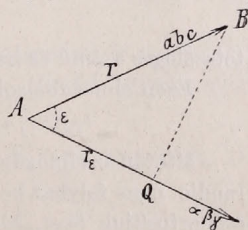
$$\left. \begin{aligned} r^2 &= r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 \\ r &= r_x a + r_y b + r_z c \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Az elmozdulás három derékszögű összetevője szintén a vectort jellemző három meghatározó rész (15. §. 3. pontja).

2. Ha az elmozdulás componensét tetszőleges irány szerint keressük, ezt a derékszögű összetevők mintája alapján azonnal megtaláljuk. Ugyanis ra az X tengely menti összetevő, hol az X tengely tetszőleges fekvésűnek választható, és a az r elmozdulás és az X iránya által bezárt szög cosinusa.

E szerint (6. ábra) az elmozdulás r_ε összetevője az elmozdulással ε szöget képező irány mentén egyenlő az elmozdulásnak ezen irány mentén képezett vetületével:

$$r_\varepsilon = r \cos \varepsilon \dots \dots \dots (3)$$



6. ábra.

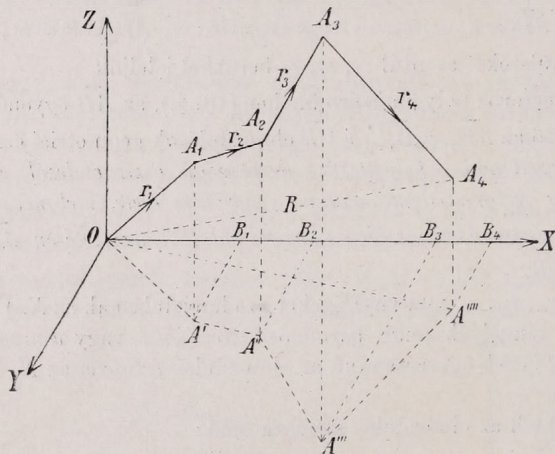
Ezen irány iránycosinusait α, β, γ betűkkel jelelve, és tekintetbe véve, hogy [Math. repertorium, 43. §. (3)] $\cos \varepsilon = a\alpha + b\beta + c\gamma$, maga az összetevő így írható:

$$r_{\alpha, \beta, \gamma} = r_{\varepsilon} = r_x \alpha + r_y \beta + r_z \gamma, \quad \dots \quad (4)$$

miáltal ezen r_{ε} vagy $r_{\alpha, \beta, \gamma}$ componens az r derékszögű összetevői és az ε irányhoz tartozó α, β, γ cosinusok által van kifejezve.

20. §. *Általánosítás. Tetszőleges elmozdulások (vectorok) össze-
tervése derékszögű componensekké. Jegyzet a helyettesítés szóra nézve.*

Jeleljék (7. ábra):



7. ábra.

$$\left. \begin{array}{l} r_1, a_1, b_1, c_1 \\ r_2, a_2, b_2, c_2 \\ \dots \dots \dots \\ r_n, a_n, b_n, c_n \end{array} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

tetszőleges számú és irányú elmozdulások hosszát és iránycosinusait.

Ezen elmozdulások derékszögű összetevői

$$r_{1x} = r_1 a_1, \quad r_{1y} = r_1 b_1; \quad r_{1z} = r_1 c_1; \text{ s i. t.}$$

Mintán az elmozdulások összetevésénél az egyes összetevők sorrendje nem folyhat be a végeredményre (18. §. 3. pontja), akként csoportosíthatjuk őket, hogy az egyirányúkat mind összefoglaljuk és összezegeiket írjuk:

$$\left. \begin{array}{l} R_x = r_{1x} + r_{2x} + \dots + r_{nx} \\ R_y = r_{1y} + r_{2y} + \dots + r_{ny} \\ R_z = r_{1z} + r_{2z} + \dots + r_{nz} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

A (2) szerint a fentebbi $r_1 \dots r_n$ elmozdulások helyett nyertünk egymásra merőleges *három* elmozdulást, R_x, R_y, R_z -t, mely az előbbi n számú elmozdulással *egyenértékű* és mely ennél fogva ezeket *helyettesítheti*.

Ezeket röviden írjuk:

$$R_x = \sum_1^n r_k a_k, \quad R_y = \sum_1^n r_k b_k, \quad R_z = \sum_1^n r_k c_k \quad \dots \quad (2a)$$

De, a megelőző §. értelmében, az itt nyert R_x, R_y, R_z elmozdulások úgy tekinthetők, mint a melyek egy R hosszúságú és A, B, C iránycosinusokkal bíró oly elmozdulás derékszögű összevetői, melyre nézve áll:

$$\left. \begin{aligned} R^2 &= R_x^2 + R_y^2 + R_z^2 \\ A &= \frac{R_x}{R}; \quad B = \frac{R_y}{R}; \quad C = \frac{R_z}{R} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Mivel az R_x, R_y, R_z a (2a) szerint ki van fejezve az egyes $r_k, a_k, b_k, c_k \dots$ mennyiségek által, ezért az *eredő elmozdulás hossza, R , és iránycosinusai, A, B, C* is ki vannak fejezve az összevető egyes elmozdulások hosszai és iránycosinusai által.

A 7. ábra előtűnteti az $\vec{OA}_4 = R$ eredőt és az

$$\vec{OB}_4 = \vec{OB}_1 + B_1 \vec{B}_2 + \vec{B}_2 \vec{B}_3 + B_3 \vec{B}_4, \text{ azaz az } R_x = r_{1x} + r_{2x} + \dots$$

összevetőt.

Jegyzet a helyettesítés szóra nézve. A következőkben, ha valamely vektort más vector vagy vectorok által helyettesítjük, ritkábban fogunk a *helyettesítés* szóval élni hanem inkább használjuk az *összevetés* és a *szétbontás* szokat, melyek egyszersmind kifejezik, hogy a helyettesítés mily *értelemben* veendő. De mindig kell szem előtt tartanunk, hogy az összevetés és a szétbontás szók csak a *helyettesíthetőség* (egyenértékűség), de *nem* a *szigorú identitás* jelentésével bírhatnak (v. ö. a 17. §-ot).

21. §. *Három ferdészögű elmozdulás (vector) analitikai összevetése. A parallelogramm (egyenközény) esete.*

1. Ha csak *három* tetszőleges r_1, r_2, r_3 nagyságú és $a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3$ irányú elmozdulás (vector) lép fel, akkor a megelőző §. (2a) és (3) formulái lesznek:

$$R_x = r_1 a_1 + r_2 a_2 + r_3 a_3, \quad R_y = r_1 b_1 + r_2 b_2 + r_3 b_3, \quad R_z = r_1 c_1 + r_2 c_2 + r_3 c_3 \quad (1)$$

és, mivel:

$$\left. \begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 1 \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 &= 1 \\ a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 &= 1 \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 &= \cos(r_2, r_3), \\ a_3 a_1 + b_3 b_1 + c_3 c_1 &= \cos(r_3, r_1), \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 &= \cos(r_1, r_2). \end{aligned} \right\} \dots \dots (2)$$

lesz :

$$R^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 2r_2 r_3 \cos(r_2, r_3) + 2r_3 r_1 \cos(r_3, r_1) + 2r_1 r_2 \cos(r_1, r_2). \quad (3)$$

Az R oly (ferdeszögű) paralelepipedon átlója, melynek egy csúcsában összefutó élei irány és nagyság szerint az r_1, r_2, r_3 elmozdulások.

Ennekivül áll :

$$\left. \begin{aligned} R_x &= AR, \\ R_y &= BR, \\ R_z &= CR \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} Aa_1 + Bb_1 + Cc_1 &= \cos(R, r_1), \\ Aa_2 + Bb_2 + Cc_2 &= \cos(R, r_2), \\ Aa_3 + Bb_3 + Cc_3 &= \cos(R, r_3), \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Szorozva az (1) egyenleteket rendre $r_1 a_1, r_1 b_1, r_1 c_1$ mennyiségekkel és összegezve őket, ered :

$$Rr_1 \cos(R, r_1) = r_1^2 + r_1 r_2 \cos(r_1, r_2) + r_1 r_3 \cos(r_1, r_3),$$

azaz :

$$\left. \begin{aligned} R \cos(R, r_1) &= r_1 + r_2 \cos(r_1, r_2) + r_3 \cos(r_1, r_3); \\ R \cos(R, r_2) &= r_1 \cos(r_2, r_1) + r_2 + r_3 \cos(r_2, r_3); \\ R \cos(R, r_3) &= r_1 \cos(r_3, r_1) + r_2 \cos(r_3, r_2) + r_3. \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

melyből az R eredő és az r_1, r_2, r_3 összetevők között levő $(R, r_1), (R, r_2), (R, r_3)$ szögek adódnak.

2. *A vectorok egyenközevénye (parallelogrammja).* Ha az r_1, r_2, r_3 közül az egyik, például r_3 zérus, a fennmaradó r_1 és r_2 a parallelogramm szabálya szerint tétetik össze (17. §. és 3. ábra).

Tekintetbe véve, hogy az idézett helyen : $\vec{AC} = r_1, \vec{AD} = r_2, \vec{AB} = R$, leszen (3) és (5)-ből :

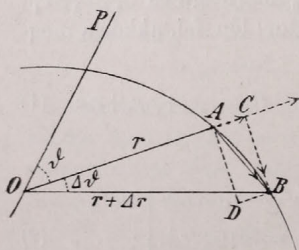
$$R^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(r_1, r_2) \quad . \quad . \quad . \quad (3a)$$

$$\left. \begin{aligned} R \cos(R, r_1) &= r_1 + r_2 \cos(r_1, r_2) \\ R \cos(R, r_2) &= r_1 \cos(r_1, r_2) + r_2 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (5a)$$

Vége a 3. ábrából (17. l.):

$$\frac{r_1}{\sin(r_2, R)} = \frac{r_2}{\sin(r_1, R)} = \frac{R}{\sin(r_1, r_2)} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

mely kettős viszony gyakran szolgál a parallelogramm ismertető jeléül.



8. ábra.

22. §. *Az elmozdulás (vector) szétbontása sík polárkoordináták szerint. Vezérsugári (radiális) és forgató (rotációs) összetevő.*

Legyen (8. ábra) \vec{AB} az elmozdulás, melyet most az O kezdőpontú, OP tengelyű polárkoordináta-rendszerre vonatkoztatunk ; ennek síkja az AOB síkba essék.

Az A öszszrendezői r, ϑ ; a B -éi $r + \Delta r, \vartheta + \Delta \vartheta$.

Az \vec{AB} elmozdulás az \vec{AC} és a \vec{CB} elmozdulások geometriai összegének tekinthető; az \vec{AC} az r vezérsugár mentén, a \vec{CB} reá merőlegesen fekszik és a vezérsugárnak O körüli, $\Delta \vartheta$ nagyságú forrásától függ, és így az elmozdulásnak

$$\left. \begin{array}{l} \text{vezérsugári (radiális) öszszetevője: } \vec{AC} = (r + \Delta r) \cos \Delta \vartheta - r; \\ \text{forgató (rotációs) öszszetevője: } \vec{CB} = (r + \Delta r) \sin \Delta \vartheta. \end{array} \right\} \quad (1)$$

23. §. Az elmozdulás (vector) szétbontása térbeli polárkoordináták (gömb-öszszrendezők) szerint.

A mozgó pont helyzete t időpillanatban legyen A ; gömbi koordinátái (Math. repertorium 41. §.) legyenek (9. ábra): $\vec{OA} = r$, $(\angle O A) \curvearrowright = \eta$, $(\angle O A_1) \curvearrowright = \vartheta$; derékszögű öszszrendezői pedig x, y, z .

$$\text{Áll: } x = r \sin \eta \cos \vartheta, \quad y = r \sin \eta \sin \vartheta, \quad z = r \cos \eta \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

A pont helyzete $t + \Delta t$ időkor legyen B ; ennek kétféle coordinátái:

$$\left. \begin{array}{l} r + \Delta r, \quad \eta + \Delta \eta, \quad \vartheta + \Delta \vartheta; \\ x + \Delta x, \quad y + \Delta y, \quad z + \Delta z. \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Az eredő \vec{AB} elmozdulás öszszetettnek tekinthető az AA' ív, az $A'A''$ ív és az $A''B$ (vagy magasabb rendűek elhagyásával az AB') egyenesből; ezekre nézve áll:

$$\left. \begin{array}{l} AA' = r \Delta \eta, \quad A'A'' = r \sin \eta \Delta \vartheta; \quad A''B = \Delta r. \\ \lim (\vec{AB})^2 = \lim \overline{AA'}^2 + \lim r^2 \overline{\Delta \eta}^2 + \lim r^2 \sin^2 \eta \overline{\Delta \vartheta}^2. \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\text{azaz: } ds^2 = dr^2 + r^2 (d\eta^2 + \sin^2 \eta d\vartheta^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3a)$$

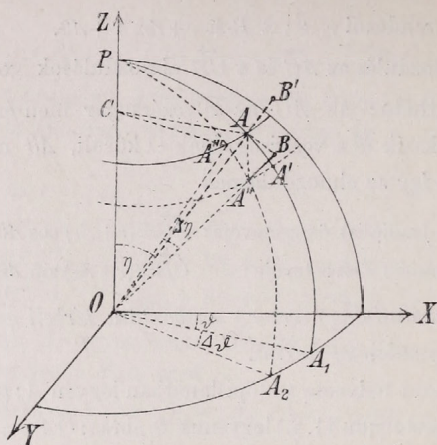
$$\text{Ezenkívül áll: } \lim AA''' = \lim r \sin (\eta + \Delta \eta) \Delta \vartheta = r \sin \eta d\vartheta = \lim A'A''.$$

A 9. ábra szerint a coordináta-tengelyek menti derékszögű vetületei

$$\begin{array}{lll} \text{az } AB' \text{-nek:} & (AB') \sin \eta \cos \vartheta, & (AB) \sin \eta \sin \vartheta, & (AB') \cos \eta; \\ \text{az } AA' \text{-nek:} & (AA') \cos \eta \cos \vartheta, & (AA') \cos \eta \sin \vartheta, & -(AA) \sin \eta; \\ \text{az } AA''' \text{-nak:} & -(AA''') \sin \vartheta, & (AA''') \cos \vartheta, & 0. \end{array}$$

E szerint az AB elemi (végtelen kicsiny) elmozdulásnak $dr, rd\eta, r \sin \eta d\vartheta$ öszszetevői rendre a következő iránycosinusokkal bírnak:

$$\left. \begin{array}{lll} a & (dr) \text{ iránycosinusai:} & \sin \eta \cos \vartheta, \quad \sin \eta \sin \vartheta, \quad \cos \eta; \\ a & (r d\eta) & \cos \eta \cos \vartheta, \quad \cos \eta \sin \vartheta, \quad -\sin \eta; \\ a & (r \sin \eta d\vartheta) & -\sin \vartheta, \quad \cos \vartheta, \quad 0. \end{array} \right\} \quad (4)$$



9. ábra.

24. §. Az elmozdulás nyomatéka (a vector momentuma); jellege, előjele és tengelye. E nyomaték vector. Tengelynyomaték.

1. Vegyük szemügyre az \vec{AB} elmozdulást és a térben tetszőleges fekvésű O pontot (10. ábra). Bocsássunk O -ból az \vec{AB} egyenesre, vagy meghosszabbítására $OM=p$ merőlegeset; akkor a

$$p \cdot \vec{AB} \dots \dots \dots (1)$$

szorzat az \vec{AB} elmozdulás nyomatéka (momentuma) az O -pontra vonatkozólag. E szorzat az O pont és az \vec{AB} vector által képezett OAB háromszög területének kétszerese; e szerint ezen nyomaték jellege (mérete) terület, síkjá pedig az OAB sík.

2. A nyomatéknak meghatározott előjele is van, ugyanis, ha azt forgással hasonlítjuk össze, a 10. ábrában feltüntetett \vec{AB} elmozdulás nyomatékának forgásiránya egybeesik az O középpontú, a rajz síkjára néző szem felé fordított számlapú óranak mutatója járásával, a mint ez a rajzban is jelezve van.

Az O ponton és az \vec{AB} vectoron át fektetett sík pozitív normálisát (Math. repertorium 45. §. 2. pontja) a nyomaték tengelyének nevezzük; a 10. ábránál a pozitív tengely (vagy a tengely pozitív iránya) a rajz felett lévő szemtől az O -felé a rajz síkjára húzott merőleges vonal iránya; de, ha az \vec{AB} vector ellenkező irányú volna, a pozitív tengely az O -ponttól a rajz fölött lévő szem felé húzott egyenes vonalnak az irányába esik.

A 10a. ábra egyszerű sémái világosan tüntetik elő a nyomaték

forgásiránya és pozitív tengelye között fennálló összefüggést; a köröknek erősebben kihúzott felei a rajz síkja előtt (fölött) fekszenek.

3. Vetítsük az AB -t az S_1OS_1 síkra (11. ábra), melynek normálisa a nyomaték tengelyével (az ABO sík pozitív normálisával) ε szöget képezzen; legyen A_1B_1 a vetület és p_1 az O -ból ennek irányára bocsátott OM_1 merőleges hossza. Az 1. pont szerint az \overline{AB} és az $\overline{A_1B_1}$ nyomatékai:

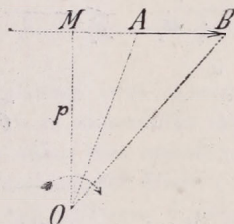
$$p \cdot \overline{AB} = 2(AOB) \text{ terület}; \quad p_1 \cdot \overline{A_1B_1} = 2(A_1OB_1) \text{ terület};$$

mivel pedig A_1OB_1 háromszög az AOB vetülete az S_1OS_1 síkra,

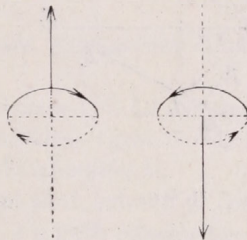
$$p_1 \cdot \overline{A_1B_1} = (p \cdot \overline{AB}) \cos \varepsilon; \dots \dots \dots (2)$$

azaz, a vector vetületének nyomatéka egyenlő a nyomaték vetületével.

E szerint valamely vector nyomatéka szintén vector; iránya a nyomaték tengelye.



10. ábra.



10a. ábra.

4. A 15. §. 2. és ezen §. 3. pontja értelmében a nyomatéket oly egyenes által lehet képviseltetni, melynek iránya a nyomaték pozitív tengelyébe esik, hosszúsága pedig egyenesen arányos a nyomaték abszolút értékével, a $[p \cdot \overline{AB}]$ szorzattal. Az így értelmezett és képviselt nyomaték a *tengelynyomaték*.

Különösen fontos a sebesség, a gyorsulás és az erő nyomatéka.

A vectornyomaték részletes vizsgálatát a sebesség nyomatéka tárgyalásánál fogjuk adni (36., 53. és 54. §§.).

25. §. Vectorpárok; nyomatékek, tengelyük.

Oly két vectort, mely értékre nézve egyenlő, előjelre (irányra) nézve ellenkező: *vectorpár*nak mondjuk. A pár e szerint mindig *egy* síkban, a *pár síkjában* fekszik.

A vectorpár nyomatéka síkjában fekvő valamely pontra nézve a két vector nyomatékának összegével egyenlő, az egyes nyomatékokat saját előjeleikkel véve.

1. Legyen (12a. ábra), $\vec{A_1B_1}$ és $\vec{A_2B_2}$ a párt alkotó két vector; legyen $\overline{M_1M_2} = p$ egymástól való merőleges távolságuk, melyet még

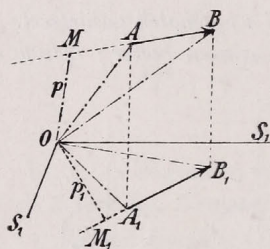
a vectorpár *karjának* is nevezik, O a pár síkjának azon pontja, melyre nézve a pár nyomatékát keressük.

A pár nyomatéka: $\overrightarrow{OM_1} \cdot \vec{A_1B_1} + \overrightarrow{OM_2} \cdot \vec{A_2B_2}$ (1)

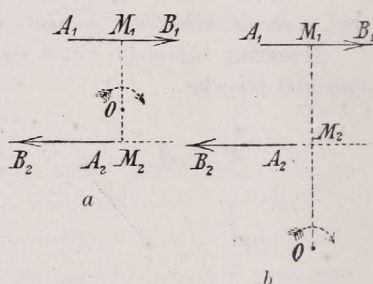
A két nyomaték előjele (12a. ábra) egyenlő; mindegyik az O körül pozitív forgásnak felel meg (10a. ábra); mivel még az $\vec{A_1B_1} = -\vec{A_2B_2}$; $\overrightarrow{OM_2} = -\overrightarrow{OM_1}$, és $\overrightarrow{M_2O} + \overrightarrow{OM_1} = p$, az (1) összegzés írható:

$$p \cdot \vec{A_1B_1} \text{, (1a)}$$

azaz: a vectorpár nyomatéka egyenlő egy vectora abszolút értékének a pár karjával való szorzatával.



11. ábra.



12. ábra.

2. Ha ugyanezen vectorpárnak nyomatékát keressük síkjának más O pontjára nézve (12b. ábra), mely nem fekszik a két vector egyenesei között, akkor ez ismét az általános

$$\overrightarrow{OM_1} \cdot \vec{A_1B_1} + \overrightarrow{OM_2} \cdot \vec{A_2B_2} \text{ (2)}$$

összezzel egyenlő.

Ámde itt is: $\vec{A_1B_1} = -\vec{A_2B_2}$, e szerint az $\vec{A_1B_1}$ nyomatéka pozitív, az $\vec{A_2B_2}$ nyomatéka negatív forgásnak előjelével bír, továbbá itt: $\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2} = p$, ezért a vectorpár nyomatéka ismét:

$$p \cdot \vec{A_1B_1} \text{ (2a)}$$

mint előbb.

Röviden: a vectorpár nyomatéka független a pár síkjában fekvő azon O pont (illetve az e síkra merőleges, e síkot O -ban metsző azon tengely) helyzetétől, melyre a nyomatékot vonatkoztatjuk.

A nyomaték előjele a $p \cdot \vec{A_1B_1}$ szorzatnak megfelelő forgása előjelével egyenlő (megelőző §.), a mint azt a 12a és b két ábra mutatja a tengelye pedig a pár síkjának az O ponton átmenő normálisa, melynek pozitív iránya a 10a. ábra sémái szerint adódik, de melynek O talppontja a megelőző megjegyzés szerint egészen tetszőleges lehet.

A vectorpároknak az az esete, melyek erőpárnak neveznek, a dynamikában nagy fontosságú.

2. Sebesség (gyorsaság, celeritas, velocitas).

26. §. *A sebesség definíciója: az elmozdulás változásának mércéje.*

A mozgó pont elmozdulása az időben általánosságban véve, folytonosan változik épen úgy, mint a pont helyzete a térben (14. §.); ha ezt a változást azon időtartamhoz viszonyítjuk, mely közben a változás beállott, nyerjük az *elmozdulás időbeli változásának mércét* vagy röviden a *mozgás mércét*, melyet ezentúl *sebességnek* (*gyorsaságnak*) nevezzük.

Hogy a sebesség ezen definíció által adott fogalmát teljes szigorúsággal felfoghassuk, részletesen fogjuk megvizsgálni az elmozdulás időbeli változását és pedig a pont mozgásának legegyszerűbb és azután általánosabb eseteinél.

27. §. *Egyenesvonalú, egyenletes mozgás. Sebességének kifejezése és jellege.*

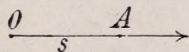
Ha valamely pont *egyenes vonalú* mozgása (14. §.) oly természetű, hogy az elmozdulás egyenlő időközökben egyenlő részekkel növekszik, akkor ezen *egyenes vonalú* mozgás *egyenletes* is.

A következőkben jelezze s a mozgó pont által befutott *út* (pályarész) *hosszát*, kifejezve *hosszegységekben*, v a pont *sebességét* és t az s befutására szükséges *időt*.

1. A jelen mozgásnál (13. ábra) az \overline{OA} elmozdulás iránya mindig egybeesik az s úthosszsz-ével.

Ha τ a t időben tartalmazott T időegységeknek száma, akkor áll [9. §. (2)] $t = \tau \cdot T$.

Továbbá, mivel a mozgó pont az s úthosszszat τ számú időegységekben futja be,



13. ábra.

az *egy* időegység alatt befutott út (vagy létesült elmozdulás) $s : \tau$, vagy még :

$$\frac{s}{t} T \dots \dots \dots (1)$$

Ezen elmozdulás mindig ugyanaz, bármily sorrendű T időegységre is vonatkoztassuk azt; e szerint itt az $s : t$ viszony is *állandó*.

Ezt az $s:t$ viszonyt a *pont sebességének* nevezzük és ezentúl v betűvel jeleljük, úgy, hogy

$$v = \frac{s}{t}, \text{ vagy: } s = vt \quad (2)$$

Az egyenletes egyenes vonalú mozgásnál a sebesség az elmozdás változásának (a befutott útnak) viszonya a hozzátartozó időközhez.

Ezért a sebesség *jellege* (mérete, 9. és 10. §.): hosszúság osztva idővel; ha V a sebesség egysége, η ezen egységek száma a v -ben, és λ az L hosszsegységek száma az s -ben, akkor lesz en:

$$v = \eta \cdot V = \frac{\lambda}{\tau} \cdot \frac{L}{T} = \frac{s}{t} \quad (3)$$

E szerint a *sebesség egysége*: $V = \frac{L}{T} \quad (3a)$

és a sebesség *számbeli értéke*: $\eta = \frac{\lambda}{\tau} \quad (3b)$

Jegyzet: Sokszor a sebességet mint az időegység alatt befutott úthosszat találjuk defineálva; ez nem helyes, mivel ezen úthossz, (1), nem a sebesség maga, mert ez utóbbi egyenlő az előbbinek az időegységhez való viszonyával és ez a sebesség szigorú mértéke.

A sebességet magát valamely hosszúság (elmozdulás) viszonya a hozzátartozó idővel adja; de az ily két különböző természetű (heterogén) mennyiség tényleges osztása lehetetlen és ezért a sebességet nem tényleg létező (reális), hanem abstract, elvont mennyiségnek kell tekintenünk, mely a kinematikai tárgyalások könnyítésére szolgál.

2. A sebesség számára ezen *egyenletes* mozgásnál talált (2) kifejezés érvényben marad, bármily nagy, vagy *bármily kicsiny* is legyen az s úthossz, ha csak t a hozzátartozó időköz; a sebességnek így nyert értéke mindig ugyanaz.

Ha a végtelen kicsiny ds útelemet tekintjük, melyet a pont dt időelem alatt fut be, a sebességnek belőlük és (2)-ből származó kifejezése:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (2a)$$

a fentírt $v = \frac{s}{t}$ értékkel egyenlő.

Ezen utóbbi megfontolás nagyon megkönnyíti a sebesség meghatározását a *görbevonalú* általános mozgásnál [29. §.].

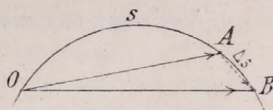
28. §. Középsebesség a nem egyenletes mozgásnál.

Nem egyenletes egyenes vonalú mozgásnál a *sebesség nem állandó*; ilyenkor bevezetjük a *középsebesség* fogalmát, mondván, hogy

ez az a sebesség, melylyel a pont, ha egyenletes mozgásban volna, pályájának bizonyos véges részét ugyanazon idő alatt írná le, a mely alatt azt nem egyenletes mozgásban tényleg leírja.

A középsebesség kifejezése :

$$v_m = \frac{s}{t} \dots \dots \dots (1)$$



14. ábra.

29. §. Az elmozdulás változása görbevonalú mozgásnál. A sebesség általános kifejezése.

Legyen $OAB \dots$ a tetszőleges görbe vonalú pálya (14. ábra) és legyen A a mozgó pont helyzete t időpillanatban, B helyzete $t + \Delta t$ -ben.

1. Az elmozdulás Δt időköz alatt átment az \vec{OA} vektorból az \vec{OB} vektorba; változását előtűntethetjük az \vec{AB} vector által, melyet mértanilag az \vec{OA} -hoz kapcsolva, az \vec{OB} származik; e szerint az \vec{AB} előtűnteti az \vec{OA} elmozdulásnak változását *nagyság* és *irány* szerint.

2. Az \vec{AB} általánosságban véve annál kisebb lesz, mennél kisebb a hozzátartozó Δt időköz; és így az

$$\frac{\vec{AB}}{\Delta t}$$

viszony is, a Δt folytonos kisebbedésénél, bizonyos véges értékű határhoz közeledik, mely a 26. §. általános definitiója értelmében, a mozgó pont *sebessége*. Ez a határérték összevág az \vec{AB} határértéknek, ds -nek a Δt határértékéhez, dt -hez való viszonyával; és így :

$$v = \frac{ds}{dt}, \dots \dots \dots (1)$$

azaz a pályáivnek az idő szerint képezett első differentiálquotiense a görbevonalú mozgás sebességével egyenlő [v. ö. a 27. §. (2a) formuláját].

30. §. A sebesség vector mennyiség; nagysága és iránya; képviseltetése, mértéke.

A sebesség (a 26. és 29. §§. szerint) az elmozdulás változásának mérve; de az elmozdulás változása szintén elmozdulás, azaz vector mennyiség; ebből következik, hogy a sebesség is oly jellegű mint a vectorok és hogy a sebesség teljes ismeretéhez annak *nagysága* és *iránya* szükséges (15. §. 3. pontja).

A sebesség nagysága a 29. §. (1) kifejezése szerint :

$$v = \frac{ds}{dt}; \dots \dots \dots (1)$$

iránya pedig, a mint az definitiójálól kitűnik, az elmozdulás változásának irányával esik egybe.

De, mivel az elmozdulás elemi változása mindig a pálya érintője mentén történik, (14. §.), a sebesség iránya a pálya minden pontjában a pályához húzott érintő irányával esik egybe. A sebességet ezentúl egyenes vonal által képviseltetjük, melynek hossza a sebesség nagyságával arányos, iránya pedig a sebesség irányával párhuzamos.

Jegyzet. A sebesség mértéke itt is ugyanaz lesz mint az egyenletes mozgásnál; ugyanis, ha ds a dt időelem alatt befutott útelem, akkor :

$$ds = v dt; \dots \dots \dots (2)$$

ha felvennők, hogy a pont mozgása a t időpillanattól kezdve egyenletessé vált volna, akkor a következő időegység közben befutott út lenne :

v -szer az időegység.

E szerint a görbevonali mozgásnál a pályának bármily pontjában a sebesség mértéke az az úthossz, melyet a mozgó pont az időegység alatt írna le, ha mozgása a nevezett pályapontban egyenletessé válnék, osztva az időegységgel; de ez az úthossz nem a sebesség maga. (V. ö. az 27. §. jegyzetét.)

31. §. A görbevonali mozgás sebességének származtatása az egyenletes mozgás sebességéből.

Válaszszuk az O pontot (14. ábra) az s pályáiv kezdőpontjául; legyen az OA húr íve s és az AB húr íve Δs .

A sebesség a Δs ív elején, az A pontban, legyen v , ellenben a Δs ív végén, a B pontban, $v + \Delta v$.

A középsebesség, v_m mindenestre elegendő tesz a következő kettős egyenlőtlenségnek :

$$v < v_m < v + \Delta v. \dots \dots \dots (1)$$

hol a 28. §. szerint
$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \dots \dots \dots (2)$$

Mennél kisebbnek választjuk a Δt időközt, annál kisebb a Δv a v -hez képest, és ha Δt átmegy a dt végtelen kicsiny időelembe, akkor Δv is átmegy a dv végtelen kicsiny növekedésbe, úgy hogy, elhanyagolva a végtelen kicsiny növekedéseket a véges mennyiségekkel szemben, származik az A helyzetben fellépő sebességre nézve :

$$\lim v_m = v \quad \text{és} \quad v = \frac{ds}{dt} \dots \dots \dots (3)$$

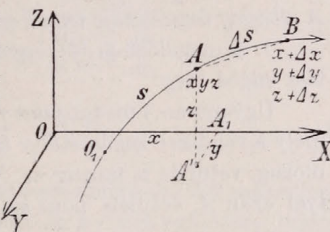
32. §. *A sebesség szétbontása egymásra merőleges három összetevőre. A componensek kifejezése koordináták segítségével.*

1. Jeleljék a, b, c a v sebességnek iránycosinusait, és v_x, v_y, v_z a sebesség derékszögű összetevőit; áll a vectorok tulajdonsága értelmében [19. §. (1) és (2)]:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= va; \quad v_y = vb; \quad v_z = vc \\ v^2 &= v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \quad \dots \\ v &= v_x a + v_y b + v_z c \quad \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Az x, y, z derékszögű koordinátákat az időnek mint független változónak függvényei gyanánt tekinthetjük; de ezeket még a pályáivnak, s -nek, függvényeiként is fejezhetjük ki.

2. Legyenek (15. ábra) az A helyzet összkendezői x, y, z , a Δt idő lefolyása után a helyzet B és koordinátái $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$. Az \vec{AB} elmozdulás derékszögű összetevői egyenlők az \vec{AB} vetületeivel a három tengelyre, azaz $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ -vel.



15. ábra.

Áll: $(\vec{AB})^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2.$

vagy: $(\frac{\vec{AB}}{\Delta t})^2 = (\frac{\Delta x}{\Delta t})^2 + (\frac{\Delta y}{\Delta t})^2 + (\frac{\Delta z}{\Delta t})^2.$

Ha Δt folytonosan fogy és a végtelen kicsiny dt -be megyen át: egyszersmind az egyenlet bal része a sebesség négyzete lesz (29. §.); jobb része pedig differentiálhányadosok négyzetei lesznek, azaz:

$$v^2 = (\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2 \quad \dots \dots \dots (2)$$

Mivel az egyenlet bal része *sebesség négyzete*, a jobb oldali tagok is *sebesség-négyzetek* lehetnek csak. Ez az egyenlet ugyanoly szerkezetű, mint a $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ egyenlet az (1)-ben.

2a. Könnyű bebizonyítani, hogy az (1) és (2) egyenletek jobb részeinek egyes megfelelő tagjai egymással egyenlők.

Ugyanis, jelelve a_1, b_1, c_1 betűkkel az \vec{AB} elmozdulás iránycosinusait, és megjegyezve, hogy Δt végtelen fogyása mellett ezeknek határértékei a pálya érintőjének, avagy a v sebességnek a, b, c iránycosinusaiba mennek át, áll:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = a_1 \frac{\overrightarrow{AB}}{\Delta t}; \quad \text{s i. t.,}$$

miből: $\frac{dx}{dt} = a_1 \lim \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{\Delta t} \right) = av = v_x \quad (3)$

és így rendre: $v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (4)$

Ezen összefüggések értelmében a *sebesség megfelelő összetevői* mint a mozgó pont illető térbeli *összrendezőinek az idő szerint képezett első differentiálhányadosai* következnek.

33. §. *A pont vetületének sebessége egyenlő a sebesség vetületével. A sebesség összetevője tetszőleges irány mentén.*

1. A megelőző §. (4) egyenletrendszere egy egyszerű következtetést enged meg.

Ugyanis az A mozgó pont vetülete az X tengelyre legyen az A_1 pont, mely a rendszer kezdetétől x távolnyira van (15. ábra). Ha az A pont mozog, vetülete is mozog az X tengely mentén; és a sebesség melylyel ezen A_1 vetületi pont az X mentén halad, az útnak az idő szerint képezett első differentiálhányadosa azaz, jelen esetünkben $\frac{dx}{dt}$. Tekintettel az idézett egyenletrendszerre, kimondhatjuk hogy a mozgó pont vetületének sebessége egyenlő az egész sebesség vetületével.

Ez a tétel egyaránt érvényes, akár tengelyekre (vonalakra), akár felületekre (síkokra) vonatkozik a vetület.

2. Ha a sebességet egy α, β, γ iránycosinusokkal bíró és a sebességgel ϵ szöget képező egyenesre akarjuk vetíteni, akkor a vector menynyiségek természete szerint a 19. §. (3) és (4) egyenletei alapján azonnal írható:

$$v_\epsilon = v \cos \epsilon, \quad (1)$$

vagy még: $v_{\alpha, \beta, \gamma} = v_\epsilon = v_x \alpha + v_y \beta + v_z \gamma. \quad (2)$

34. §. *A sebesség szétbontása sík polárkoordináták szerint. Vezérsugári (radiális) és forgató (rotációs) összetevő. Szögsebesség.*

1. A mozgó pontnak pályáját *polárösszrendezőkre* vonatkoztatjuk, de tekintettel arra, hogy a pálya általánosságban *térbeli görbe*: a *sík polárösszrendező* rendszerét csak bizonyos megszorítással lehet alkalmazni.

Ámde, midőn csak a *sebességet* és azt is csak egy időpillanatban vesszük tekintetbe, oly síkbeli rendszerrel is beérhetjük, melynek síkja a sebességet tartalmazza.

Ilyen síkban választassék a polárrendszer O kezdőpontja (8. ábra, 22. l.); továbbá a tetszőleges, szilárdnak tekintett OP polártengely; ekkor az A pont fekvése az r és ϑ összkörvázók által van adva, ellenben a B ponté $r + \Delta r$ és $\vartheta + \Delta \vartheta$ által.

$$\text{Áll:} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{AB}}{\Delta t} \right)^2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{AC}}{\Delta t} \right)^2 + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{BC}}{\Delta t} \right)^2 \quad (1)$$

Ámde (22. §. és 8. ábra)

$$\vec{AC} = (r + \Delta r) \cos \Delta \vartheta - r = -2r \sin^2 \frac{1}{2} \Delta \vartheta + \Delta r \cos \Delta \vartheta$$

$$\text{és} \quad \vec{CB} = (r + \Delta r) \sin \Delta \vartheta.$$

$$\text{E szerint:} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{AC}}{\Delta t} \right) = \frac{dr}{dt}; \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{CB}}{\Delta t} \right) = r \frac{d\vartheta}{dt}.$$

$$\text{Számazik (1)-ből:} \quad v^2 = \left(r \frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \quad (2)$$

2. Ezen egyenlet értelmében a v sebesség négyzete két más sebesség négyzetének összszége, mely két sebesség a v -nek egymásra merőleges irányú két componense.

Az első, $r \frac{d\vartheta}{dt}$, a v sebességnek az r vezérsugár irányára merőleges összzetevője, mely az A pontnak az O pont körüli forgásának sebessége, ezt a componenst v_ϑ -val jelejük; a második, $\frac{dr}{dt}$, a vezérsugár mentén fekvő összzetevő, melynek jelölése v_r . Ezen sajátáguknál fogva a v_r a vezérsugári, a v_ϑ a forgató összzetevője a sebességnek (radiális és rotációs componense); értékük:

$$\left. \begin{aligned} v_r &= \frac{dr}{dt} \\ v_\vartheta &= r \frac{d\vartheta}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

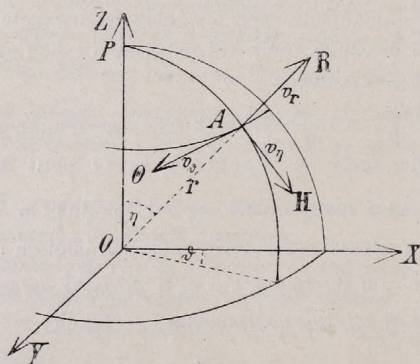
Megjegyzendő, hogy sík pályák esetében a sebesség, továbbá az r és ϑ összkörvázók valamint a nevezett két sebességi összzetevő mindig a pálya síkjában fekszenek (kivéve az esetet, ha az O kezdet a pálya síkján kívül fekvőnek választatik). Ellenben térbeli pályáknál, hol az alkalmazandó r , ϑ polárkoordinátákat és így a hozzájuk tartozó két sebességi componenst rendesen az osculáló síkba fektetjük, vagy általánosságban bármily más, a sebességet tartalmazó $R\theta$ koordinátákat választhatunk, e sík pillanatáról pillanatra más fekvésű.

3. A ϑ szög változásának mérve a hozzátartozó időhöz, a $\frac{d\vartheta}{dt}$ quotiens az r vezérsugár *szögsebessége* az O körül (vagy az O -ra vonatkoztatva); mert ez mértéke sebességnek, melylyel az r az O kezdőpont körül forog, jelölése rendesen ω .

35. §. *A sebesség szétbontása térbeli polárkoordináták (gömb-összrendező) szerint.*

1. Az \vec{AB} elemi elmozdulás a 9. ábra (24. l.) és a 23. §. (3) formulája szerint a $dr, r d\eta, r \sin \eta d\vartheta$ componensekből összetettnek tekinthető; ezért a sebesség is szétbontható

$$\left. \begin{aligned} v_r &= \frac{dr}{dt}, \\ v_\eta &= r \frac{d\eta}{dt}, \\ v_\vartheta &= r \sin \eta \frac{d\vartheta}{dt}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$



16. ábra.

összetevőkre, melyek közül v_r a vezérsugár mentén, v_η a ϑ -szögű meridián érintője mentén, v_ϑ az A -n átmenő párhuzamos kör érintőjében fekszik (16. ábra).

Ennélfogva az eredő sebesség: $v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left\{ \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \sin^2 \eta \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 \right\}$. (2)

2. A jobboldali első tag a vezérsugári sebesség, a második rész a vezérsugárra *merőleges* sebességi componens, melynek a 9. ábrában az AA'' elmozdulási összetevő felel meg; ez az utóbbi egyszersmind az r -nek O körüli forgását adja meg.

$$\text{Ezen forgás szögsebessége: } \omega = \left\{ \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 + \sin^2 \eta \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

$$\text{Ezt helyettesítve (2)-be: } v^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \omega^2 \quad (4)$$

3. A v_r, v_η, v_ϑ componensek *iránycosinusai*-ra nézve megjegyzendő, hogy a 9. és a 16. ábra szerint, a v_r az r irányával esik egybe, v_η az AA' ívelemével és v_ϑ az AA'' ívelemével; e szerint ezek az irány-cosinusok a 23. §. (4) formulájában advák.

Jegyzet: A jelen §. formulái az $\eta = \frac{1}{2}\pi$ esetben átmennek a megelőző §-éiba.

36. §. *A sebesség nyomatóka. A nyomatók jellege. A nyomatók kifejezése sík mozgásnál derékszögű- és polárkoordinátákban.*

1. A 24. §. definiíója szerint a sebesség nyomatóka valamely pontra nézve egyenlő a nevezett pontból a sebesség irányára bocsátott merőleges hosszának a sebességgel való szorzatával.

Ez a definiíó érvényes a pontnak bármily, sík vagy térbeli mozgására nézve.

Ha v a sebesség és p a nevezett merőleges hosszúsága (17. ábra), akkor

$$pv \quad (1)$$

a sebesség nyomatóka a p kezdőpontjára (az O -ra) nézve.

E nyomatók *jellege* hosszúság szorozva sebességgel, azaz hosszúság négyzete osztva idővel.

Ezen §-ban a síkbeli mozgás sebességi nyomatókával, az 53. és az 54. §-ban a térbeli-ével foglalkozunk.

2. Legyen (17. ábra) A a mozgó pont helyzete t időben, és legyenek x, y derékszögű, r, ϑ pedig polárösszrendezői.

Jeleljék a, b az $\vec{AA} = \vec{r}$ irányszögeit, l, m az $\vec{OM} = \vec{p}$ -ét; áll (a Math. repertorium 43. §. (7) formula-sémája szerint):

$$\left. \begin{aligned} p &= x \cos l + y \cos m \\ 1 &= \cos^2 l + \cos^2 m \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Továbbá, a v iránya az A pontban a görbéhez húzott érintő irányával esvén egybe, ennek iránycosinusai (u. o. az 53. §. (4) egyenlete szerint):

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \frac{dx}{ds}; & \cos b &= \frac{dy}{ds}; \\ 1 &= \cos^2 a + \cos^2 b \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Ámde (17. ábra):

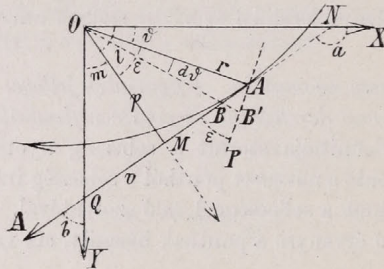
$$\begin{aligned} l &= (XOM) \angle; & m &= (YOM) \angle = \frac{1}{2}\pi - l. \\ a &= (XNA) \angle, & b &= (YQA) \angle = a - \frac{1}{2}\pi. \end{aligned}$$

Továbbá itt: $l=b$; $m=\pi-a$;

e szerint: $\cos l = \cos b = \frac{dy}{ds}$; $\cos m = -\cos a = -\frac{dx}{ds}$

Leszen a (2) első egyenletéből:

$$p = x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} = x \cos b - y \cos a \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$



17. ábra.

A sebességi komponenseket még úgy is fejezhetjük ki, hogy az x, y , (vagy az r, ϑ) öszszrendezőket az s ív függvényeinek tekintjük, az s ívet pedig a t független változótól függőnek; így:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

A sebesség nyomatékát nyerjük, ha $v = \frac{ds}{dt}$ -vel a p -nek (4) kifejezését szorozzuk. Tekintetbe véve (5)-öt, származik:

$$pv = x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = xv_y - yv_x, \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

mint ezen nyomaték kifejezése derékszögű koordinátákban.

3. Ugyanezen nyomatéknak polárkoordinátákban való kifejezésére nézve jegyezzük meg, hogy az AOM háromszögben $(AOM)\angle = \varepsilon$ (17. ábra) és

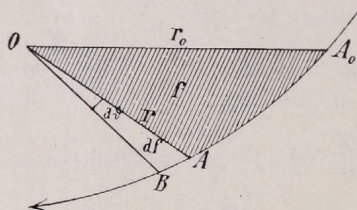
$$p = r \cos \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Az A ponton át az r vezérsugárra merőlegesen húzott AP vonal az AA -val szintén ε szöget képez, mert szárai merőlegesek az O mellett fekvő ε szög száraitra. Az OB folytatása B' -ben metszi ezt a merőlegest.

3. Az (1) és (2) szerint a megelőző §. (6) és (11) egyenletei a következő alakban írhatók:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = pv = 2 \frac{df}{dt} \dots \dots \dots (4)$$

Az f -nek az idő szerint képezett első differentálquotiense (sebessége) sokszor *felületi sebességnek* is mondatik; a sebesség nyomatéka ennek kétszeresével egyenlő.



18. ábra.

38. §. *Sebességek összetevésének kinematikai jelentése. Elemi elmozdulások összetevése. Elemi elmozdulások együttlétezése (coëxistenciája).*

1. Eddig mindig csak *egy* sebességet vettünk tekintetbe, melyet a vektormenynyiségek szabályai szerint, különböző módon bontottunk szét összetevőire, és viszont, *egy* sebességet tettünk össze a komponenseiből.

Mielőtt *több*, különböző sebességek összetevésére térnénk át, okvetetlenül szükséges, hogy gondosan megfontoljuk, hogy mit kell voltaképen több sebesség összetevése alatt értenünk és hogyan kelljen ezt kinematikai szempontból felfogni.

E célból a következőkben az elemi elmozdulásoknak oly általános tárgyalását adjuk, mely úgy a kinematikában, mint a dynamikában egyaránt fontos.

2. Ha egy pontra (vagy merev rendszerre) egyidejűleg különböző okok hatnak, melyek mindegyikének a pontnak (vagy rendszernek) bizonyos sebessége felel meg, akkor egyszerű tapasztalati szabály létezik, mely szerint az okok hatását összegezhettjük.

Ugyanis, egyszerűség kedvéért oly okokat vagy vonatkozásokat veszünk tekintetbe, melyek *végtelen kicsiny időtartam alatt végtelen kicsiny hatásokat* (itt e szerint elemi elmozdulásokat) létesítenek.

Ekkor a származó hatás eredményét úgy is nyerjük, hogy az okokat *egymásután működőknek* tekintjük; mindegyikük a pontra (vagy

a rendszerre) azon helyzetében kezd hatni, melyben a megelőző ok azt elhagyta.

Ezen eljárás, illetőleg felfogás lényege abban áll, hogy az *egyidejűleg* működő okok helyébe ugyanazon (vagy velük egyenértékű) de *egymásután* működő okokat helyettesítsük.

Az eljárás *jogosultsága* abból következik, hogy a midőn valamely ok a pontra (vagy a rendszerre) működik a mikor ez bizonyos helyzetben van és ez az ok végtelen kicsiny elmozdulást létesít, és ha ugyanezen ok a pontra (vagy a rendszerre) akkor működik, a mikor ez az előbbi helyzethez végtelen közel van, akkor a második esetben létesített elmozdulás szintén végtelen kicsiny és az előbb létesített elmozdulástól csak másodrendű kicsiny mennyiséggel különbözhetik.

Mivel ezen másodrendű végtelen kicsiny mennyiségeket, a szigor megtartása mellett is, az elsőrendű végtelen kicsinyekkel szemben teljes joggal elhanyagolhatjuk, önként következik, hogy a szigorúság megóvása mellett is, az egyidejűleg működő okokat egymásután működő ugyanily okok által helyettesíthetjük. Ezen utóbbiakat e szerint a pontra (vagy a rendszerre) azon helyzetekben tekintjük működőknek, melyek végtelen közel fekszenek azon helyzethez, a melyben a pont (vagy a rendszer) van, midőn az okok tényleg hatnak rá.

Ezt az elvet, mely a kinematikában és a mechanikában nagy fontosságú, igen termékeny és rendkívül számos alkalmazásra talál, az *elemi mozgások együttlétézése* (*coëxistentiája*) elvének nevezik.

39. §. *Sebességek összetevésének visszavezetése elemi elmozdulások (vectorok) összetevésére.*

A megelőző §-ban egyszerű szabályt állapítottunk meg a végtelen kicsiny elmozdulások összetevésére, midőn a mozgások különböző okokból erednek.

Ámde, minden ily elemi elmozdulás, legyen az pontnak vagy pontrendszernek ez elmozdulása, mindig kifejezhető a sebességnek az időelembe való szorzata által (30. §.).

Vegyünk most oly pontot tekintetbe, mely egyidejűleg fennálló különböző okoknál fogva $v_1, v_2 \dots v_n$ nagyságú és irányú sebességgel bír és e szerint dt időelem alatt $ds_1 = v_1 dt, ds_2 = v_2 dt \dots ds_n = v_n dt$ elmozdulásokat szenvedne; akkor a megelőző §. szabálya értelmében az eredő elemi elmozdulást az egyes elemi elmozdulások *geometriai összegezéséből*, összetevéséből nyerjük (17. §.).

Legyen ds ez az eredő elmozdulás; mivel ez dt időelem alatt történt, a ds -et úgy tekinthetjük, mint a mely egy egyetlen v sebesség jelenléte folytán létesült volna, melyre nézve állana: $ds = v dt$.

Ezen megfontolásból kitűnik, hogy ez a v sebesség azon tulaj-

donsággal bír, miszerint dt időelem alatt ugyanazt az elmozdulást létesíti, mint az egyes $v_1, v_2 \dots v_n$ sebességek *összesen*; ezért is a v sebesség *helyettesítheti* a $v_1, v_2 \dots v_n$ sebességeket; a helyettesítés ezen eljárását a *sebességek összetevésének* nevezzük, és v az *eredő sebesség*.

Evvél a sebességek összetevése elemi mozgások összetevésére van visszavezetve.

Az összetevés tényleges végzésére itt nem kell új tárgyalást kezdenünk; ugyanis, a sebesség vector-menynyiség lévén, az ilyenek összetevésénél csak a vector-menynyiségek általános szabályai alkalmazandók, a mint azt különböző elmozdulások összetevésénél részletesen tettük (17—22. §§.).

3. Gyorsulás (sebesedés, acceleráció).

40. §. *A gyorsulás, definedlva mint a sebesség változásának mérése. Gyorsulás és Lassulás.*

A mozgó pont *sebessége* az idővel folytonosan változik; ha itt is oly megfontolásból indulunk ki, mint a sebességnek az elmozdulás változásából való származtatása alkalmával (26. §.), akkor új fogalomhoz, a *gyorsulás (sebesedés)* fogalmához jutunk.

A gyorsulás e szerint a sebesség változásának viszonya ahhoz az időhöz, mely közben ezen változás történt, azaz *a sebesség változásának mérre* (rövidebben: *a sebesség mérre*).

Megjegyezzük, hogy a *gyorsulás (sebesedés)* szó közvetlenül sebesség-növekedést, *lassulás* sebesség-fogyást jelent; de a következőkben kizárólagosan a *gyorsulás* szóval fogunk élni, *lassulást negatív előjelű gyorsulás* által fejezvé ki.

41. §. *A gyorsulás tetszőleges görbeconalú mozgásnál. A gyorsulás vector. Egysége. Jellege. Mértéke.*

A követendő eljárás teljesen analog a sebesség tárgyalásánál alkalmazotthoz (29. §.).

Legyen a mozgó pont két helyzete A és B (19. ábra), mely a t és a $t + \Delta t$ időeknek felel meg. Az A -ban és a B -ben fellépő sebességeket az \vec{AA} és \vec{BB} egyenes vonalak képviselik.

A sebességnek Δt időközben történt teljes változásának meghatározása céljából felrajzoljuk az azokat képviselő \vec{AA} és \vec{BB} egyeneseket egy közös Q pontból (19. ábra); ezek az \vec{QA} és \vec{QB} vectorok.

Míg a mozgó pont A -tól B -ig haladt (azaz elmozdulása \vec{OA} -ból változott OB -be), a közben sebessége \vec{QA} -ból átment \vec{QB} -be.

Ezen utóbbi változást előtünteteti az \vec{AB} vector; mert geometriailag hozzákapszolva ezt az \vec{OA} -hoz, ez utóbbiból leszen az \vec{OB} .

A változás viszonya a hozzátartozó időközkhöz:

$$\left(\frac{\vec{AB}}{\Delta t} \right); \dots \dots \dots (1)$$

ennek számlálója annál kisebb, mennél kisebb Δt , és midőn ez végtelen kicsiny időelembe megy át, a viszony vég nélkül közeledik határértékéhez, mely általánosságban véges mennyiség marad.

Ezen határérték azonban a sebesség végtelen kicsiny változásának viszonya a hozzá tartozó végtelen kicsiny időelemhez, azaz a sebesség időbeli változásának mérve, a gyorsulás maga.

Ezt φ betűvel jelelve:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{AB}}{\Delta t} \right) = \varphi \dots \dots \dots (2)$$

avagy még

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{AB}) = \varphi \Delta t \dots \dots \dots (3)$$

Az ekként származtatott gyorsulás nem csak bizonyos, meghatározott *nagysággal* bír, hanem meghatározott *iránya* is van, a melyben a *gyorsulás iránya* mindenkor *egybeesik a sebesség teljes változásának, \vec{AB} -nek határirányával.*

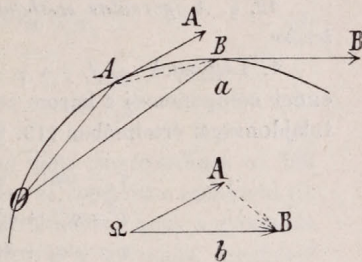
Ebből önként következik, hogy a *gyorsulás vector mennyisége* ; ezt is a következőkben *egyenes vonal* által tüntethetni elő, melynek hossza a gyorsulás nagyságával arányos, míg iránya a gyorsulás irányával párhuzamos.

A gyorsulás *jellegének* megállapítása végett legyen $\Delta \tau$ (mely nem tartozik a 20. ábrához) az \vec{AB} sebesség-növekedésben tartalmazott V egységek száma (27. §. 1. pontja) és $\Delta \tau$ a Δt időközben tartalmazott T időegységek száma; végre Φ a gyorsulás egysége, ψ ezen egységek száma a φ -ben; áll

$$\varphi = \psi \Phi = \frac{V}{T} \cdot \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\Delta \tau}{\Delta t} \dots \dots \dots (4)$$

E szerint:

$$\Phi = \frac{V}{T} = \frac{L}{T^2} \dots \dots \dots (5)$$



19. ábra.

a gyorsulás egysége; *jellege (mérete)* ennél fogva *hosszsúság osztva idő négyzetével*. Miután ez az osztás lehetetlen, a gyorsulást szintén csak elvont fogalomnak kell tekintenünk (v. ö. a 27. §. *Jegyzetét*, 28. l.).

Jegyzet: A gyorsulás *mértékére* nézve (v. ö. a 30. §. *jegyzetét*) kimondjuk, hogy a *gyorsulás mértéke* a pálya tetszőleges pontjában a sebességnek azon teljes (nagyság és irány szerinti) változása, mely az időegység alatt bekövetkeznék, ha ezen változás a tárgyalt pályapontban nagyság és irány szerint állandóvá válnék, osztva még az időegységgel; azonban, a sebességváltozás *nem* a gyorsulás maga.

42. §. *A gyorsulás szétbontása egymásra merőleges három összetevőre.*

1. Legyenek α, β, γ a φ gyorsulás iránycosinusi és $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ ennek componensei a három koordináta-tengely mentén; a vectorok tulajdonságai értelmében (19. §.) áll

$$\left. \begin{aligned} \varphi_x &= \alpha\varphi; & \varphi_y &= \beta\varphi; & \varphi_z &= \gamma\varphi \\ \varphi^2 &= \varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 \\ \varphi &= \alpha\varphi_x + \beta\varphi_y + \gamma\varphi_z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

2. Könnyű a gyorsulás összetevőit a sebesség componenseiből képezni.

Ugyanis (20. ábra) az \vec{OA} sebesség derékszögű összetevőit

$$v_x, \quad v_y, \quad v_z;$$

ellenben a Δt -idő múlva fellépő \vec{OB} sebesség megfelelő componensei:

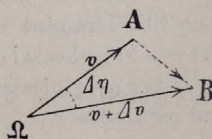
$$v_x + \Delta v_x, \quad v_y + \Delta v_y, \quad v_z + \Delta v_z.$$

E szerint az \vec{AB} sebességi változás derékszögű vetületei rendre:

$$\Delta v_x, \quad \Delta v_y, \quad \Delta v_z;$$

hol: $(\vec{AB})^2 = \Delta v_x^2 + \Delta v_y^2 + \Delta v_z^2;$

vagy: $\left(\frac{\vec{AB}}{\Delta t}\right)^2 = \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v_y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v_z}{\Delta t}\right)^2.$



20. ábra.

Átmenve a határértékre, származik [41. §. (2)]:

$$\varphi^2 = \left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_z}{dt}\right)^2 \dots \dots \dots (2)$$

Az egyenlet *bal* része *gyorsulás négyzete*, ezért a jobboldali tagok is csak gyorsulás-négyzeteket jelenthetnek.

2a. A (2) ugyanolyan szerkezetű, mint az (1) alatti $\varphi^2 = \varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2$ egyenlet. Hátra van még annak kimutatása, hogy az egyenletek jobb részeinek megfelelő tagjai is egymással rendre egyenlők.

Jelevé $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ -el az \vec{AB} sebesség-változásnak iránycosinusát, akkor a Δt végtelen kisebbedése mellett ezek határértékei átmennek a φ -nek α, β, γ , iránycosinusai értékébe, azaz:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha_1 = \alpha; \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \beta_1 = \beta; \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \gamma_1 = \gamma.$$

Nyerjük:

$$\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{\vec{AB}}{\Delta t} \cdot \alpha_1 \quad \text{s i. t.,}$$

miből (1) szerint

$$\frac{dv_x}{dt} = \alpha \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{AB}}{\Delta t} \right) = \alpha \varphi = \varphi_x \quad \dots \quad (3)$$

és így:

$$\varphi_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad \varphi_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad \varphi_z = \frac{dv_z}{dt}, \quad \dots \quad (4)$$

szóval: a gyorsulás összetevői a sebesség illető összetevőinek az idő szerint képezett első differenciálhányadosaival egyenlők; ezenkívül itt is áll a vectorok általános tulajdonsága értelmében, hogy a gyorsulás $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ összetevői egyszersmind egyenlők a gyorsulás megfelelő vetületeivel az összzrendezői tengelyekre.

43. §. A gyorsulás derékszögű összetevői kifejezve az összzrendezőiből. A vetület gyorsulása egyenlő a gyorsulás vetületével. Tetszőleges componens.

1. Helyettesítve a meglévő §. (4) egyenleteibe a v_x, v_y, v_z -nek a koordinátákból alkotott értékeit (a 32. §. (4) formulája), azonnal ered:

$$\varphi_x = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad \varphi_y = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad \varphi_z = \frac{d^2z}{dt^2} \quad \dots \quad (1)$$

azaz, a gyorsulás összetevői egyenlők a mozgó pont megfelelő összzrendezőinek az idő szerint képezett második differenciálhányadosaival.

2. Az egyenletek még más egyszerű interpretációt is engednek meg.

Ugyanis a mozgó A pont vetülete az X tengelyre az a pont, mely e tengelyen a rendszer kezdőpontjától x távolnyira van (15 ábra). Az A mozgása folytán a vetülete is mozog az X tengely mentén, és pedig $\frac{dx}{dt} = v_x$ sebességgel; gyorsulása a sebességnek az idő szerint képezett első differenciálquotiense, azaz φ_x .

Tekintettel a meglévő §. (1) alatti: $\varphi_x = \alpha\varphi$, $\varphi_y = \beta\varphi$, $\varphi_z = \gamma\varphi$, egyenleteire, ezen tulajdonságot úgy fejezhetjük ki: a mozgó pont vetületének gyorsulása egyenlő a gyorsulásnak megfelelő vetületével.

3. A gyorsulás vetülete valamely λ, μ, ν iránycosinusokkal bíró egyenesre, mely a φ irányával ε szöget képez, a vector menynyiségek természete szerint [19. §. (4)]:

Ezen értékeket helyetteszük az (1)-ből származó

$$\varphi_{\lambda, \mu} = \lambda \varphi_x + \mu \varphi_y \quad (1a)$$

formulánkba; némi összevonás után lesz:

$$\varphi_{\lambda, \mu} = M (\lambda \cos \vartheta + \mu \sin \vartheta) + N (\mu \cos \vartheta - \lambda \sin \vartheta) \quad . . . (1b)$$

Alkalmazzuk (1_b-t) a gyorsulásnak az r szerint s az arra merőleges irány szerint vett összetevő kiszámítására.

1. Az r szerint vett componensnek, φ_r -nek számításánál a λ és μ jelentik az r -nek λ_1 és μ_1 *iránycosinusait* az XY síkban, hol (21. ábra) az irányszögek ϑ és $\frac{1}{2}\pi - \vartheta$; e szerint itt:

$$\lambda_1 = \cos \vartheta, \quad \mu_1 = \sin \vartheta \quad (3)$$

Helyetteszve ezeket az (1_b) formulába, a $\varphi_{\lambda_1, \mu_1} = \varphi_r$ értéke:

$$\varphi_r = M \quad (4)$$

2. Az r -re *merőleges* irány szerint vett összetevőnek, φ_g -nek számításánál *positív* iránynak tekintjük azt, a melynek mentén a ϑ szög *növekszik*, azaz, az \vec{AG} irányt (21. ábra), melynek λ_2, μ_2 az iránycosinusai; irányszögei az XY síkban az ábra szerint $\frac{1}{2}\pi + \vartheta$ és ϑ ; ezért:

$$\lambda_2 = -\sin \vartheta, \quad \mu_2 = \cos \vartheta \quad (5)$$

Helyetteszve ezeket az (1_b) formulába, a $\varphi_{\lambda_2, \mu_2} = \varphi_g$ értéke:

$$\varphi_g = N \quad (6)$$

Az N a (2)-ből még írható:

$$N = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\vartheta}{dt} \right).$$

E szerint, a szögsebesség $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$ jelölését is felhasználva, a gyorsulás keresett két összetevője:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_r &= \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \omega^2 \\ \varphi_g &= \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\vartheta}{dt} \right) = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \omega) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Megegyezésben a sebesség megfelelő componenseivel (34. §.) a φ_r -t a *vezérsugári* (radális) és φ_g -t a *forgató* (rotációs) *gyorsulási összetevőnek* nevezzük.

3. Analog elnevezéssel, mint a 34. §. végén bevezetett szögsebességgével, *szöggyorsulásnak* mondjuk a ϑ szögnek az idő szerint képezett második differenciálquotiensét, $\frac{d^2 \vartheta}{dt^2}$ -t.

45. §. A gyorsulás szétbontása térbeli polárkoordináták (gömb-összszrendezők) szerint.

Bevezetve a 23. és 35. §§-okban használt polárkoordináta-rendszert,

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \eta \cos \vartheta \\ y &= r \sin \eta \sin \vartheta \\ z &= r \cos \eta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

A sebesség componensei az X , Y -, Z -tengelyek mentén: *

$$\left. \begin{aligned} v_x &= x' = r' \sin \eta \cos \vartheta + r\eta' \cos \eta \cos \vartheta - r\vartheta' \sin \eta \sin \vartheta \\ v_y &= y' = r' \sin \eta \sin \vartheta + r\eta' \cos \eta \sin \vartheta + r\vartheta' \sin \eta \cos \vartheta \\ v_z &= z' = r' \cos \eta - r\eta' \sin \eta \end{aligned} \right\} \dots \dots (2)$$

A gyorsulás összetevői ugyanezen irányok mentén:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_x &= x'' = r'' \sin \eta \cos \vartheta + r\eta'' \cos \eta \cos \vartheta - r\vartheta'' \sin \eta \sin \vartheta + \\ &\quad + 2r'\eta' \cos \eta \cos \vartheta - 2r'\vartheta' \sin \eta \sin \vartheta - 2r\eta'\vartheta' \cos \eta \sin \vartheta - \\ &\quad - r\eta'^2 \sin \eta \cos \vartheta - r\vartheta'^2 \sin \eta \cos \vartheta; \\ \varphi_y &= y'' = r'' \sin \eta \sin \vartheta + r\eta'' \cos \eta \sin \vartheta + r\vartheta'' \sin \eta \cos \vartheta + \\ &\quad + 2r'\eta' \cos \eta \sin \vartheta + 2r'\vartheta' \sin \eta \cos \vartheta + 2r\eta'\vartheta' \cos \eta \cos \vartheta - \\ &\quad - r\eta'^2 \sin \eta \sin \vartheta - r\vartheta'^2 \sin \eta \sin \vartheta; \\ \varphi_z &= z'' = r'' \cos \eta - r\eta'' \sin \eta - 2r'\eta' \sin \eta - r\eta'^2 \cos \eta \end{aligned} \right\} (3)$$

A gyorsulásnak összetevőit a vezérsugar, a meridiánkör és a párhuzamos kör mentén, ugyanis φ_r , φ_η -, φ_ϑ -t a 19. §. (4) formulája:

$$\varphi_{\lambda, \mu, \nu} = \lambda \varphi_x + \mu \varphi_y + \nu \varphi_z = \lambda x'' + \mu y'' + \nu z'' \dots \dots \dots (4)$$

szerint nyerjük, ha benne x'' , y'' , z'' helyébe a (3) kifejezéseket tesszük és a λ , μ , ν iránycosinusok helyébe rendre a nevezett három irány-éit helyetteszük, melyek a 23. §. (4) szerint a következők:

$$\left. \begin{aligned} a \quad (dr) \quad \text{iránycosinusai:} & \quad \sin \eta \cos \vartheta, \quad \sin \eta \sin \vartheta, \quad \cos \eta \\ a \quad (rd\eta) \quad \text{''} & \quad \cos \eta \cos \vartheta, \quad \cos \eta \sin \vartheta, \quad -\sin \eta \\ a \quad (r \sin \eta d\vartheta) \quad \text{''} & \quad -\sin \vartheta, \quad \cos \vartheta, \quad 0 \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

Csekély összevonások után nyerjük:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_r &= \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left\{ \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 + \sin^2 \eta \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \right\} \\ \varphi_\eta &= \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\eta}{dt} \right) - r \sin \eta \cos \eta \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \\ \varphi_\vartheta &= \frac{1}{r \sin \eta} \frac{d}{dt} \left(r^2 \sin^2 \eta \frac{d\vartheta}{dt} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

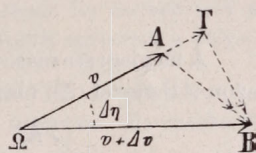
* A ' jel az idő szerint képezett differentióliquotienset jelent.

Jegyzet: Ha $\eta = \frac{1}{2}\pi$ és állandó, akkor a (6) formulák átmennek a megelőző §. (7) formuláiba.

46. §. *A gyorsulás szétbontása érintő és deréklő (tangenciális és normális) összetevőkre.*

1. Kiindulunk a gyorsulás megállapításánál használt tárgyalásunkból (41. §.).

A sebességnek Δt időelem alatt történt teljes változását rajzunkban (22. ábra) az \vec{AB} vector tünteti elő, melylyel egyidejűleg a $\Delta\eta^*$ irányváltozás következtet be. (Az \vec{AB} mindig a pálya mindenkoros osculáló síkjában fekszik, l. az 51. és 52. §§-okat).



22. ábra.

Az \vec{AB} vectort helyettesíthetni az $\vec{A\Gamma}$ és a $\vec{\Gamma B}$ két vector által, melyek elseje, a v sebesség mentén, annak folytatásában, másika pedig az arra merőleges irányban fekszik.

$$\text{Áll:} \quad \left(\frac{\vec{AB}}{\Delta t}\right)^2 = \left(\frac{\vec{A\Gamma}}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\vec{\Gamma B}}{\Delta t}\right)^2 \quad \dots \quad (1)$$

$$\text{hol:} \quad \vec{A\Gamma} = (v + \Delta v) \cos \Delta\eta - v; \quad \vec{\Gamma B} = (v + \Delta v) \sin \Delta\eta.$$

$$\text{Ebből:} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{A\Gamma}}{\Delta t}\right) = \frac{dv}{dt}; \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{\Gamma B}}{\Delta t}\right) = v \frac{d\eta}{dt};$$

és így az (1)-ből:

$$\varphi^2 = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + v^2 \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 \quad \dots \quad (2)$$

A gyorsulás e szerint két componensből alkotottnak tekinthető, az egyik, $\frac{dv}{dt}$, a sebesség mentén azaz a pályához húzott érintőben fekszik; a másik, $v \frac{d\eta}{dt}$, arra merőlegesen, azaz a pályára emelt mindenkoros normális mentén fekszik (mely az 51. és 52. §§. szerint a pálya főnormális).

Ezen összetevők, nevezett sajátságuknál fogva, *tangenciális* és *normális gyorsulási componenseknek* neveztetnek és φ_t és φ_n -betűkkel jeleltetnek, úgy, hogy

$$\left. \begin{aligned} \varphi_t &= \frac{dv}{dt} \\ \varphi_n &= v \frac{d\eta}{dt} \end{aligned} \right\} \dots \quad (3)$$

* Az η jelentése itt a megelőző §-étől különböző, de a 20. ábráéval egyező.

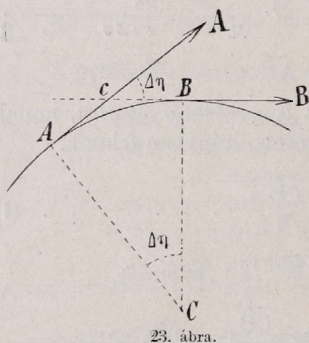
Szerkezetük a sebesség vezérsugári és forgató összetevőivel analog [34. §. (3)].

2. E gyorsulási összetevők elseje a pályáivnek az idő szerint képezett második differenciálhányadosa által, a második pedig a sebesség és a pálya görbületi sugara által fejezhető ki.

A megjegyzés első része a 30. §. (1) alatti $v = \frac{ds}{dt}$ egyenletéből folyik; e szerint:

$$a_t = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

A megjegyzés második részére vonatkozólag, vizsgáljuk a pályának azon AB részét (23. ábra), melyet a mozgó pont Δt idő közben befut.



Egyszerűség kedvéért vegyük fel, hogy az AB ív sík;* ekkor az A és a B pontokhoz húzott érintők is a rajz síkjában fekszenek, és mivel irányaik az A , illetve B pontban fellépő sebességek irányával esnek egybe: a két érintő iránykülönbsége egyenlő a $\Delta\eta$ szöggel (23. ábra).

Emelünk a pálya A és B pontjain normálisakat; ezek egymást C pontban és pedig $\Delta\eta$ szög alatt fogják metszeni.

Az AB ív általánosságban véve *kicsiny* ív legyen; ezért az AC és az BC hosszak is csak kicsiny hosszszkülönbséget mutatnak. Mennél kisebb a Δt időköz, annál közelebb lesz a nevezett két hosszúság egymáshoz, és annyival nagyobb közelítéssel tekinthető az AB ív oly körűnek, melynek középpontja a C pont határhelyzete és melynek sugara az AC hossz határértéke, azaz a görbe vonalnak A pontra vonatkozó görbületi sugara, ρ (Math. repertorium 55. §.).

Írhatjuk e szerint:

$$\lim. \left(\frac{AC \cdot \Delta\eta}{\Delta t} \right) = \rho \frac{d\eta}{dt};$$

másrészt pedig:

$$\lim. \left(\frac{AC \cdot \Delta\eta}{\Delta t} \right) = \lim. \left(\frac{AB \cdot v}{\Delta t} \right) = \frac{ds}{dt} = v;$$

ebből származik:

$$v = \rho \frac{d\eta}{dt}, \quad \text{vagy:} \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{v}{\rho} \quad \dots \quad (4)$$

* A szigorú bebizonyításból, melyet az 51. és 52. §§-ok tartalmaznak, következik, hogy ezen egyszerű tárgyalás eredménye a pálya mindenkor osculáló síkjára nézve szigorúan érvényes.

Helyetteszve ezen értéket φ_n (3) kifejezésébe, ebben csak v és ρ fog fellépni és így a két componens :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_t &= \frac{d^2 s}{dt^2} \\ \varphi_n &= \frac{v^2}{\rho} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

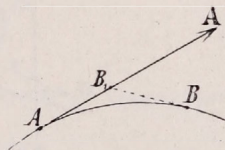
1. *Jegyzet az egyenesvonalú mozgásra nézve.* Ha a pálya egyenesvonalú, a görbületi sugár végtelen nagy és φ_n zérus. Ily esetben csak a *tangentiális* gyorsulás marad fenn, mely mindenütt egybeesik a pálya, azaz a mozgás irányával.

2. *Jegyzet az egyenletes körmozgásra nézve.* Ha a pálya kör, a görbületi sugár állandó és egyenlő a körnek a sugarával. Ha ezenkívül még a mozgás egyenletes, akkor a $v = \frac{ds}{dt}$ sebesség is állandó és akkor φ_t zérus lesz, míg a fennmaradó *normális* gyorsulás állandó, nevezetesen $\frac{v^2}{a}$ értékű és mozgás közben mindig a középpont felé van irányítva (centripetális gyorsulás).

47. §. A deviáció (eltérés) fogalma. Értékének megállapítása.

1. A mozgó pont t időben A helyzetben legyen (24. ábra), Δt időköz múlva B helyzetben.

A -ban a sebessége AA érintő mentén fekszik; ha A helyzetben a gyorsulás megszűnnék, akkor a pont egyenletes sebességgel haladna tovább és Δt idő alatt B_1 helyzetbe jutna.



24. ábra.

De mivel a gyorsulás tényleg nem zérus, a mozgó pont tényleg nem B_1 , hanem B helyzetbe jut.

Ezen két helyzet különbségét a B_1B távolság adja meg, mely vector jellegű és melyet nevezett tulajdonságánál fogva *deviációnak*, *eltérésnek* neveznek.

2. Ennek analytikai meghatározása a következő.

Az A pont derékszögű összszerendezői x, y, z ; az \vec{AB}_1 vector hossza szigorúan egyenlő $v\Delta t$ szorzattal; derékszögű vetületei :

$$v_x \Delta t, \quad v_y \Delta t, \quad v_z \Delta t, \quad \text{azaz:} \quad \frac{dx}{dt} \Delta t; \quad \frac{dy}{dt} \Delta t; \quad \frac{dz}{dt} \Delta t;$$

e szerint a B_1 pont összszerendezői szigorúan :

$$x + \frac{dx}{dt} \Delta t, \quad y + \frac{dy}{dt} \Delta t, \quad z + \frac{dz}{dt} \Delta t \quad \dots \quad (1)$$

Ellenben, a mozgó pontnak Δt idő múlva tényleg elért helyzete a B pont; ennek koordinátái TAYLOR sora értelmében írhatók fel, nevezetesen:

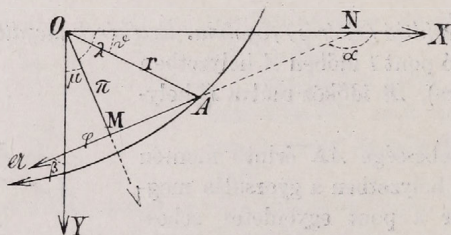
$$\left. \begin{aligned} x + \frac{dx}{dt} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2x}{dt^2} \Delta t^2 + \dots; \quad y + \frac{dy}{dt} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2y}{dt^2} \Delta t^2 + \dots; \\ z + \frac{dz}{dt} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2z}{dt^2} \Delta t^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Ezekből levonva a B_1 pont összszerendezőit, származik:

$$(\overline{B_1 B})^2 = \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2} \right)^2 \right\} \Delta t^4 + \dots \quad (3)$$

Ha Δt a végtelen kicsiny dt időelembe megyen át, a $B_1 \vec{B}$ helyzetkülönbség átmegyén (harmad- és magasabbrendű csekély elmozdulások elhanyagolásával) a *deviáció*-ba, melyet ezentúl δ -val jelezünk; értéke [42. §. (2)]:

$$\delta = \frac{1}{2} \varphi (dt)^2 \quad (4)$$



25. ábra.

E szerint a *deviáció vector*; értéke a *gyorsulás felének* az időelem négyzetébe való szorzatával egyenlő; vetületei:

$$\delta_x = \varphi_x (dt)^2; \quad \delta_y = \varphi_y (dt)^2; \quad \delta_z = \varphi_z (dt)^2, \quad \dots \quad (4_a)$$

miből kitűnik, hogy a *deviáció iránya* a *gyorsulás irányával* esik egybe.

48. §. A gyorsulás nyomatéka. A nyomaték kifejezése sík mozgásnál. Felületi gyorsulás.

A 24. §. szerint valamely pontból a gyorsulás irányára bocsátott merőleges hosszának a gyorsulás értékével (nagyságával) való szorzata egyenlő a gyorsulásnak az említett pontra vonatkozó nyomatékával. Ha φ a gyorsulás, π pedig az O -ból reá bocsátott merőleges hossza (25. ábra), akkor a nyomaték:

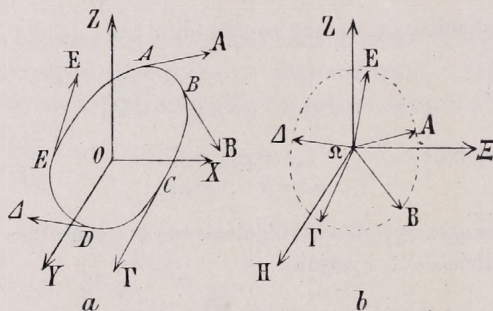
$$\pi \varphi \quad (1)$$

49. §. Különböző gyorsulások összetevésének kinematikai jelentése. Az összetevés a vektorok szabályai szerint történik.

A megelőző 42—46. §§-okban csak egy gyorsulást bontottunk szét összetevőire, illetőleg egy gyorsulást tettünk össze az összetevőiből, alkalmazva a vector menynyiségek közönséges szabályait.

Több, különböző gyorsulás összetevését ugyanolyan módon kell kinematikai szempontból felfogni, mint különböző sebességek összetevését (38. §.).

Itt is alkalmazhatjuk az elemi elmozdulások összetevésénél kimondott elvet (38. §.).



26. ábra.

Jeleljék $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_k, \dots \varphi_n$ azokat az egyes gyorsulásokat nagyság és irány szerint, melyek a pontra (vagy a rendszerre) egyidejűleg ható okoknak megfelelnek; az egyes hozzátartozó $v_1, v_2 \dots v_k, \dots v_n$ sebességeknek dt időelem alatt bekövetkező teljes (irány és nagyság szerinti) elemi változásai:

$$\varphi_1 dt, \quad \varphi_2 dt \quad \dots \varphi_k dt, \quad \varphi_n dt.$$

Ezen elemi változások geometriai összege az eredő sebességnek teljes elemi változása.

Ezt az utóbbi változást még úgy is foghatjuk fel, mint ha az egy bizonyos, és meghatározott φ értékű gyorsulás által ugyancsak dt időelem alatt létesült volna, úgy, hogy φdt egyenlő volna az egyes $\varphi_k dt$ menynyiségek geometriai összegével.

Kitűnik ebből, hogy a midőn φ az egyes φ_k vektorok geometriai összege, akkor a φ gyorsulás helyettesítheti az egyes φ_k gyorsulásokat; röviden és más szóval: a φ leszzen a φ_k összetevéséből származó eredő gyorsulás.

Az összetevés tényleges végrehajtásánál a vector menynyiségek általános szabályai érvényesek (17—22. §§.).

4. A térbeli mozgás sebességének és a gyorsulásának néhány általános tulajdonsága.

50. §. *Hamilton hodographja (sebességi görbéje).*

1. Tetszőleges térbeli pályán mozgó pontot vegyünk tekintetbe, melynek $A, B, C, D, E \dots$ helyzeteiben a megfelelő sebességei $\vec{AA}, \vec{BB}, \vec{CC}, \vec{DD}, \vec{EE} \dots$, (26. ábra, a).

Ha ezen sebességeket egy közös O pontból felrajzoljuk, akkor az egyes $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OD}, \vec{OE}$, s i. t. sebességeket úgy tekinthetjük, mint az O pontból húzott vezérsugarakat (26. ábra, b).

Az eljárást a pálya minden egyes pontjában fellépő sebességre terjesztve ki, az O -ból induló végtelen sok sugarat nyerünk, melyek végpontjai egymáshoz végtelen közel fekszenek és így folytonos görbét alkotnak. Ez zárt görbe, ha a pálya kezdő- és végpontjában a sebesség ugyanaz vagy geometriailag egyenértékű.

Ezen görbét *Hamilton hodographjájának*, sokszor és pedig helyesen *sebességi görbének* nevezik.

A tényleges pályán mozgó pont minden A helyzetének megfelel a hodographban egy A helyzet; e szerint a pályában történő tényleges mozgásnak megfelel a hodographban (képzeletileg) történő mozgás, mely az előbbivel a legegyszerűbb összszefüggésben van.

Ugyanis az A pont sebességét képviseli a hodograph \vec{OA} vezérsugara irány és nagyság szerint; ezért a pálya bármily pontjához tartozó sebességet az ismertnek tekintett hodograph segítségével azonnal nyerjük, ha a pályához az A pontban húzott érintőhöz *párhuzamosan* húzunk egy vezérsugarat a hodographban; e vezérsugár a keresett sebesség.

Továbbá, a hodographban az \vec{AB} elmozdulás képviseli a sebesség teljes változását az eredeti pályában, ezért (42. §.) a hodographban képzeletileg mozgó pont *sebessége* egyenlő az eredeti pályában mozgó pontnak irány és nagyság szerinti teljes *gyorsulásával*.

Mivel a hodographban a sebesség mindenütt az *érintő* mentén van, azért a pálya bármily A pontjában uralkodó gyorsulás a hodograph megfelelő A pontjához húzott *érintő* mentén, illetve ahoz párhuzamosan fekszik.

2. A hodograph tulajdonságai analitikai úton is azonnal következnek.

Jeleljék x, y, z a tényleg mozgó A pont összsz rendezőit, s a pálya véges ívrészét; ξ, η, ζ pedig a hodographban képzeletileg mozgó A pont-ét, vonatkoztatva az O kezdőpontra, és σ a hodograph megfelelő ívrészét (26. ábra a és b).

Megállapodásunk szerint:

$$\xi = \frac{dx}{dt}, \quad \eta = \frac{dy}{dt}, \quad \zeta = \frac{dz}{dt} \quad \dots \quad (1)$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \quad \dots \quad (2)$$

Továbbá, a hodographban képzeletileg mozgó **A** pont sebességi összetevői:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \quad \dots \quad (3)$$

és a tényleges gyorsulás négyzete:

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = \varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 = \varphi^2 \quad \dots \quad (4)$$

Jegyzet. Legegyszerűbb esetek:

1. Ha a pont *egyenesben* mozog, a sebességek mind az egyenes mentén fekszenek és a hodograph is a pályához párhuzamos egyenes vonal (27. ábra, *a*).

Ha a mozgás ezenkívül *egyenletes*, a sebesség úgy irány-, mint nagyság szerint *állandó* lesz és a hodograph egyetlenegy pontra redukálódik, mely az állandó sebesség végpontja (27. ábra, *a*).

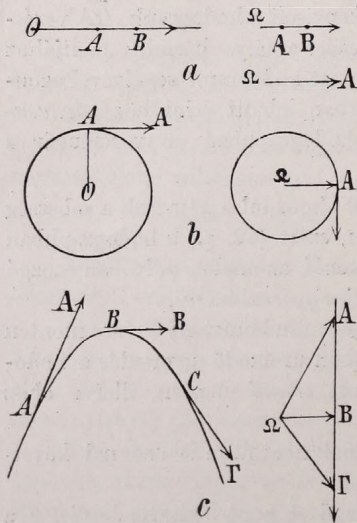
2. Ha a pont *egyenletes* sebességgel *körben* mozog, a sebessége mindig állandó értékű, de iránya mindig merőleges a vezérsugarára. A hodograph itt kör, és a benne képzeletileg mozgó pont vezérsugara a tényleg merőleges a vezérsugarára mindig merőleges (27. ábra, *b*). A hodograph köre e szerint a pálya köréhez képest mindig 90 fokkal el van forgatva; az elforgatás iránya megegyezik a tényleges mozgás irányával.

A mozgás gyorsulása itt (46. §.,

2. Jegyzet) az \vec{AO} egyenes mentén fekszik; a hodograph sebessége pedig a hodographban az **A**-hoz húzott érintő mentén, mely az \vec{AO} -hoz párhuzamos.

3. A hajtott testek mozgásánál, a föld felülete közelében a mozgás gyorsulása (eltekintve a levegő ellenállásától) csak a föld nehézségéből származó, függőlegesen lefelé irányított állandó gyorsulás; ezért a hodograph érintőjének az iránya is mindenütt függőlegesen lefelé van irányítva.

E szerint a hodograph itt függélyes egyenes vonal, melyben a képzeleti mozgás fölülről lefelé állandó sebességgel történik (27. ábra, *c*).



27. ábra.

51. §. *Térbeli görberonalú pontmozgásnál a gyorsulás mindig a pálya osculáló (simuló vagy görbületi) síkjában fekszik. Általános bizonyítás.*

1. Jeleljék a, b, c , illetve α, β, γ két egyenes iránycosinusait, η az általuk bezárt szöget magát és f, g, h a két egyenes síkjára merőleges iránynak cosinusait; ezekre nézve [a Math. repertorium 43. §. (3); 44. §. (2a) és (3) és az 45. §. (3) egyenletei szerint] áll:

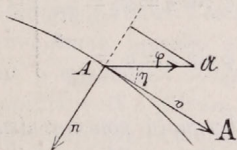
$$\cos \eta = a\alpha + b\beta + c\gamma$$

$$\sin \eta = [(b\gamma - c\beta)^2 + (c\alpha - a\gamma)^2 + (a\beta - b\alpha)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$f = \frac{b\gamma - c\beta}{\sin \eta}, \quad g = \frac{c\alpha - a\gamma}{\sin \eta}, \quad h = \frac{a\beta - b\alpha}{\sin \eta} \quad (2)$$

2. Legyen v a pont sebessége, φ a gyorsulása; e vectorok iránycosinusai, melyeket a, b, c és α, β, γ -val jeleljük, a v és φ componeisei segélyével írhatók fel, nevezetesen:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{v_x}{v} = \frac{1}{v} \frac{dx}{dt}, & b &= \frac{v_y}{v} = \frac{1}{v} \frac{dy}{dt}, & c &= \frac{v_z}{v} = \frac{1}{v} \frac{dz}{dt}; \\ \alpha &= \frac{\varphi_x}{\varphi} = \frac{1}{\varphi} \frac{d^2x}{dt^2}, & \beta &= \frac{\varphi_y}{\varphi} = \frac{1}{\varphi} \frac{d^2y}{dt^2}, & \gamma &= \frac{\varphi_z}{\varphi} = \frac{1}{\varphi} \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$



28. ábra.

A v és φ két vector síkjára merőleges egyenes iránycosinusai a (2) és (3) szerint:

$$f = \frac{y z'' - z' y''}{v \varphi \sin \eta}, \quad g = \frac{z' x'' - x' z''}{v \varphi \sin \eta}, \quad h = \frac{x' y'' - y' x''}{v \varphi \sin \eta} \quad (4)$$

míg az (1) és (3) formuláiból:

$$\left. \begin{aligned} \cos \eta &= \frac{1}{v \varphi} [x' x'' + y' y'' + z' z''] \\ \sin \eta &= \frac{1}{v \varphi} [(y' z'' - z' y'')^2 + (z' x'' - x' z'')^2 + (x' y'' - y' x'')^2]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Tekintettel a ρ görbületi sugár értékére [Math. repertorium, 73. §. (9b)], az (5)-ből

$$\sin \eta = \frac{1}{\rho} \frac{s^3}{v \varphi}; \quad (6)$$

helyetteszve ezt az értéket (4)-be, azonnal észreveszszük, hogy az f, g, h teljesen megegyezik a pálya osculáló síkja normálisának [a Math. repertorium 74. §. (2a) formulájában $\cos \varphi, \cos \chi, \cos \psi$ -vel jelelt] iránycosinusaival, azaz, a sebességet és a gyorsulást tartalmazó sík egyszersmind a pálya osculáló (görbületi vagy símuló) síkja.

Evvel be van bizonyítva, hogy *térbeli pontmozgásoknál a gyorsulás mindig az osculáló síkban fekszik, azaz a gyorsulásnak a görbületi síkra normális összetevője nincs.**

Jegyzet. A gyorsulást ezen az alapon is szétbonthatjuk tangenciális és normális összetevőire (28. ábra); szorozzuk az $\mathcal{A} = \varphi$ -t ezen czélből a $\cos \eta$ - és a $\sin \eta$ -val, lesz $\varphi_t = \varphi \cos \eta$; $\varphi_n = \varphi \sin \eta$; hol (6) szerint:

$$\sin \eta = \frac{1}{v\varphi} \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \frac{1}{\varrho} = \frac{v^2}{\varrho\varphi}.$$

Mivel (6) és (5) szerint:

$$\cos \eta = \frac{1}{2} \frac{1}{v\varphi} \frac{d}{dt} \left\{ \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right\} = \frac{1}{2} \frac{1}{v\varphi} \frac{d}{dt} \left\{ \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \right\} = \frac{1}{\varphi} \frac{d^2s}{dt^2},$$

azonnal származik, mint a 46. §. (5) egyenletében:

$$\left. \begin{aligned} \varphi \cos \eta &= \varphi_t = \frac{d^2s}{dt^2} \\ \varphi \sin \eta &= \varphi_n = \frac{v^2}{\varrho} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

52. §. *Térbeli görbevonalú pontmozgásnál a gyorsulás mindig az osculáló síkban fekszik. Egyszerűbb bizonyítás.*

A pont x, y, z koordinátáit úgy tekinthetjük, mint az s pályaa függvényeit, az s -et pedig mint a t idő függvényét.

Szabad e szerint a sebesség és a gyorsulás derékszögű vetületeit írni:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \\ v_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

* Térbeli mozgásoknál a magasabbrendű gyorsulásoknak van a görbületi síkra merőleges componensük (v. ö. a 63. §-ot).

$$\left. \begin{aligned} \varphi_x &= \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{ds^2} \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} \\ \varphi_y &= \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{ds^2} \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} \\ \varphi_z &= \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z}{ds^2} \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{dz}{ds} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

A (2) egyenletek szerkezetéből kitűnik, hogy a derékszögű componensek tulajdonképpen két gyorsulási összetevő derékszögű vetületeinekösszegéből állanak. Az egyik componens a $\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)$, melynek iránycosinuszai $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ [Math. repertorium 67. §. (3)]; ez a gyorsulás *tangentiális összetevője*. A másik $\frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$; ennek iránycosinuszai, mint a (2) egyenletek jobboldali első tagjainak megtekintése adja: $\rho \frac{d^2x}{ds^2}$, $\rho \frac{d^2y}{ds^2}$, $\rho \frac{d^2z}{ds^2}$, azaz, az osculáló síkban fekvő ρ görbületi sugár iránycosinuszai [u. o. 75. §. (4)]; e szerint ez a gyorsulás *normális összetevője*. A (2) egyenletek mutatják, hogy ezen két összetevőn kívül más gyorsulási componens nincs.

Ámde, az érintő és a ρ görbületi sugár az osculáló (görbületi) síkban fekvődvén, a gyorsulásnak nem lehet e síkra merőleges összetevője, és így a gyorsulás mindig a görbületi (osculáló) síkban fekszik.

Ezen sajátága a gyorsulásnak igazolja a 46. §-ban követett azon eljárást, mely szerint a gyorsulást *tangentiális* és *normális* összetevőre bontottuk, a normális itt a pályára emelt és az osculáló síkban fekvő ρ görbületi sugár irányával, a főnormalissal esvén egybe.

Hasonlóan jogosult a gyorsulásnak *radiális* és *rotációs* componensekre való szétbontása (44. §.), mivel ott a polárösszrendezők mindig az osculáló síkban fekvőknek tekintetnek.

Jegyzet. A 43. §. (3) egyenlete:

$$\varphi_{\lambda, \mu, \nu} = \lambda \varphi_x + \mu \varphi_y + \nu \varphi_z \dots \dots \dots (3)$$

1. Szorozva a (2) egyenleteit rendre az érintőnek ezen §. szövegében említett három iránycosinuszával, és összegezve őket, származik, mivel az érintő merőleges a ρ görbületi sugárra [Math. rep. 68a. §. (1) és 75. §. (5)]:

$$\varphi_x \frac{dx}{ds} + \varphi_y \frac{dy}{ds} + \varphi_z \frac{dz}{ds} = \frac{d^2s}{dt^2} = \varphi_t \dots \dots \dots (4)$$

2. Szorozva rendre a (2) egyenleteit görbületi sugárnak ezen §. szövegében felírt iránycosinuszával és összegezve őket, lesz ugyanazon oknál fogva:

$$\varphi_x \rho \frac{d^2x}{ds^2} + \varphi_y \rho \frac{d^2y}{ds^2} + \varphi_z \rho \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{v^2}{\rho} = \varphi_n \dots \dots \dots (5)$$

3. Szorozva rendre a (2) egyenleteit az *osculáló sík normalisának* f, g, h iránycosinusaival, [Math. rep. 75. §. (4)] és összegezve őket, lesz, mivel ez a binormális mind az érintőre mind a ρ görbületi sugarra merőleges:

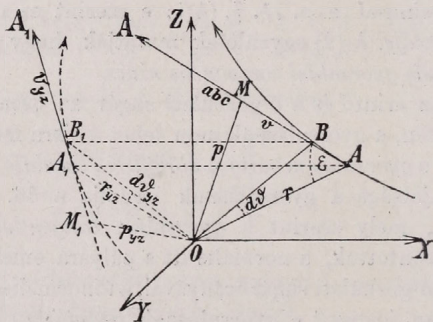
$$f\varphi_x + g\varphi_y + h\varphi_z = \varphi_b = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Ezen utolsó összefüggés szerint a *gyorsulásnak nincs összetevője a binormális mentén.*

53. §. *A sebesség nyomatéka térbeli mozgásoknál. A síkra vetített mozgások sebességi nyomatéka.*

A mozgó pont pályája térbeli görbe legyen. A görbe vetületei az YZ, ZX, XY , síkokra *síkbeli* görbéket ábrázolnak (29. ábra).

Az egyes vetületi mozgásokra és görbékre nézve a 36. és 37. §. eredményei szigorral érvényesek, ha ott mozgó pontok gyanánt a tényleg a térbeli pályán haladó mozgó pont vetületeit a koordináta-síkokra tekintjük.



29. ábra.

Akkor egyszersmind az ott használt r, v és df mennyiségek is úgy tekintendők, mint a tényleges távolság, a tényleges sebesség és a tényleg leírt felületi elem vetületei a koordináta-síkokra.

Jeleljék e szerint jelenleg $r, p, v, df, d\theta$ a *térbeli* mozgásnak az O kezdőpontra vonatkozó jellemzőit (29. ábra) és:

$$r_{yz}, r_{zx}, r_{xy}, \quad p_{yz}, p_{zx}, p_{xy}, \quad v_{yz}, v_{zx}, v_{xy}, \quad df_{yz}, df_{zx}, df_{xy}, \quad d\theta_{yz}, d\theta_{zx}, d\theta_{xy},$$

rendre a tényleges mozgásnak az YZ, ZX, XY síkokra való *vetületi mozgásai* megfelelő jellemzőit, végre x, y, z a mozgó A pont derékszögű koordinátáit.

Az $r_{yz}, v_{yz}, df_{yz}, d\theta_{yz}$, s i. t. mennyiségek, mint észreveszszük (29. ábra), egyszerűen az $r, v, df, d\theta$ mennyiségek *vetületei* az *összrendezői síkokra*; ellenben a p_{yz}, p_{zx}, p_{xy} hosszak *nem* vetületei a p merőlegesnek, mely körülményt szigorúan kell tekintetbe venni.

Áll a nevezett mennyiségekre nézve :

$$\left. \begin{aligned} r_{yx}^2 &= y^2 + z^2, & r_{zx}^2 &= z^2 + x^2, & r_{xy}^2 &= x^2 + y^2 \\ r_{yz}^2 &= r_y^2 + r_z^2, & r_{zx}^2 &= r_z^2 + r_x^2, & r_{xy}^2 &= r_x^2 + r_y^2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Jelelve a df felületi elem *positiv* normálisa (Math. repertorium 45. §.) iránycosinusait l -, m -, n -nel leszen a 37. §. (1) formulája szerint:

$$\left. \begin{aligned} df_{yz} &= ldf, & df_{zx} &= mdf, & df_{xy} &= ndf \\ 2 df_{yz} &= r_{yz}^2 d\theta_{yz}, & 2 df_{zx} &= r_{zx}^2 d\theta_{zx}, & 2 df_{xy} &= r_{xy}^2 d\theta_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Minden egyes, az YZ , ZX , XY síkokra vonatkozó *vetületi mozgásra* alkalmazva a *síkbeli mozgás* számára nyert eredményeket, a 36. §. (6), (11) és a 37. §. (4) formulái-, azaz a megfelelő sebességi nyomatékok azonnal írhatók:

$$\left. \begin{aligned} p_{yz} v_{yz} &= y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = r_{yz}^2 \frac{d\theta_{yz}}{dt} = 2 \frac{df_{yz}}{dt} \\ p_{zx} v_{zx} &= z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} = r_{zx}^2 \frac{d\theta_{zx}}{dt} = 2 \frac{df_{zx}}{dt} \\ p_{xy} v_{xy} &= x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = r_{xy}^2 \frac{d\theta_{xy}}{dt} = 2 \frac{df_{xy}}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

54. §. **VARIGNON tétele.** *Térbeli mozgás sebességi nyomatéka vector. Iránya (tengelye) a leírt felületi elem positiv normálisa. Kétféle bizonyítás.*

1. A térbeli mozgás sebességi nyomatéka (29. ábra) a pv szorzat; e nyomaték síkja a p merőleges és az $A\mathbf{A} = v$ sebesség által van adva, ez pedig az $AOB = df$ felületi elem síkja.

Ezen nyomaték az O pontra vonatkozólag a 37. §. (4) egyenlete szerint:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = pv = 2 \frac{df}{dt} \quad (1)$$

A df vetületei az YZ , ZX , XY síkokra [megelőző 53. §. (2)] $df_{yz} = ldf$, $df_{zx} = mdf$, $df_{xy} = ndf$, e szerint az idézett 53. §. (3) egyenletesoportja írható:

$$\left. \begin{aligned} p_{yz} v_{yz} &= l(pv), & p_{zx} v_{zx} &= m(pv), & p_{xy} v_{xy} &= n(pv); \\ (p_{yz} v_{yz})^2 &+ (p_{zx} v_{zx})^2 &+ (p_{xy} v_{xy})^2 &= (pv)^2; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

mely minden vectornyomatékre fennáll (v. ö. a 24. §. 3. pontját).

Ezen, VARIGNON-nak (1654—1722) tulajdonított tétel értelmében a *sebesség nyomatéka vector-mennyiség*; értéke (nagysága) a pv szorzat, iránya pedig a p merőleges és a v sebesség síkjának positiv normálisa.

$\varphi_{zx}, \varphi_{xy}$ menynyiségeket, melyek közül az utóbbiak a φ -nek vetületei a koordinátasíkokra, míg az előbbieket általánosságban véve *nem* vetületei a π merőlegesnek.

Az 53. §. (1) egyenletein kívül itt még áll:

$$\varphi_{yz}^2 = \varphi_y^2 + \varphi_z^2; \quad \varphi_{zx}^2 = \varphi_z^2 + \varphi_x^2; \quad \varphi_{xy}^2 = \varphi_x^2 + \varphi_y^2 \quad . \quad (1)$$

1. A 48. §. (4), (5), (6) kifejezései itt minden egyes összrendű síkra való vetületi mozgásra érvényesek lévén, rendre:

$$\left. \begin{aligned} \pi_{yz} \varphi_{yz} &= (y\varphi_z - z\varphi_y) = \frac{d}{dt} \left(r_{yz}^2 \frac{d\varphi_{yz}}{dt} \right) = 2 \frac{d^2 f_{yz}}{dt^2} \\ \pi_{zx} \varphi_{zx} &= (z\varphi_x - x\varphi_z) = \frac{d}{dt} \left(r_{zx}^2 \frac{d\varphi_{zx}}{dt} \right) = 2 \frac{d^2 f_{zx}}{dt^2} \\ \pi_{xy} \varphi_{xy} &= (x\varphi_y - y\varphi_x) = \frac{d}{dt} \left(r_{xy}^2 \frac{d\varphi_{xy}}{dt} \right) = 2 \frac{d^2 f_{xy}}{dt^2} \end{aligned} \right\} \quad . \quad (2)$$

2. Könynyű most analitikai úton bebizonyítani, hogy a $\pi_{yz} \varphi_{yz}$, $\pi_{zx} \varphi_{zx}$; $\pi_{xy} \varphi_{xy}$ szorzatok a $\pi\varphi$ -nek derékszögű componensei.

Mint a megelőző §. végén legyenek itt is (r, x) , (r, y) , (r, z) az r irányszögei és α , β , γ a φ iránycosinusi. Ekkor a (2)-ből:

$$\left. \begin{aligned} \pi_{yz} \varphi_{yz} &= r\varphi (\beta \cos(r, z) - \gamma \cos(r, y)), \\ \pi_{zx} \varphi_{zx} &= r\varphi (\gamma \cos(r, x) - \alpha \cos(r, z)), \\ \pi_{xy} \varphi_{xy} &= r\varphi (\alpha \cos(r, y) - \beta \cos(r, x)) \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Ezenkívül a 30. ábra szerint: $r = \frac{\pi}{\sin(r, \varphi)}$, és ha λ, μ, ν az r és a φ irányán átfektetett sík pozitív normálisának iránycosinusi, ezek [a Math. repertorium 45. §. (3) formulája szerint]:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{\beta \cos(r, z) - \gamma \cos(r, y)}{\sin(r, \varphi)}, & \mu &= \frac{\gamma \cos(r, x) - \alpha \cos(r, z)}{\sin(r, \varphi)}, \\ \nu &= \frac{\alpha \cos(r, y) - \beta \cos(r, x)}{\sin(r, \varphi)} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

A (3) és (4)-ből:

$$\pi_{yz} \varphi_{yz} = \lambda (\pi\varphi), \quad \pi_{zx} \varphi_{zx} = \mu (\pi\varphi), \quad \pi_{xy} \varphi_{xy} = \nu (\pi\varphi); \quad . \quad (5)$$

$$\pi = r \sin(r, \varphi) = [(\beta z - \gamma y)^2 + (\gamma x - \alpha z)^2 + (\alpha y - \beta x)^2]^{\frac{1}{2}} \quad . \quad . \quad (6)$$

E szerint a gyorsulás nyomatéka, a $(\pi\varphi)$ vector (v. ö. a 24. §. 3. pontját) nagysága (abszolút értéke) a $\pi\varphi$ szorzat, iránya pedig a π és φ által meghatározott AOM sík pozitív normálisába esik.

Jegyzet. Ezen pozitív normális meghatározása akként történik, hogy az AOM síkban az r irányától haladunk (a gyorsulás pozitív iránya mentén) a π irányáig: ez lévén a pozitív forgás iránya, a πq síkhoz tartozó pozitív normálist (tengelyt) a 24. §. 2. pontja (vagy a Math. rep. 45. §. definíciója) szerint szerkesztjük (v. ö. a megelőző § végén lévő jegyzetet).

56. §. *A vezérsugár forgása a kezdőpont és az összszerendezői tengelyek körül. A sectorsík forgása a vezérsugár közül térbeli mozgásoknál.*

1. *A vezérsugár forgása.*

Kapcsolatban az 54. és 55. §§-okban tárgyalt geometriai viszonyokkal, azok kiegészítéséül taglaljuk az r vezérsugár forgását kezdőpontja körül és az egyes összszerendezői tengelyek körül.

A megelőző két §§ összefüggéseiből ezen forgások közvetlenül volnának nyerhetők, de előnyösebb leszzen ezen viszonyokat egyenesen, egyszerű geometriai megfontolások alapján származtatni. A pont térbeli mozgását a szilárd fókvésűnek tekintett O pontra vonatkoztatjuk, mely a derékszögű összszerendezők és az r vezérsugár kezdőpontja.

Jeleljék az A pontnak és a tőle végtelen kicsiny távolságban levő B pontnak derékszögű összszerendezőit és O -tól való távolságait (29. ábra)

$$\begin{array}{ccccccc} x, & y, & z; & r, & & & \\ x + dx, & y + dy, & z + dz; & r + dr. & & & \end{array}$$

Az r és az $r + dr$ iránycosinusai:

$$\begin{array}{ccc} \frac{x}{r}, & \frac{y}{r}, & \frac{z}{r}; \\ \frac{x + dx}{r + dr}, & \frac{y + dy}{r + dr}, & \frac{z + dz}{r + dr}. \end{array}$$

Az r és $r + dr$, azaz az \vec{OA} és az \vec{OB} vezérsugarak egymással $d\theta$ szöget képeznek (29. ábra), melynek *sinusa* [a Math. repertorium 44. §. (2a) formulája szerint]:

$$\sin d\theta = \frac{1}{r(r + dr)} \left\{ [y(z + dz) - z(y + dy)]^2 + [z(x + dx) - x(z + dz)]^2 + [x(y + dy) - y(x + dx)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

vagy rövidítve és nevezőben a dr -et az r -rel szemben elhanyagolva:

$$d\theta = \frac{1}{r^2} [(ydz - zdy)^2 + (zdx - xdz)^2 + (xdy - ydx)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$\text{vagy:} \quad d\theta = r^{-2} [(y_z - z_y)^2 + (z_x - x_z)^2 + (x_y - y_x)^2]^{\frac{1}{2}} dt \quad (1a)$$

Ezen $d\theta$ szög egyszersmind az r vezérsugárnak az O pont körüli forgásának a mértéke, a *forgásszöge*; ezt kifejezzük a pontnak eredeti x, y, z koordinátái és ezeknek dx, dy, dz változásai segítségével.

A $d\theta$ szög síkja pozitív normálisának az irányát könnyen nyerjük; ugyanis az 54. §. *Jegyzete*, [vagy a Math. repertorium 45. §. (3) formulája] szerint e normális iránycosinusai lesznek, ha ezeket mint az 54. §-ban, l , m , n -nel jeleljük és ha az X , Y , Z pozitív tengelyek oly sorrendben következnek, mint a 29. és 30. ábrákban [vagy a Math. repertorium 46. §. 10. ábrájában az N_{23} , N_{31} , N_{12}]:

$$l = \frac{ydz - zdy}{r^2 d\theta}, \quad m = \frac{zdx - xdz}{r^2 d\theta}, \quad n = \frac{xdy - ydx}{r^2 d\theta} \quad (2)$$

Mialatt a mozgó pont az \vec{AB} ívelemet futotta be, az YZ síkra való vetületi pontja befutotta az $A_1\vec{B}_1$ ívelemet (29. ábra) és hasonlóan az ZX és az XY síkokra való vetületi pontok a megfelelő \vec{A}_2B_2 és \vec{A}_3B_3 ívelemeket. Ezen elemi elmozdulás közben e szerint a vetületi mozgásokban a megfelelő r_{yz} , r_{zx} , r_{xy} vetületi vezérsugarak az YZ , ZX , XY síkokban rendre $d\theta_{yz}$, $d\theta_{zx}$, $d\theta_{xy}$ szögekkel forogtak az O körül.

Ezeket az elemi forgásokat úgy tekinthetjük, mint az említett vezérsugaraknak az illető síkok *normálisai* körül, azaz, az X , az Y és a Z tengelyek körül történt elemi forgásokat.

Az elemi forgások *nagysága* adódik abból a megfontolásból, hogy az AOB felületi elem *vetületei* a koordináta-síkokra rendre az A_1OB_1 , A_2OB_2 , A_3OB_3 elemi felületek (ezek elsejét a 29. ábra mutatja), melyek kétszeres területe rendre [53. §. (2)]:

$$r_{yz}^2 d\theta_{yz} = l(r^2 d\theta), \quad r_{zx}^2 d\theta_{zx} = m(r^2 d\theta), \quad r_{xy}^2 d\theta_{xy} = n(r^2 d\theta).$$

Ezekből:

$$d\theta_{yz} = \frac{r^2}{r_{yz}^2} l d\theta; \quad d\theta_{zx} = \frac{r^2}{r_{zx}^2} m d\theta; \quad d\theta_{xy} = \frac{r^2}{r_{xy}^2} n d\theta; \quad (3)$$

avagy a (2) szerint:

$$d\theta_{yz} = \frac{ydz - zdy}{y^2 + z^2}; \quad d\theta_{zx} = \frac{zdx - xdz}{z^2 + x^2}; \quad d\theta_{xy} = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}; \quad (3a)$$

Ezen formulák utolsója megegyezik a 37. §. (3) formulájával.

2. A sectorsík forgása.

A sectorsíknak (az AOB síknak, 29. ábra) a vezérsugár körüli forgását a következő megfontolások alapján nyerjük:

A sectorsíkot t időkor az r és r , ellenben $t+dt$ időkor az $r+dr$ és $v+dv$ vectorok határozzák meg; a két sectorsík metszővonala az $r+dr$ egyenes (az OB vonal).

A v sebesség, valamint radiális és rotációs componense, v_r és v_g az (rv) síkban fekszik; ellenben a $v+dv$ sebesség oly három össze-
tevére bontható, melyek elseje, v_r+dv_r , az r vezérsugárhoz párhuzamo-
san, másodika, v_g+dv_g , az r -re merőleges- és az (rv) síkban fekvő irány
mentén, míg a harmadik, melyet itt dv_{lmn} -nel jeleljük, az (rv) síknak
 l, m, n iránycosinuszú normálisa mentén fekszik.

Mivel az $r+dr$ az egymásra következő két sectorsík metszővo-
nala, v_g+dv_g pedig (magasabbrendű csekély értékeket elhanyagolva)
az $r+dr$ -re merőleges és az (rv) síkban fekszik, míg dv_{lmn} e síkra merő-
leges, úgy következik, hogy a két sectorsík között bezárt $d\tau$ szög értéke

$$d\tau = \frac{dv_{lmn}}{v_g + dv_g}.$$

Elhagyva a magasabbrendű végtelen kicsinyeket és megjegyezve,
hogy a φ gyorsulásnak általánosságban van componense az (rv) sík-
nak l, m, n iránycosinuszú normálisa mentén (mert az (rv) sík általá-
nosságban *nem* a pálya osculáló síkja), melyet φ_{lmn} -el jelelhetni, szabad
tennünk [19. §. (4) és 43. §. (3)]:

$$\frac{dv_{lmn}}{dt} = \varphi_{lmn} = l\varphi_x + m\varphi_y + n\varphi_z \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

és így:

$$d\tau = \frac{\varphi_{lmn}}{v_g} dt = \frac{l\varphi_x + m\varphi_y + n\varphi_z}{r \frac{d\theta}{dt}} dt \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Evvel az (rv) síknak (a sebesség nyomatéka síkjának) forgása a
vezérsugár körül meg van határozva.

Jegyzet. Ugyanezt az eredményt tisztán analitikai úton is érhetjük
el. Ugyanis, a két sectorsík által bezárt $d\tau$ szög egyenlő e két sík normá-
lisai által bezárt szöggel; a két normális iránycosinuszai rendre

$$l, m, n; \quad l+dl, \quad m+dm, \quad n+dn.$$

E szerint [Math. repertorium 71. §. (2a)]:

$$d\tau = [(dl)^2 + (dm)^2 + (dn)^2]^{\frac{1}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

A dl, dm, dn a jelen §. (2) formuláiból [melyekbe a $d\theta$ értéke az
(1)-ből helyettesítendő] számítandók ki és a (6)-ba teendő; az eredmény
meg egyezik az (5) formulával.

A számítás hosszadalmas lévén, kivitelét itt mellőzzük, de az olvasó-
nak mint tanulságos gyakorlatot ajánljuk.

57. §. Fontos jegyzet a merev rendszernek pont körüli mozgására nézve.

A megelőző §. 1. pontjának kifejtése egész általánosságban véve helyes és még azon speciális esetre nézve is érvényes, a midőn mozgás közben az r távolság változatlan marad.

De nem szabad ezt a tárgyalást összzetevésztetni a merev rendszernek pont körüli mozgása tárgyalásával (v. ö. a merev rendszerek kinematikájának erre vonatkozó B) alatti fejezeteit). Ott ugyanis az egész rendszernek elemi elmozdulását *momentán tengely körüli pillanati forgás* által helyettesíthetjük és ezt ismét egymásra merőleges és egymást közös pontban metsző *három tengely körüli forgásra bonthatni szét*. Ha α, β, γ ennek a TT momentán tengelynek az iránycosinuszai és $d\theta$ a TT tengely körüli elemi forgás szöge, míg $d\theta_x, d\theta_y, d\theta_z$, az X, Y, Z tengelyek körüli azon elemi forgások szögei, a melyek a TT tengely körüli $d\theta$ forgást teljesen helyettesítik, akkor, a merev rendszerek pont körüli momentán forgásának sajátosságai értelmében (u. o.)

$$d\theta_x = \alpha d\theta, \quad d\theta_y = \beta d\theta, \quad d\theta_z = \gamma d\theta \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Ellenben a pontnak a megelőző §-ban tárgyalt mozgására nézve nem áll:

$$d\theta_{yz} = ld\theta \text{ stb.,}$$

hanem a (3) egyenletek érvényesek.

A különbség itt abban a körülményben rejlik, hogy az egyes pontnak a megelőző §-ban tárgyalt mozgásánál a *vetületi* mozgás vezérsugarai által leírt *felületek* a *tényleges* mozgás vezérsugara által leírt *felület vetületeivel* egyenlők, míg a merev rendszernek pont körüli mozgásánál az *összrendezői tengelyek körüli forgásszögek* a pillanati forgás *tengely körüli forgásszögének vetületeivel* egyenlők.

58. §. A pálya geometriai tulajdonságai, kifejezve a mozgás jellemzői segítségével.

Jeleljék rendre a, b, c ; λ, μ, ν ; f, g, h a pályagörbe érintője-, osculáló síkjában fekvő normálisa- (görbületi sugara-) és osculáló síkja normálisa- (csavarodási sugara-), azaz röviden a *tangens*, a *normális* és a *binormális iránycosinusait*, úgy hogy [a Math. repertorium 66—76. §§-ainak megfelelőleg]:

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$; $\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu$; $\cos \varphi, \cos \chi, \cos \psi$ helyébe,
itt a, b, c ; λ, μ, ν ; f, g, h lép.

Továbbá, az idézett §§-okban előforduló, a t független változó szerint képezett quotiensek: s', x', y', z' ; x'', y'', z'' ; x''', y''', z''' , itt a v sebességet és componenseit, az első és a másodrendű gyorsulás összzetevőit jelentik; s'' pedig a gyorsulás tangenciális összzetevőjét.

Áll [Math. repertorium 67. §. (3_b)]:

$$a = \frac{x}{s}, \quad b = \frac{y}{s}, \quad c = \frac{z}{s}; \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

továbbá [u. o. 72. §. (3), 73. §. (5a) és (6)];

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{\rho}{v} \frac{da}{dt}, & \mu &= \frac{\rho}{v} \frac{db}{dt}, & \nu &= \frac{\rho}{v} \frac{dc}{dt}, \\ \text{vagy [u. o. 73. §. (7) és 74. §. (2a)]} \\ \lambda &= \frac{\rho}{v^3} (s' x'' - x' s''), & \mu &= \frac{\rho}{v^3} (s' y'' - y' s''), & \nu &= \frac{\rho}{v^3} (s' z'' - z' s'') \\ f &= \frac{\rho}{v^3} (y' z'' - z' y''), & g &= \frac{\rho}{v^3} (z' x'' - x' z''), & h &= \frac{\rho}{v^3} (x' y'' - y' x''). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$f = \frac{\rho}{v^3} (y' z'' - z' y''), \quad g = \frac{\rho}{v^3} (z' x'' - x' z''), \quad h = \frac{\rho}{v^3} (x' y'' - y' x''). \quad (3)$$

Továbbá, a ρ görbületi sugarra és a τ csavarodási sugarra nézve áll:

$$\left. \begin{aligned} [\text{u. o. 71. §. (5)}] \quad \frac{1}{\rho} &= \frac{1}{v^3} \left\{ (s' x'' - x' s'')^2 + (s' y'' - y' s'')^2 + (s' z'' - z' s'')^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ [\text{u. o. 73. §. (9b)}] \quad \frac{1}{\rho} &= \frac{1}{v^3} \left\{ (y' z'' - z' y'')^2 + (z' x'' - x' z'')^2 + (x' y'' - y' x'')^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \text{és (9a)]} \quad \frac{1}{\rho} &= \frac{1}{v^3} \left\{ x'^2 + y'^2 + z'^2 - s'^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ [\text{u. o. 74. §. (12)}] \quad \frac{1}{\tau} &= \frac{\rho}{v^3} \{ f x''' + g y''' + h z''' \}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$[\text{u. o. 74. §. (12)}] \quad \frac{1}{\tau} = \frac{\rho}{v^3} \{ f x''' + g y''' + h z''' \}. \quad (5)$$

Vége [u. o. a 75b. §. (2), (1, 2), (3) tételeiből, mivel ott $\rho = ds : d\theta$; és $\tau = d\theta : d\varepsilon$]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{df}{dt} &= -\lambda \frac{v}{\tau}, & \frac{dg}{dt} &= -\mu \frac{v}{\tau}, & \frac{dh}{dt} &= -\nu \frac{v}{\tau} \\ -\frac{\tau}{\rho} &= \frac{da}{df} = \frac{db}{dg} = \frac{dc}{dh} = -\frac{\tau}{\rho} \\ \frac{d\lambda}{dt} &= f \frac{v}{\tau} - a \frac{v}{\rho}; & \frac{d\mu}{dt} &= g \frac{v}{\tau} - b \frac{v}{\rho}; & \frac{d\nu}{dt} &= h \frac{v}{\tau} - c \frac{v}{\rho} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Jegyzet. Itt mindenütt: $v = s'$; $v' = s''$.

5. Magasabb rendű gyorsulások.

59. §. A magasabb rendű gyorsulásokról általánosságban. Magasabb rendű hodographok.

A mozgás tárgyalásánál eddig háromféle vectormenynyiséggel ismerkedtünk meg: az elmozdulással, a sebességgel és a gyorsulással.

1. A gyorsulást a sebességből éppen úgy származtattuk, mint a sebességet az elmozdulásból, és ezért is a gyorsulásnak kinematikai viszonya a sebességhez olyan, a milyen a sebesség az elmozduláshoz.

Tovább is folytathatjuk ezen irányban megfontolásainkat; a gyorsulásból ugyanoly módon képezhetünk új vektort, a mily módon a sebességből nyertük a gyorsulást; sőt ezt az eljárást folytatólágosan tetszés szerint újra meg újra alkalmazhatjuk.

Az így származó vector menynyniségeket *magasabbrendű gyorsulásoknak* nevezik; létezik e szerint elsőrendű gyorsulás (közönségesen egyszerűen gyorsulás), másodrendű gyorsulás, harmadrendű, s i. t., ν -ed rendű gyorsulás, melyek jelei rendre:

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \varphi_3, \quad \dots \dots \varphi_\nu.$$

Ezek derékszögű összfetevői nyugvó coordináta-rendszerre nézve:

$$\begin{aligned} \varphi_{1,x} &= \frac{d^2x}{dt^2}, & \varphi_{1,y} &= \frac{d^2y}{dt^2}, & \varphi_{1,z} &= \frac{d^2z}{dt^2}, \\ \varphi_{2,x} &= \frac{d^3x}{dt^3}, & \varphi_{2,y} &= \frac{d^3y}{dt^3}, & \varphi_{2,z} &= \frac{d^3z}{dt^3}, \\ & \dots \dots \dots & & & & \\ \varphi_{\nu,x} &= \frac{d^{\nu+1}x}{dt^{\nu+1}}, & \varphi_{\nu,y} &= \frac{d^{\nu+1}y}{dt^{\nu+1}}, & \varphi_{\nu,z} &= \frac{d^{\nu+1}z}{dt^{\nu+1}}; \end{aligned}$$

hol a

$$\varphi_\nu^2 = \varphi_{\nu,x}^2 + \varphi_{\nu,y}^2 + \varphi_{\nu,z}^2$$

általános összefüggés érvényes.

2. Valamely mozgás *hodographja* a sebesség végpontja képzeleti mozgásának pályája [50. §.]; ebből új hodographot épen úgy származtathatni, mint az eredeti pályából az első hodographot s i. t. Ezek a *magasabb rendű hodographok*, melyek derékszögű coordinátáira nézve áll:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{dx}{dt}, & \eta_1 &= \frac{dy}{dt}, & \xi_1 &= \frac{dz}{dt}; \\ & \dots \dots \dots & & & & \\ \xi_\nu &= \frac{d^\nu x}{dt^\nu}, & \eta_\nu &= \frac{d^\nu y}{dt^\nu}, & \xi_\nu &= \frac{d^\nu z}{dt^\nu} \end{aligned}$$

A másodrendű hodograph vezérsugarai e szerint az elsőrendű gyorsulást képviselik, érintőinek iránya pedig a másodrendű gyorsuláshoz párhuzamos s i. t.

A magasabbrendű gyorsulások és hodographok sokszor előnyösen használhatók fel a mozgás geometriai viszonyainak felderítésére; így használtuk a másodrendű gyorsulás x''', y''', z''' összefetevőit, midőn a pálya csavarodása mértéket a pont kinematikai jellemzői által fejeztük ki [58. §. (5)]; v. ö. továbbá a következő 6. fejezetet, 71. l.

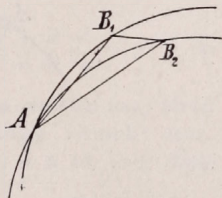
összetevő elmozdulások geometriai összege, melyek irányai rendszerint megegyeznek a sebesség-ével, az első-, a másod- s í. t. rendű gyorsulás-ával.

A felírt componensek elseje az állandó nagyságú- és irányúnak tekintett φ_0 sebességgel leírt út; másodika az állandónak tekintett $\frac{1}{2}\varphi_1 t$ sebességgel leírt út s í. t. Az összetevők e szerint végtelen sok oldalú polygont alkotnak, melyek eredője éppen a keresett \overline{AB} húr (24. ábra).

2. A *deviáció* a 47. §. értelmezése szerint a gyorsulás felének az időelem négyzetével való szorzata; ez itt megfelel a felírt (2) kifejezéseink másodikának; de ott a magasabbrendűek elhanyagolásával csak a másodrendű kicsiny tagokat vettük még figyelembe.

Az idézett §. megfontolásait az elmozdulás magasabb rendű componenseire is terjesztve ki, *magasabb rendű deviációkat* nyerünk, melyekre nézve megjegyezzük, hogy a zérus-, az első-, a másod-, a $\nu-1$ -ed rendű deviáció rendre egyenlő az elmozdulásnak (2) alatt felírt componenseivel.

3. Ha két mozgó pont pályái közös A ponttal bírnak (31. ábra), melyen a két pont a t időpillanatban egyszerre megyen keresztül, akkor az innen számított, Δt idő alatt bekövetkezett $\overline{AB_1}$ és $\overline{AB_2}$ két elmozdulás a (2) egyes összetevőiből adódik; ezekben a $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ gyorsulások a mozgó két pontra nézve általánosságban különböznek, a többi tényezők egyenlők.



31. ábra.

Ha a két görbe az A pontban ν -ed rendű érintkezéssel bír, akkor, t -t tekintve független változónak [a math. repertorium 61. §-a szerint], a $\overline{B_1B_2}$ különbség csak $\nu+1$ -ed rendű kicsiny lehet; ezért az $\overline{AB_1}$ és $\overline{AB_2}$ elmozdulások (húrok) is, melyek hosszkülönbsége mindig kisebb a $\overline{B_1B_2}$ -nél, nem mutathatnak a $\nu+1$ -ed rendűnél nagyobb különbséget, azaz a (2) componensek közül az első ν -számúnak egyenlőknek kell lenni a két mozgásban.

Röviden: Ha két pálya ν -ed rendű érintkezést mutat, akkor a két mozgásnak sebessége, első-, másod-, $\dots \nu-1$ -ed gyorsulása az érintkezés pillanatában egyenlőknek tartoznak lenni.

61. §. A magasabb rendű gyorsulások tangenciális és normális összetevője sík mozgásoknál.

Egyszerűség kedvéért tárgyaljuk itt először a sík mozgás magasabb rendű gyorsulásait és ezek componenseit.

Legyen A a pont helyzete és $\overline{AA} = \varphi_\nu$ a ν -ed rendű gyorsulása

a t időpillanatban; míg B és $\overline{BB} = \varphi_v + d\varphi_v$ a $t+dt$ időpontra vonatkoznak (32. ábra a).

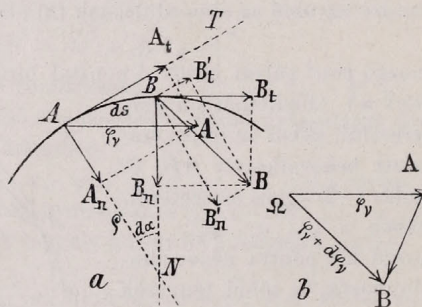
A két gyorsulás teljes különbsége az \overline{AB} vector (32. ábra b); ennek a dt időközhez való viszonya egyenlő a $\nu+1$ -ed rendű gyorsulással a t időpillanatban.

1. A φ_v és $\varphi_v + d\varphi_v$ gyorsulások tangenciális és normális összetevői, a 32. ábra a szerint:

$$\left. \begin{aligned} \overline{AA}_t &= \varphi_{v,t}; & \overline{AA}_n &= \varphi_{v,n}; \\ \overline{BB}_t &= \varphi_{v,t} + d\varphi_{v,t}; & \overline{BB}_n &= \varphi_{v,n} + d\varphi_{v,n}; \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

hol a folyó idő a független változó.

A \overline{BB} gyorsulást még az \overline{AT} érintőhöz és az \overline{AN} normálishoz párhuzamos két összetevőre, \overline{BB}'_t és \overline{BB}'_n -re bonthatjuk fel (32.



32. ábra.

ábra, a), melyek a \overline{BB}'_t - és a \overline{BB}'_n -el a $da=ds:\rho$ szöveget képeznek (ρ lévén a pálya görbületi sugara).

Áll [a Math. repertorium az 50. §-ának (1) sémája szerint]:

$$\left. \begin{aligned} \overline{BB}'_t &= (\varphi_{v,t} + d\varphi_{v,t}) \cos da - (\varphi_{v,n} + d\varphi_{v,n}) \sin da \\ \overline{BB}'_n &= (\varphi_{v,t} + d\varphi_{v,t}) \sin da + (\varphi_{v,n} + d\varphi_{v,n}) \cos da \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

2. Másfelől (32. ábra, b) a $\overline{BB}'_t - \overline{AA}_t$ és a $\overline{BB}'_n - \overline{AA}_n$ különbségek nem egyebek, mint az \overline{AB} vector vetületei az \overline{AT} érintő és az \overline{AN} normális mentén, és ezért ezen különbségeknek a dt -vel való osztatai szolgáltatni fogják a $\nu+1$ -ed rendű gyorsulás tangenciális és normális componenseit a t időpontra (azaz A helyzetre) nézve.

Kifejtve e különbséget az (1) és (2) alapján a másodrendű csekély mennyiségek elhagyásával, nyerjük:

$$\varphi_{v+1,t} = \frac{\overline{BB}'_t - \overline{AA}_t}{dt} = \frac{d\varphi_{v,t}}{dt} - \varphi_{v,n} \frac{d\alpha}{dt};$$

$$\varphi_{v+1,n} = \frac{\overline{BB}'_n - \overline{AA}_n}{dt} = \varphi_{v,t} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\varphi_{v,n}}{dt}.$$

Ámde áll: $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{1}{\rho} = \frac{v}{\rho}$, úgy, hogy végre

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{v+1,t} &= \frac{d\varphi_{v,t}}{dt} - \varphi_{v,n} \frac{v}{\rho} \\ \varphi_{v+1,n} &= \varphi_{v,t} \frac{v}{\rho} + \frac{d\varphi_{v,n}}{dt} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

E formulák kifejezik a $v+1$ -rendű gyorsulás összetevőit, ha a v -edik-éi ismeretesek.

3. Az elsőrendű gyorsulás componensei [46. §. (5)]:

$$\varphi_{1,t} = \frac{dv}{dt}; \quad \varphi_{1,n} = \frac{v^2}{\rho};$$

a (3) szerint a másodrendű gyorsulásai lesznek:

$$\varphi_{2,t} = \frac{d^2v}{dt^2} - \frac{v^3}{\rho^2}; \quad \varphi_{2,n} = \frac{v}{\rho} \frac{dv}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{\rho} \right) = \frac{1}{v} \frac{d}{dt} \left(\frac{v^5}{\rho} \right) \dots \dots (4)$$

1. *Jegyzet.* Az egyenes vonalú mozgásra nézve a ρ végtelen nagy lévén a $\varphi_{1,n}$, $\varphi_{2,n}$, $\dots \dots \varphi_{v,n}$ gyorsulási összetevők mindig zérusok; fennmaradnak itt csak a tangenciális componensek; (v. ö. a 46. §. 1. *Jegyzetét*).

2. *Jegyzet.* Az egyenletes körmozgásra nézve a v és a ρ állandók lévén, származik rendre:

$$\begin{aligned} \varphi_{1,t} &= 0, & \varphi_{1,n} &= +\frac{v^2}{\rho}; & \varphi_{2,t} &= -\frac{v^3}{\rho^2}, & \varphi_{2,n} &= 0; \\ \varphi_{3,t} &= 0, & \varphi_{3,n} &= -\frac{v^4}{\rho^3}; & \varphi_{4,t} &= +\frac{v^5}{\rho^4}, & \varphi_{4,n} &= 0; \quad \text{st. t.} \end{aligned}$$

62. §. *Összefüggés síkbeli pályák másodrendű gyorsulásának normális componense és a símuló parabola között.*

1. *Tétel a parabola diametereiről.*

Legyen $y^2=2px$ a parabola csúcsponti egyenlete [Math. rep. 64. §., 73. lap (13)] és $y=ax+b$ valamely húrja, melynek a parabola tengelyéhez való hajlásszögének tangense a .

A húrnak a parabolával való metszőpontjaira nézve mindkét egyenlet áll; eliminálva belőlük az x -et, marad e két metszőpont ordinátáira nézve:

$$y^2 + 2 \frac{p}{a} y - 2 \frac{p}{a} b = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

Ebből ezen két ordináta középértéke:

$$\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \frac{p}{a}, \dots \dots \dots (2)$$

mely egyszersmind a húr középpontjának ordinátája. Ez az érték *valamennyi* a parameterű húrra nézve ugyanaz lévén, áll: a párhuzamos húrok középpontjai a tengelyhez párhuzamos, tőle $p : a$ távolságban lévő egyenesen fekszenek. Ez az AD egyenes (33. ábra) átmegy a parabola $y = (p : a)$, $x = (\frac{1}{2} p : a^2)$ összszerendező A pontján és e pont *diameterének* mondatik.

Mivel pedig az A pontban a parabolához vont érintőegyenes hajlásának tangense [u. o. (16)]:

$$tga = \frac{p}{y}, \quad \text{azért áll: } a = tga,$$

azaz az AD által felezett húrok az A érintőjével párhuzamosak.

2. Tétel a parabola evolútájának görbületi sugaráról.

a. Az evoluta egyik általános jellemző sajátága, hogy ívhossza σ és az evolvens φ_1 görbületi sugara között állandó a különbség és hogy e görbületi sugár irányváltozása, $-da$, mindig egyenlő az evoluta megfelelő érintőjének irányváltozásával, $d\beta$ -val [Math. repertorium 60. §. 63. és 64. lap és 22. ábra], azaz:

$$d\varphi_1 = d\sigma; \quad -da = d\beta,$$

hol a az evolvens érintőjének, β a φ_1 görbületi sugarának hajlásszöge az X tengelyhez.

Az evoluta görbületi sugara, φ_2 e szerint:

$$\varphi_2 = \frac{d\sigma}{d\beta} = -\frac{d\varphi_1}{da} = \frac{d\varphi_1}{d\beta} \dots \dots \dots (3)$$

b. Ha az evolvens parabola, akkor [Math. rep. 64. §., 73. lap (16) és (15)]:

$$tga = tg(\frac{1}{2}\pi - \beta) = \frac{p}{y}; \quad \varphi_1 = \frac{1}{p^2} (p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{p}{\cos^3 \beta}$$

Ebből:

$$da = -\cos^2 \alpha \frac{p}{y^2} dy = -\frac{p dy}{p^2 + y^2}; \quad d\varphi_1 = 3 \frac{(p^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} y dy}{p^2}$$

e szerint a (3)-ból:

$$\varphi_2 = -\frac{d\varphi_1}{da} = 3 \frac{(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} y}{p^3} = 3 \frac{y}{p} \varphi_1 \dots \dots \dots (4)$$

vagy, mivel $\beta = \frac{1}{2}\pi - \alpha$,

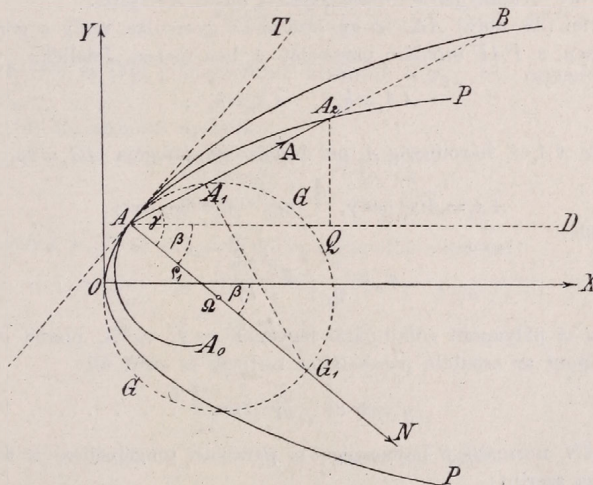
$$t\beta = \frac{3}{2} \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \dots \dots \dots (5)$$

3. Az osculáló parabola és a $\varphi_{2,n}$ gyorsulási componens kifejezése.

Ha valamely A_0AB síkgörbével egy POF parabola (33. ábra) harmadrendű érintkezést mutat, azaz, ha a két görbe négy pontja közös, akkor az utóbbi a *simuló parabola*. Ekkor [Math. repertorium 61. §.] a két görbe érintői és görbületi sugarai is egymásra következő két pontra nézve egybeesnek, azaz, az $A\Omega = \rho_1$ görbületi sugár β hajlásszögének $d\beta$, és hosszának $d\rho_1$ növekedése az osculálás helyén a két görbére nézve ugyanaz. De ekkor, a (3) szerint a két görbe evolutájának ρ_2 görbületi sugara is ugyanaz az érintkezés helyén és így a pályának és evolutájának görbületi sugarai helyébe a simuló paraboláét és evolutájáét szabad tennünk.

Ezt megjegyezve, a megelőző §. (4) formuláiból a $\varphi_{2,n}$

$$\varphi_{2,n} = 3 \frac{v}{\rho_1} \frac{dv}{dt} - \frac{v^2}{\rho_1^2} \cdot \frac{d\rho_1}{dt}$$



33. ábra.

Amde, mivel a görbe íveleme $\rho_1 d\beta = ds$, a (3) tekintetbe vételével:

$$\frac{d\rho_1}{dt} = \frac{d\rho_1}{d\beta} \cdot \frac{d\beta}{dt} = \frac{d\rho_1}{d\beta} \cdot \frac{\rho_1 d\beta}{dt} = \frac{d\rho_1}{d\beta} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{1}{\rho_1} = v \frac{\rho_2}{\rho_1},$$

úgy, hogy:

$$\varphi_{2,n} = 3 \frac{v}{\rho_1} \frac{dv}{dt} - \frac{v^3}{\rho_1^2} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (6)$$

E kifejezés transformálható; ugyanis, ha (33. ábra) γ a szög az első rendű gyorsulás $\overline{AA} = \varphi$ és az AN normális között, akkor φ -nek tangenciális és normális összetevője írható:

$$\left. \begin{aligned} \frac{v^2}{\varrho_1} &= \varphi_n = \varphi \cos \gamma; & \frac{dv}{dt} &= \varphi_t = \varphi \sin \gamma = \varphi_n \operatorname{tg} \gamma; \\ \text{míg az (5) szerint:} & & \operatorname{tg} \beta &= \frac{1}{3} \frac{\varrho_2}{\varrho_1}. \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

A φ_n -vel kifejezve (6)-ot, nyerjük:

$$\varphi_{2,n} = 3 \frac{\sqrt{\varphi_n}}{\sqrt{\varrho_1}} \cdot \varphi_n \operatorname{tg} \gamma - \frac{\varphi_n \sqrt{\varphi_n}}{\sqrt{\varrho_1}} \cdot 3 \operatorname{tg} \beta = 3 \frac{\varphi_n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\varrho_1}} (\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \beta),$$

$$\text{azaz} \quad \varphi_{2,n} = 3 \frac{\sin(\gamma - \beta)}{\cos \beta \cos \gamma} \sqrt{\frac{\varphi_n^3}{\varrho_1}} \dots (8)$$

4. A $\varphi_{2,n}$ kifejezése az elsőrendű gyorsulás iránya által a görbületi körben és az osculáló parabolában képezett húrok segítségével.

Legyen (33. ábra) $AA = \varphi$ az elsőrendű gyorsulás, mely a görbületi kört A_1 -ben, a PAP osculáló parabolát A_2 -ben metszi. Jeleljék:

$$\overline{AA_1} = h_1; \quad \overline{AA_2} = h_2 \dots (9)$$

a. Az AA_1G_1 háromszög A_1 -nél derékszögű, átfogója $AG_1 = 2\varrho_1$; lesz:

$$\overline{AA_1} = \overline{AG_1} \cos \gamma, \quad \text{vagy} \quad h_1 = 2\varrho_1 \cos \gamma.$$

Ebből:

$$\varphi_n = \frac{v^2}{\varrho_1} = 2 \frac{v^2 \cos \gamma}{h_1} \dots (10)$$

b. Az A pályapont koordinátái legyenek x, y ; az A_2 pontéi x_2, y_2 ; mindkét pont az osculáló parabolához tartozik és ezért áll:

$$y^2 = 2px; \quad y_2^2 = 2px_2 \dots (11)$$

Az AN normális β hajlásszöge a parabola tengelyéhez, a 2. pont b. szakasza szerint:

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \frac{y}{p} \dots (12)$$

Az $\overline{AA_2} = h_2$ húr derékszögű vetületei a parabola tengelyéhez párhuzamos és a reá merőleges irányban a 33. ábra szerint:

$$AQ = h_2 \cos(\gamma - \beta) = x_2 - x; \quad QA_2 = h_2 \sin(\gamma - \beta) = y_2 - y,$$

vagy, mivel a (11) és (12) tekintetbe vételével:

$$x_2 - x = \frac{y_2^2}{2p} - \frac{y^2}{2p} = \frac{y_2^2}{2p} - \frac{1}{2} p \operatorname{tg}^2 \beta = h_2 \cos(\gamma - \beta),$$

$$y_2 - y = y_2 - p \operatorname{tg} \beta = h_2 \sin(\gamma - \beta).$$

Ezekből:

$$\left. \begin{aligned} y_2^2 &= p^2 \operatorname{tg}^2 \beta + 2ph_2 \cos(\gamma - \beta); \\ y_2 &= p \operatorname{tg} \beta + h_2 \sin(\gamma - \beta). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Levonva a felső egyenletet az alsó egyenlet négyzetéből, marad:

$$0 = 2ph_2 [\operatorname{tg} \beta \sin(\gamma - \beta) - \cos(\gamma - \beta)] + h_2^2 \sin^2(\gamma - \beta)$$

avagy

$$0 = -2p \frac{\cos \gamma}{\cos \beta} + h_2 \sin^2(\gamma - \beta)$$

és így:

$$h_2 = 2p \frac{\cos \gamma}{\cos \beta \cdot \sin^2(\gamma - \beta)}, \quad (14a)$$

vagy, tekintettel a 2. pont *b.* szakaszában említett $p = \varrho_1 \cos^3 \beta$ összefüggésre:

$$h_2 = 2\varrho_1 \frac{\cos^2 \beta \cos \gamma}{\sin^2(\gamma - \beta)} \quad (14)$$

c. A (10) és (14) kifejezésekkel kívánjuk a $\varphi_{2,n}$ (8) egyenletét előtüntetni.

A (14)-ből azonnal nyerjük:

$$\frac{\sin(\gamma - \beta)}{\cos \beta \cos \gamma} = \sqrt{\frac{2\varrho_1}{\cos \gamma h_2}} \quad (15)$$

Továbbá a (7) és a $h_1 = 2\varrho \cos \gamma_1$ tekintetbe vételével:

$$\frac{\varphi_n^3}{\varrho_1} = \frac{v^6}{\varrho_1^4} = \frac{v^6}{\varrho_1^2} \cdot \frac{1}{2\varrho_1} \cdot \frac{2}{\varrho_1} = \frac{v^6}{\varrho_1^2} \cdot \frac{1}{2\varrho_1} \cdot \frac{4 \cos \gamma}{h_1}$$

vagy:

$$3 \sqrt{\frac{\varphi_n^3}{\varrho_1}} = 6 \frac{v^3}{\varrho_1} \sqrt{\frac{\cos \gamma}{2\varrho_1 h_1}} \quad (16)$$

Tekintettel a (8)-ra, a (15) és (16) egyesítése adja:

$$\varphi_{2,n} = 6 \frac{v^3}{\varrho_1} \frac{1}{\sqrt{h_1 h_2}} \quad (17)$$

Jegyzet. Az AD diametert, mely a parabolának az AT érintőhöz párhuzamos húrjait felezi, TRANSON *deviatio-tengelynek* nevezi (LIOUVILLE, Journal de Math. VI. k.). Húzva ugyanis az A_1 ponton keresztül az AT -hez párhuzamos egyenest, ez A' -ben metszi az AB pályát és az $A_1 A'$ eltérésre nézve áll:

$$A_1 A' = \frac{9}{4} \frac{v^2}{\varrho_1} (dt)^2 \operatorname{tg} \beta = \frac{9}{4} \varphi_n (dt)^2 \operatorname{tg} \beta, \quad (18)$$

mely tétel bebizonyítását az olvasóra bizzuk.

63. §. *A magasabb rendű gyorsulások tangenciális, normális és binormális összetevőinek kifejezése az alsóbb rendű ily összetevők segítségével.*

Jelöljék az első-, másod-, . . . ν -ed rendű gyorsulást rendre a

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\nu$$

betűk; ezeknek tangenciális, normális, binormális componenseit:

$$\varphi_{1,t}, \varphi_{1,n}, \varphi_{1,b}; \quad \varphi_{2,t}, \varphi_{2,n}, \varphi_{2,b}, \dots, \varphi_{\nu,t}, \varphi_{\nu,n}, \varphi_{\nu,b} \quad (1)$$

1. Legyen a mozgó pont t időpillanatban A - és $t+dt$ -ben A_1 helyzetben.

A ν -edik rendű gyorsulás ezen két helyzetben φ_ν és $(\varphi_\nu)_1 = \varphi_\nu + d\varphi_\nu$, hol $d\varphi_\nu$ a φ_ν vectornak nagyság és irány szerint veendő teljes változása. E két gyorsulás összetevői:

$$\left. \begin{array}{ll} A\text{-ban:} & A_1\text{-ben:} \\ \varphi_{\nu,t} = \varphi_{\nu,t}; & (\varphi_{\nu,t})_1 = \varphi_{\nu,t} + \frac{d\varphi_{\nu,t}}{dt} dt; \\ \varphi_{\nu,n} = \varphi_{\nu,n}; & (\varphi_{\nu,n})_1 = \varphi_{\nu,n} + \frac{d\varphi_{\nu,n}}{dt} dt; \\ \varphi_{\nu,b} = \varphi_{\nu,b}; & (\varphi_{\nu,b})_1 = \varphi_{\nu,b} + \frac{d\varphi_{\nu,b}}{dt} dt \end{array} \right\} \quad (2)$$

Ámde, az A -hoz és az A_1 -hez különböző irányú érintők, normálisak és binormálisak tartoznak [Math. repertorium 75a. §. és 26. ábra], ezért a felírt két rendbeli egymásnak megfelelő összetevők nem párhuzamosak; az általuk képzett szögek egyenlők azokkal a szögekkel, melyeket a nevezett érintők, normálisak és binormálisak egymással képeznek; ezen szögek iránycosinusai (az idézett §. és ábra értelmében u. o. 91. és 92. lap, ha a csavarodás $d\varepsilon = ds : \tau$ szögét *positiv*nak vesszük és az AB és A_1B_1 binormálisokat a TAN és $T_1A_1N_1$ síkok *positiv* normálisainak tekintjük, tehát ellentett irányúknak, mint az idézett ábrában, vagy egyezőnek a 80. l. 34. ábrájával):

	T	N	B	
T_1	1	$+\frac{ds}{\rho}$	0	
N_1	$-\frac{ds}{\rho}$	1	$+\frac{ds}{\tau}$ (3)
B_1	0	$-\frac{ds}{\tau}$	1	

Ha például a $(\varphi_v)_1$ -nek az az $\varphi_v + d\varphi_v$ gyorsulásnak összetevőit az A pont T tangense, N normálisa és B binormálisa mentén keressük, akkor csak a vectorok általános szabályait a 20. §. szerint alkalmazzuk. A (2) második oszlopának értékeit rendre kell szoroznunk azon (3) cosinusokkal, melyek a T és a T_1, N_1, B_1 ; az N és T_1, N_1, B_1 ; a B és a T_1, N_1, B_1 irányok által képezett szögekhez tartoznak és a (3) egyes oszlopaiból így származó szorzatokat összegeznünk. Leszen ekként:

$$\begin{aligned} & (\varphi_{v,t})_1 1 - (\varphi_{v,n})_1 \frac{ds}{\rho} + (\varphi_{v,b})_1 0; \\ & (\varphi_{v,t})_1 \frac{ds}{\rho} + (\varphi_{v,n})_1 1 - (\varphi_{v,b})_1 \frac{ds}{\tau}; \\ & (\varphi_{v,t})_1 0 + (\varphi_{v,n})_1 \frac{ds}{\tau} + (\varphi_{v,b})_1 1; \end{aligned}$$

a ν -edrendű gyorsulás három összetevője a $t+dt$ időpillanatban (az A_1 pontban), vonatkoztatva azonban a t időpillanathoz (az A ponthoz) tartozó T tangens, N normális és B binormális irányaira.

2. A nyert componensekkel a 61. §. 2. pontja szerint járunk el.

Levonva ezen összetevőkből az ugyanezen irányokra vonatkozó, de t időpillanatban (az A pontban érvényes) $\varphi_{v,t}$, $\varphi_{v,n}$, $\varphi_{v,b}$ componenseket és tekintettel (2)-re elhagyva a másodrendű kicsiny értékeket, végre pedig az így származó gyorsulási különbségeket osztva a hozzájuk tartozó azon dt időelemmel, mely közben keletkeztek, nyerjük a $\nu+1$ -ed rendű gyorsulás tangentiális, normális és binormális componenseit:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{\nu+1,t} &= \frac{d\varphi_{v,t}}{dt} - \frac{\varphi_{v,n}}{\rho} \frac{ds}{dt}; \\ \varphi_{\nu+1,n} &= \frac{\varphi_{v,t}}{\rho} \frac{ds}{dt} + \frac{d\varphi_{v,n}}{dt} - \frac{\varphi_{v,b}}{\tau} \frac{ds}{dt}; \\ \varphi_{\nu+1,b} &= \frac{\varphi_{v,n}}{\tau} \frac{ds}{dt} + \frac{d\varphi_{v,b}}{dt}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

Ez az egyenletrendszer áttekinthetően adja meg az átmenetet egy tetszőleges ν -edrendű gyorsulástól a következő magasabb $\nu+1$ -edrendű gyorsuláshoz.

3. A kiinduló pont legyen az elsőrendű gyorsulás, melynek componenseire nézve áll [46. §. (5)]:

$$\varphi_{1,t} = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}; \quad \varphi_{1,n} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{v^2}{\rho}; \quad \varphi_{1,b} = 0.$$

Ezeket az értékeket a (4)-be helyettesítve, azonnal nyerjük a másodrendű gyorsulás összetevőit:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{2,t} &= \frac{d^2 v}{dt^2} - \frac{v^3}{\varrho^2} \\ \varphi_{2,n} &= \frac{1}{v} \frac{d}{dt} \left(\frac{v^3}{\varrho} \right) \\ \varphi_{2,b} &= \frac{v^3}{\varrho \tau} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Ezen (5) formulákat legelőször *Résal* származtatta le (*Traité de Cinématique pure*. Paris, 1862, 271. l.), de a $\varphi_{2,t}$ jobboldali második tagját helytelenül pozitívnek találta, mit *Somoff* igazított helyre (v. ö. a köv. lapon idézett munkája 61. lapjának lábjegyzéket).

Sík mozgásoknál a (4) és (5) formulák redukálódnak a 61. §. (3) és (4) formuláira.

6. A térbeli pontmozgás, vonatkoztatva azt a radiusvector és a sebesség által meghatározott- és az ehhez hodographi viszonyban levő derékszögű két koordináta-rendszerre. (Szily tárgyalási módja).*

64. §. *A görbe vonalak geometriai sajátságainak összefüggése a pályák kinematikai tulajdonságaival. SZILY eljárása.*

A folytonos görbéket mindenkor mozgó pontok pályáinak tekintetni ugyan, de térbeli tulajdonságaik teljesen függetlenek az esetleg rajtok végbe menő mozgástól.

Viszont azonban a görbén történő mozgás kinematikai sajátságai lényegesen függenek a pálya geometriai viszonyaitól és így meg van adva a lehetőség a vonalak görbületi és csavarodási viszonyainak kinematikai fogalmak által való kifejezésére.

Az e célú tárgyalást lényegesen egyszerűsíti az a megfontolás, hogy azon egy független változót, t -t, melylyel a görbék jellemzői kifejezhetők [Math. repertorium 56., 67., 70—74. §§.] csak a folyó időnek kell tekintenünk, hogy az idézett geometriai viszonyok kinematikailag legyenek előtűntetve. Ilyenmű előtűntetési módot az 58. §. is mutat fel.

A görbületi és csavarodási viszonyok kinematikai tárgyalását

* A 64—71. §§. kifejtéseit SZILY KÁLMÁN: „*Adalék a pontmozgás tárgyalásához*» című értekezéséből merítjük, mely a M. T. Akadémia Matematikai és Természettudományi Értesítője VII. kötete 140—150 lapjain 1889-ben jelent meg. A jelölések is, a menynyire ez itt lehetséges volt, az értekezésével egyezők maradtak.

de Saint-Venant,* Résal** és Somoff*** kísérlették meg; az első a kérdést analitikailag, szilárd derékszögű coordináta-rendszerre vonatkoztatja; a második, kikerülendő az elsőnek bonyodalmas számításait, szintetikailag (geometrice) jár el; a harmadik egy sajátos műveletet, a geometriai differentiálást alkalmazva fejté meg a kérdést.

Szily eljárása anynyiban különbözik de Saint-Venant-étől, hogy coordinátáit nem mint ez, egy mozdulatlan, hanem egy a pont mozgását folytonosan követő és vele mozgó, forgó oly derékszögű tengely-rendszerre vonatkoztatja, melyet a mindenkor radiusvector és sebesség határoz meg. Ezen rendszer választása lényegesen egyszerűsíti a tárgyalást és az így származó mozgásegyenletek külalakja is sokkal jobban símul a mozgás számos problémájához, mint a más coordináta-rendszerekre vonatkozók formái.

65. §. A radiusvector és a sebesség —, a tangens és a (fő-)normális által meghatározott két coordináta-rendszer egymáshoz hodographi viszonyban van.

Legyen t időpontban A a mozgó-pont helye, $OA = r$ a vezérsugara, AA a sebessége (34. ábra, köv. l.).

1. Az A coordinátái valamely álló, derékszögű, de különben tetzőleges fekvésű, O kezdetű XYZ tengelyrendszerre nézve legyenek x, y, z , továbbá legyenek:

a radiusvector	r ;	derékszögű componensei	x, y, z ;
a sebesség	v ;	"	" x', y', z' ;
az elsőrendű gyorsulás	φ ;	"	" x'', y'', z'' ;
a másodrendű gyorsulás	ψ ;	"	" x''', y''', z''' ;

Húzzuk az r vezérsugarba eső és irányát folytató OR_1 egyenest; fectessünk továbbá a radiusvectoron és a sebességen át síkot (de Saint-Venant szerint ez a rectificáló-, Szily szerint a vector-sík); e síkban emeljük az r -re (OR_1 -re) merőlegesen az OR_2 egyenest és végre e síkra merőlegesen húzzuk pozitív normálisát, az OR_3 egyenest.

E szerint az R_1, R_2, R_3 egyenesek az O pontban szintén derékszögű rendszert alkotnak; pozitív irányaitak akként választjuk, hogy R_1, R_2, R_3 rendre az R_2R_3, R_3R_1, R_1R_2 síkok pozitív normálisai legyenek [Math. repertorium, 46. §. 46. l., 9. ábra]; az R_1, R_2, R_3 tengelyek iránycosinusai a szilárd XYZ rendszerre nézve rendre legyenek:

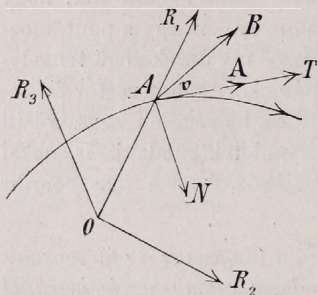
* «Mémoire sur les courbes non planes»; Journal de l'École Polytechnique, 30-me cahier p. 1. 1845.

** «Traité de Cinématique pure»; pp. 269—284. Paris, 1862.

*** «Theoretische Mechanik, I. Kinematik», oroszól fordította Ziwet; Cap. IV., pp. 46—64. 1878.

$$a_1, b_1, c_1; \quad a_2, b_2, c_2; \quad a_3, b_3, c_3.$$

Maga $R_1R_2R_3$ rendszer a pont minden helyzetére nézve az r és v által teljesen meg van határozva; a pont tovább haladásával a rendszer helyzete folytonosan változik, e mellett azonban derékszögűségét mindig megtartja és kezdete ugyanaz; a tengelyek irányváltozását a felírt iránycosinusok időbeli differentiálquotienszei adják meg.



34. ábra.

2. Az A helyzethez tartozó \overline{AT} érintő, \overline{AN} főnormális és az \overline{AB} binormális egyenesei (34. ábra) ugyancsak derékszögű tengelyrendszert alkotnak, melyről könnyű kimutatni, hogy a sebesség és a gyorsulás pozitív irányai által teljesen meg van határozva.

Ugyanis a v az érintővel egy irányú, a φ ellenben mindig az osculáló, vagy görbületi, azaz a TN síkba esik (51. és 52. §.); azért \overline{AT} és \overline{AN} valamint az ezekre közösen merőleges \overline{AB} irányai éppen úgy határozódnak meg a sebességből és gyorsulásból, mint az R_1, R_2, R_3 irányai a radiusvectorból és a sebességből.

Jelöljük a T, N, B egyenesek iránycosinusait az álló XYZ rendszerre nézve:

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \quad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \quad \alpha_3, \beta_3, \gamma_3;$$

ezek időbeli differentiálquotienszei adják meg a derékszögűségét szintén mindig megtartó TNB rendszer helyzetváltozását a pont mozgása közben.

3. Összehasonlítva az $R_1R_2R_3$ és a TNB rendszert, találjuk, hogy mindkettő derékszögű és a ponttal mozgó, forgó; az elsőben fellépő radiusvector és sebesség továbbá a gyorsulás szerepét a másodikban a sebesség és a gyorsulás illetve a másodrendű gyorsulás játssza, s i. t.

Ebből folyik, hogy mind azok a relációk és összefüggések, melyeket az $R_1R_2R_3$ rendszerre nézve találunk, azonnal érvényesíthetők TNB rendszerre vonatkozólag, ha rendre az:

$$a, b, c; \quad x, y, z, r; \quad x', y', z', v; \quad x'', y'', z'', \varphi$$

menynyiségek helyébe írjuk az:

$$\alpha, \beta, \gamma; \quad x', y', z', v; \quad x'', y'', z'', \varphi; \quad x''', y''', z''', \psi$$

menynyiségeket; e mellett az a, b, c indexeit az α, β, γ -ra változtatlanúl vive át.

A tengelyrendszerek ezen kapcsolatának rövid kifejezése: a *TNB rendszer az $R_1 R_2 R_3$ rendszerrel hodographi viszonyban van.*

66. §. *A sebesség egyenletei az $R_1 R_2 R_3$ rendszerre vonatkoztatva. A vezérsugár forgása az R_3 körül.*

1. A radiusvector vetületei a mozdulatlan XYZ rendszer tengelyeire;

$$x=ra_1; \quad y=rb_1; \quad z=rc_1 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

A v összetevői az R_1, R_2, R_3 tengelyek mentén legyenek v_1, v_2, v_3 ; ez az utóbbi mindig zérus, mert v az $R_1 R_2$ síkban fekszik; ezekből az XYZ rendszerre vonatkozó x', y', z' sebességi componensek:

$$x'=v_1 a_1 + v_2 a_2; \quad y'=v_1 b_1 + v_2 b_2; \quad z'=v_1 c_1 + v_2 c_2 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Differentiálva az (1) kifejezéseit az idő szerint és egybekapcsolva őket a (2) egyenleteivel, leszén:

$$\left. \begin{aligned} x' &= v_1 a_1 + v_2 a_2 = r' a_1 + r a_1' \\ y' &= v_1 b_1 + v_2 b_2 = r' b_1 + r b_1' \\ z' &= v_1 c_1 + v_2 c_2 = r' c_1 + r c_1' \end{aligned} \right\} . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Szorozva a (3) egyenleteit rendre a_1, b_1, c_1 -el, összegezve őket, és tekintetbe véve az $a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2$ iránycosinusoknak itt fel-lépő sajátosságait, [Math. repertorium 47. §.] azonnal ered:

$$v_1 = r', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

miáltal a (3) egyenleteiből marad:

$$v_2 a_2 = r a_1'; \quad v_2 b_2 = r b_1'; \quad v_2 c_2 = r c_1' \quad . \quad . \quad . \quad (3a)$$

2. Az ezekben előforduló v_2 sebességi összetevő az $R_1 R_2$ síkban az R_2 -höz párhuzamosan fekszik és az r -re merőleges, ezért a $v_2 : r$ viszony a pontnak az R_3 tengely körül való forgásának szögsebessége, melyet szokás szerint ω_{12} -vel jelölve:

$$\frac{v_2}{r} = \omega_{12}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

és így (3a)-ból:

$$a_1' = \omega_{12} a_2; \quad b_1' = \omega_{12} b_2; \quad c_1' = \omega_{12} c_2 \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Szorozva a (6) egyenleteket rendre a_2, b_2, c_2 -vel, összegyük írható (mivel $a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$):

$$\omega_{12} = a'_1 a_2 + b'_1 b_2 + c'_1 c_2 = -(a_1 a'_2 + b_1 b'_2 + c_1 c'_2) \quad . \quad . \quad (7)$$

Ellenben a (6) egyenletei négyzeteinek összege:

$$\omega_{12}^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

3. Az ω_{12} még másként is kifejezhető:

Az R_1 , R_2 , R_3 tengelyek derékszögűségénél fogva [Math. repertorium 46. §. (2)] ezek iránycosinusaira nézve áll, ha még a (6) egyenleteket is tekintetbe vesszük:

$$a_3 = b_1 c_2 - c_1 b_2 = \frac{1}{\omega_{12}} (b_1 c'_1 - c_1 b'_1), \text{ s i. t.}$$

Ámde, az r iránycosinusai a_1 , b_1 , c_1 lévén, áll:

$$b_1 c'_1 - c_1 b'_1 = b_1^2 \left(\frac{c'_1}{b_1} \right)' = \frac{y^2}{r^2} \left(\frac{z}{y} \right)' = \frac{1}{r^2} (yz' - zy');$$

avagy:

$$r^3 \omega_{12} a_2 = yz' - zy'; \quad r^3 \omega_{12} b_3 = zx' - xz'; \quad r^3 \omega_{12} c_3 = xy' - yx', \quad (8a)$$

mely összefüggésekből:

$$\omega_{12}^2 = r^{-4} [(yz' - zy')^2 + (zx' - xz')^2 + (xy' - yx')^2] \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Ezen eredmény teljesen megegyezik az 56. §. (1) vagy (1a) formulájának kifejezésével, ha ez utóbbit dt -vel osztva négyzetre emeljük. Ebből az ω_{12} kinematikai jelentése is adva van; ez ugyanis (mint már a 2. pontban említettük) a vezérsugar forgásának szögsebessége a mindenkor vezérsugar és sebesség által meghatározott $R_1 R_2$ -(rectificáló vagy vector-)síkban, mely forgást az idézett helyen $d\theta : dt$ -vel jeleltük, $df = \frac{1}{2} r^2 d\theta$ alatt a dt időelem közben leírt sectoriális területet értve.

67. §. *A gyorsulás egyenletei a TNB-rendszerre vonatkoztatva. A sebesség forgása a B körül.*

A megelőző §-ban bevezetett r ; v_1 , v_2 , v_3 ; ω_{12} mennyiségeknek itt v ; φ_1 , φ_n , φ_b és Ω_{12} mennyiségek felelnek meg, hol φ_b , a binormális gyorsulási componens, épen úgy zérus (51. és 52. §§.), mint előbb v_3 ; az Ω_{12} itt a pont v sebességének a binormális körüli forgásának szögsebessége.

Ebben a rendszerben e szerint az Ω_{12} a v sebességének a $(v\varphi)$ osculáló síkban történő forgásának szögsebessége, mely a sebesség (és vele az érintő) irányát az osculáló síkban változtatja.

Ezeket és a 65. §. jelöléseit szemmel tartva, a megelőző §. (4), (5), (6), (8) és (9) egyenleteiből itt leszen:

része teljesen megegyezik a (10)-nek $\omega_{23} dt = (\varphi_3 : v_2) dt$ megfelelő részeivel.

2. Más alakját az ω_{23} -nak is nyerhetni; áll ugyanis a vectorok sajátságai és (10) szerint:

$$\varphi_3 = x''a_3 + y''b_3 + z''c_3 = v_2\omega_{23}.$$

A 66. §. (8a) formuláiban az a_3, b_3, c_3 értékeit nyertük; helyettesítve ezeket az épen felírt φ_3 -ba és tekintetbe véve az (5)-öt és a (9)-et, a (10)-ből nyerjük:

$$\omega_{23} = r \frac{x''(yz' - zy') + y''(zx' - xz') + z''(xy' - yx')}{(yz' - zy')^2 + (zx' - xz')^2 + (xy' - yx')^2}, \quad (11)$$

mely kifejezés szintén teljesen megegyezik az 56. §. (5) és (2) formuláival.

3. A (10) és (11) azonnal átvihető a TNB rendszerre, ha Ω_{23} -al jelöljük a pont sebességének T tengely (az érintő) körül történő forgása szögsebességét. Tekintettel az (5₁)-re és ψ_b -vel jelezve a másodrendű gyorsulás binormális componensét, nyerjük:

$$\Omega_{23} = \frac{\psi_b}{\varphi_n} = \frac{\psi_b}{v\Omega_{12}} \quad (10_1)$$

$$\Omega_{23} = v \frac{x'''(y'z'' - z'y'') + y'''(zx'' - xz'') + z'''(xy' - yx')}{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - xz'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2} \quad (11_1)$$

Mivel itt Ω_{23} a pont v sebességének a T tengely (azaz a v sebesség iránya) körüli forgásának szögsebessége, azért ez nem egyéb, mint az oskuláló síknak az érintő körüli szögsebessége.

Ennek kifejezése minden tekintetben megegyezik az 58. §. (3) és (5) formuláival, mivel ha $d\varepsilon$ e forgás szöge, itt $\Omega_{23} = d\varepsilon : dt = (ds : dt) : (ds : d\varepsilon) = v : \tau$; hol τ a pálya csavarodásának sugara.

69. §. Az $a'_2, b'_2, c'_2; a'_3, b'_3, c'_3; a'_2, \beta'_2, \gamma'_2; a'_3, \beta'_3, \gamma'_3$ cosinussebességek számítása.

A 66. és 67. §§. (6) és (6₁) egyenleteivel kifejeztük az a'_1, b'_1, c'_1 és az $a'_1, \beta'_1, \gamma'_1$ cosinussebességeket; hátra van még a többi tizenkét iránycosinus differentíálquotienseinek kifejezése.

1. E végből szorozzuk a megelőző §. (10) egyenletét a_3 -mal és a 66. §. (7) egyenletét a_1 -el és képezzük különbségüket:

$$\omega_{23}a_3 - \omega_{12}a_1 = (a_3^2 + a_1^2)a'_2 + (a_3b_3 + a_1b_1)b'_2 + (a_3c_3 + a_1c_1)c'_2.$$

Ámde a tengely-rendszerek derékszögűségénél fogva:

$$a_1b_1 + a_3b_3 = -a_2b_2; \quad a_1c_1 + a_3c_3 = -a_2c_2;$$

és így a jobb oldalt írhatjuk:

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) a'_2 - a_2^2 a'_1 - a_2 b_2 b'_2 - a_2 c_2 c'_2 = \\ = a'_2 - a_2 \frac{1}{2} (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)' = a'_2.$$

Származik e szerint:

$$\left. \begin{aligned} a'_2 &= \omega_{23} a_3 - \omega_{12} a_1 \\ b'_2 &= \omega_{23} b_3 - \omega_{12} b_1 \\ c'_2 &= \omega_{23} c_3 - \omega_{12} c_1 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Továbbá, az $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$ s i. t. egyenletek első differenciálquotienséből:

$$a_3 a'_3 = -(a_1 a'_1 + a_2 a'_2) \quad \text{s i. t.}$$

Helyetteszve ide a'_1 -et a (6)-ból és a'_2 -öt a (12)-ből s i. t., marad rendre:

$$a'_3 = -\omega_{23} a_2; \quad b'_3 = -\omega_{23} b_2; \quad c'_3 = -\omega_{23} c_2 \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

2. A (12) és (13) egyenletek a *TNB* rendszerben:

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_2 &= \Omega_{23} \alpha_3 - \Omega_{12} \alpha_1 \\ \beta'_2 &= \Omega_{23} \beta_3 - \Omega_{12} \beta_1 \\ \gamma'_2 &= \Omega_{23} \gamma_3 - \Omega_{12} \gamma_1 \end{aligned} \right\}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12_1)$$

$$\alpha'_3 = -\Omega_{23} \alpha_2; \quad \beta'_3 = -\Omega_{23} \beta_2; \quad \gamma'_3 = -\Omega_{23} \gamma_2 \quad . \quad . \quad . \quad (13_1)$$

Ezek az összefüggések kifejezik a pálya normálisának és binormálisának időbeli változását és teljesen megegyeznek az 58. §. (6) egyenletei harmadik és első rendszerével.

70. §. Az elsőrendű gyorsulás componensei az $R_1 R_2 R_3$ -a, a másodrendűé a *TNB* rendszerben.

1. Helyettesítsük a 68. §.

$$r'_1 a_1 + (v_2^2 + v_1 v_2 r^{-1}) a_2 + v_2 a'_2 = \varphi_1 a_1 + \varphi_2 a_2 + \varphi_3 a_3$$

egyenletébe az a'_2 -et a (12) első egyenletével és egyenlítsük az így származó egyenlet két oldalán rendre az a_1 , a_2 , a_3 együtthatóit.

Származik ekként, a differenciálquotiensnek explicit kiírásával és az $\omega_{12} = v_2 : r$ összefüggés [66. §. (5)] tekintetbe vételével, a következő három egyenlet:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{dv_1}{dt} - \frac{v_2^2}{r} = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \omega_{12}^2; \\ \varphi_2 &= \frac{dv_2}{dt} + \frac{v_1 v_2}{r} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \omega_{12}) \\ \varphi_3 &= v_2 \omega_{23} = r \omega_{12} \omega_{23} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Itt $\varphi_1 = \varphi_r$, $\varphi_2 = \varphi_\theta$ a gyorsulás radiális és rotációs-, $\varphi_3 = \varphi_{\text{inn}}$ az $R_1 R_2$ -, azaz az (rv) -síkra merőleges összetevője [44. §. (7) és 56. §. (4) és 68. §. (10)].

2. A (14)-ből folyólag a TNB rendszerben a ψ másodrendű gyorsulásnak ψ_t , ψ_n , ψ_b componensei rendre :

$$\left. \begin{aligned} \psi_t &= \frac{d\varphi_t}{dt} - \frac{\varphi_n^2}{v} = \frac{d^2v}{dt^2} - v\Omega_{12}^2 \\ \psi_n &= \frac{d\varphi_n}{dt} + \frac{\varphi_t \varphi_n}{v} = \frac{1}{v} \frac{d}{dt} (v^2 \Omega_{12}) \\ \psi_b &= \varphi_n \Omega_{23} = v \Omega_{12} \Omega_{23} \end{aligned} \right\} \dots \dots (14)$$

Mintán [67. és 68. §§-ok végei] $\Omega_{12} = v : \rho$, $\Omega_{23} = v : \tau$, e formulák teljesen megegyeznek a 63. §. (5) rendszerével.

3. Ha a pont kezdőállapota (t_0 időre nézve helyzete és sebessége) adva van és a mozgás egész tartamára az $R_1 R_2 R_3$ rendszerre vonatkoztatott φ_1 , φ_2 , φ_3 gyorsulási összetevők ismeretesek, a (14) mozgásegyenletei, kapcsolatban a (6), (12), (13) differenciálegyenletekkel teljesen meghatározzák a mozgást; az egyenletek megoldása a mozgást leírja.

71. §. *Alkalmazás a pálya görbületi és csavarodási viszonyaira. Simuló (momentán-) csavar; momentán centrum.*

1. A TNB rendszer tárgyalásával a 68—70. §§-okban az Ω_{12} és Ω_{23} szögsebességeket vezettük be; az ott adott definíciók értelmében $vd\theta = ds$ az ívelem, továbbá $\Omega_{12} dt = d\theta$ az érintő forgásszöge a binormális körül, végre $\Omega_{23} dt = d\varepsilon$ az osculáló sík forgása (vagy a binormális rotációja) az érintő körül, [Math. repertorium 75b. §.]. LANCRET tétele szerint [u. o. 75a. (1)] a pálya két szomszédos pontjának főnormálisai egymással $d\eta$ szöget képeznek, hol

$$(d\eta)^2 = (d\theta)^2 + (d\varepsilon)^2.$$

2. [A n nev pontrendszereknek szilárd pont körül történő mozgásának egyik tétele az, hogy két vagy több olynemű forgás, melyek tengelyei találkoznak (közös ponttal bírnak), a vectorok módjára egyetlen egy forgássá tehetők össze. Ugyanis az összetevő forgásszögek (vagy szögsebességek) velük arányos hosszúságú oly egyenesek által képviseltetnek, melyek irányai a hozzájuk tartozó tengelyekével esnek egybe; ezen egyenesek geometriai eredője nagyság szerint az eredő forgás szögét (illetve szögsebességét), irány szerint a hozzátartozó forgástengelyt adja meg. Ezen anticipált tétel szerint] :

A $d\theta$ és a $d\varepsilon$ szögű forgások, melyeket a TNB rendszer dt időelem alatt végez és melyek elseje B , másika T tengely körül történik (hol a T merőleges a B -re) egy $d\eta = [(d\theta)^2 + (d\varepsilon)^2]^{\frac{1}{2}}$ szögű

4a. Az AE iránycosinusait a (16)-ból véve, nyerjük:

$$v_h = v \frac{\Omega_{23}}{\Omega}; \quad v_f = v \frac{\Omega_{12}}{\Omega} \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Más oldalról a forgás sebessége:

$$v_f = q\Omega,$$

melyet a (17) második egyenletével összehasonlítva, és tekintetbe véve az (5₁), (10₁) és (15) egyenleteket, származik:

$$\frac{1}{q} = \frac{\Omega^2}{v\Omega_{12}} = \frac{\Omega_{12}}{v} + \frac{\Omega_{23}^2}{v\Omega_{12}} = \frac{\varphi_n}{v^2} + \frac{\psi_b^2}{\varphi_n^3} \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Evvel a momentán csavartengely helyzete is meg van határozva.

Jegyzet. Tetszésüinktől függ, bármily O kezdőpontból kiinduló $R_1 R_2 R_3$ rendszerben az ω_{12} , ω_{23} szögsebességekből és a v_1 sebességi componensből ilyféle csavarszerű mozgást származtatni; de ezen végtelen sok csavarvonal közül az A pályájához egy sem simúl annyira, mint ezt a (15), (16), (18) formulák által a TNB rendszer mozgásával meghatározott csavarvonal teszi, melynek ugyanis a görbülete és a csavarodása valamint osculáló (görbületi) síkja is teljesen megegyezik az A pontban a pályáival.

E vonal e szerint a pálya *osculáló* (*simuló*) *csavargörbéje* [Math. repertorium, kiegészítések I. l.]

7. Centrális (középponti) mozgás.

72. §. *A centrális (középponti) mozgás jellemzője: a gyorsulás szilárd pont (a centrum) felé tart vagy ettől el van fordítva.*

1. Oly mozgás, melynél a gyorsulás mindig a térnek bizonyos pontja felé tart vagy attól el van fordítva, *centrális, középponti (köz-ponti) mozgás*nak neveztetik; az a szilárd pont pedig, a melytől a mozgó ponthoz húzott vezérsugár mentén a gyorsulás fekszik, a *mozgás centruma*.

Kiemeljük azonban, hogy a centrális mozgás ezen tulajdonsága *korántsem* fejezi ki azt, hogy a gyorsulás csak a centrumtól húzott r vezérsugár függvénye; a centrális gyorsulás nagysága általánosságban a vezérsugártól és ennek irányától függ.

A természetben, úgy látszik, nagyjából oly centrális erők lépnek fel, melyek maguk és így gyorsulásaik is csak a távolságtól függenek.

A centrális gyorsulás *előjelét* következőleg állapítjuk meg: a) a φ gyorsulás *positív*, ha iránya a *növekvő* r vezérsugárával megegyezik, ezen gyorsulás a *centrumtól el van fordítva*, azaz *taszító*; ellenben b) *negatív* a φ , midőn iránya a *fogyó* r -ével megegyezik, akkor φ a *centrum felé tart*, azaz *vonzó*.

2. Jelelje x, y, z a pont térbeli coordinátáit, ha a centrum az öszszrendezői rendszer kezdőpontja, akkor a φ centrális gyorsulás $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ öszszetevői rendre:

$$\varphi_x = \varphi \frac{x}{r}; \quad \varphi_y = \varphi \frac{y}{r}; \quad \varphi_z = \varphi \frac{z}{r};$$

vagy:

$$\varphi_x : \varphi_y : \varphi_z = x : y : z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Ez a centrális gyorsulás legjellemzőbb és legegyszerűbb ismeretető jele; szóval a *centrális gyorsulás öszszetevői oly viszonyban vannak egymáshoz, mint a mozgó pontnak a centrumra vonatkoztatott öszszrendezői.*

Ez az öszszefüggés még következőleg fejezhető ki:

$$y\varphi_z - z\varphi_y = 0; \quad z\varphi_x - x\varphi_z = 0; \quad x\varphi_y - y\varphi_x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

szóval: a centrális gyorsulás nyomatókának öszszetevői és e szerint maga ezen gyorsulás nyomatóka is zérus. [V. ö. az 55. §. (2) formuláit].

73. §. *A centrális mozgás mindig síkbeli mozgás. A felületek elve.*

Bebizonyítjuk, hogy a centrális mozgás mindenkor síkban történik és hogy a vezérsugar által leírt felületek területe az idővel arányosak.

1. Az első sajátságot a gyorsulás nyomatókának [a megelőző §. (2)] egyenleteiből azonnal nyerjük, ha még figyelembe vesszük az

$$\frac{d}{dt} (y v_z - z v_y) = (y \varphi_z - z \varphi_y); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

s í. t. általános öszszefüggéseket [53. §. (3)].

Következik, hogy a centrális gyorsulásnál a *sebesség nyomatékának componensei állandók*; jelevé ezeket rendre c_1, c_2, c_3 betűkkel, származik a megelőző §. (2) egyenleteiből:

$$\left. \begin{aligned} y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} &= c_1 \\ z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} &= c_2 \\ x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} &= c_3 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Szorozva ezeket az egyenleteket rendre x, y, z -vel, öszszegük:

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Ámde x, y, z a mozgó pont coordinátái; ezek az épen talált (4) egyenletnek felelnek meg, mely a *coordináták kezdőpontján átmenő*

síkot képvisel [Math. repertorium 43. §. (7)]; e szerint *centrális mozgásnál a pálya mindenkor síkbeli görbe; síkja a mozgás centrumán megyen át.*

Ez a körülmény rendkívül egyszerűsíti a centrális mozgások tárgyalását: ugyanis, a nélkül, hogy a tárgyalás általánossága legkisebb mértékben is szenvedne, elegendő, ha ily mozgást síkjában fekvő síkbeli öszszrendezői rendszerre vonatkoztatjuk.

2. A (2)-ben fellépő c_1, c_2, c_3 állandók a sebesség nyomatekának vetületei a koordináta-síkokra, avagy a vetületi mozgások felületi sebességeinek kétszeresei; a tényleges pályában pv a sebesség nyomateka és $\frac{1}{2}c$ a felületi sebesség; mivel az 53. §. (2) és (3) formulái szerint:

$$\frac{1}{2}c = \frac{1}{2}\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2},$$

nyerjük itt:

$$pv = c = 2 \frac{df}{dt} = \text{állandó} \dots \dots \dots (4)$$

hol f a pályában az r által leírt terület, melyre az 54. §. (1) formuláját alkalmazva

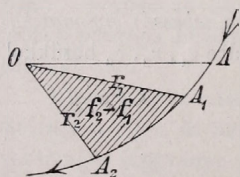
$$2 \frac{df}{dt} = c = r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{állandó} \dots \dots \dots (5)$$

Szóval: *centrális mozgásoknál a felületi sebesség és így a sebesség nyomateka is, állandó.*

3. *A felületek elve.* Kissé másként fejezhetjük ki az (5) egyenlet értelmét, ha azt integrálva a t_1 és t_2 időkre vonatkoztatjuk.

Származik:

$$f_2 - f_1 = c(t_2 - t_1) \dots \dots \dots (5a)$$



35. ábra.

szóval: a centrális mozgásnál a vezérsugár által a $t_2 - t_1$ időközben leírt $f_2 - f_1$ felület az időközzel *egyenesen arányos.*

Ezen öszszefüggést a *felületek elvének* nevezik; KEPLER volt az első, ki ezen tételt a bolygók mozgására nézve fennállónak találta; ezért ezt még KEPLER-féle *első törvénynek* is nevezik.

Ha $AA_1A_2 \dots$ a pont pályája (35. ábra) és OA az a tetszőlegesen választható vezérsugár, melytől kezdve számítjuk az f felületet, és ha A_1 és A_2 helyzetek a t_1 s t_2 időpontoknak felelnek meg, akkor AOA_1 felület $= f_1$, az AOA_2 felület $= f_2$ és az A_1OA_2 felület $= f_2 - f_1$, mely utóbbi arányos a leírására szükséges volt $t_2 - t_1$ időközzel.

Jegyzet. A felületek elve lényegében véve nem egyéb, mint a mozgás általános egyenleteinek egy első integrálja; ezen integrál éppen

a centrális mozgás jellemző tulajdonsága alapján képezhető, mely szerint a gyorsulás iránya mindig egy szilárd ponton megyen át.

74. §. *A centrális mozgás polárcoordinátákra vonatkoztatva. A pálya differentiálegyenlete. Apsis-vonalak.*

Czélszerű, a centrális mozgás néhány tulajdonságát polár összszerendezők által kifejezni, melyek bevezetése ilyenmő problémáknál mindenkor egyszerűsítést von maga után. Önként kínálkozik a mozgás centruma és síkja összszerendezői kezdőpont és sík gyanánt.

1. A gyorsulás sík polárcomponensei [44. §. (7)]:

$$\varphi_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2; \quad \varphi_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\vartheta}{dt} \right);$$

közülük a centrális mozgásnál az utóbbi *zérus*, mert a gyorsulás az *r* mentén fekszik, azaz nem bír a vezérsugárra merőleges componenssel.

Lesz a $\varphi_\vartheta = 0$ -ból, mint a megelőző §. (5) formulájában:

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = \text{constans} = c, \quad \text{vagy} \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{c}{r^2};$$

marad φ_r -ből:

$$\varphi = \varphi_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{c^2}{r^3} \quad \dots \dots \dots (1)$$

2. Könynyű a sebességet és a pálya differentiálegyenletét kifejezni.

All:

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = c \quad \dots \dots \dots (2)$$

hol *c* a *centrális* mozgásoknál állandó (általánosságban pedig változó).

Vezessünk be az *r* helyébe egy új változót, *u*-t, úgy hogy álljon:

$$u = \frac{1}{r} \quad \dots \dots \dots (3)$$

Ez által a (2)-ből:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = cu^2; \quad \dots \dots \dots (2a)$$

továbbá, mivel ϑ a *t* függvénye, *r* pedig a ϑ -tól függőnek tekinthető:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{d\vartheta} \cdot cu^2;$$

azaz:

$$\left. \begin{aligned} v_r &= \frac{dr}{dt} = -c \frac{du}{d\vartheta}; \\ v_\vartheta &= r \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{c}{r} = cu. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

ezenkívül:

E szerint centrális mozgásoknál:

$$\left. \begin{aligned} v^2 &= \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2}; \\ \text{vagy: } r &= c \sqrt{u^2 + \left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Továbbá a (4)-ből:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -c \frac{d^2u}{d\vartheta^2} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} - \frac{dc}{dt} \cdot \frac{du}{d\vartheta} = -c^2 u^2 \frac{d^2u}{d\vartheta^2} - \frac{dc}{dt} \cdot \frac{du}{d\vartheta},$$

$$\text{és így: } \varphi_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = -c^2 u^2 \frac{d^2u}{d\vartheta^2} - \frac{dc}{dt} \cdot \frac{du}{d\vartheta} - c^2 u^3.$$

Az egyenlet még írható:

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u + \frac{\varphi_r}{c^2 u^2} = -\frac{1}{c^2 u^2} \frac{dc}{dt} \cdot \frac{du}{d\vartheta} \dots \dots \dots (6)$$

3. Centrális mozgásoknál az $\frac{1}{2}c$ az állandó felületi sebesség és $\varphi_r = \varphi$ az összes gyorsulás, ezt ilyenkor R -rel jelöljük; ekkor a (6)-ból:

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u + \frac{R}{c^2 u^2} = 0 \dots \dots \dots (7)$$

mint a centrális pályák differenciálegyenlete polárkoordinátákban.

4. A pályának azon vezérsugarát, melynek végpontjában az egész sebesség a vezérsugarra merőleges, *apsis-vonalnak* nevezzük, magát a pontot pedig *apsis-pontnak*; jellemző tulajdonságát az által fejezhetjük ki, hogy az apsispontban a *radiális sebesség zérus*. Ennek feltétele:

$$\frac{dr}{dt} = 0;$$

azaz: az *apsis-vonal* az r távolságnak *maximuma* vagy *minimuma*.

75. §. Oly centrális mozgásnál, hol a gyorsulás csak a távolság függvénye, a sebesség négyzetének változása csak a helyzet-különbségtől függ, de független a helyzetváltozás útjától.

1. Kiindulunk a megelőző §-ban (5) és (7) alatt talált két egyenletről:

$$v^2 = c^2 \left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2 + c^2 u^2; \quad \frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u + \frac{R}{c^2 u^2} = 0.$$

A következőkben, egyszerűség kedvéért, ϑ legyen a független változó, [úgy tekinthetjük a ϑ -t, mint a mely a t időtől függ, míg az r (azaz $1:u$) és a v explicite ϑ -tól függene]:

Differenciálva az első egyenletet, nyerjük:

$$d(v^2) = 2c^2 \frac{du}{d\vartheta} \left(\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + u \right) d\vartheta;$$

azaz, mivel a fent tett megjegyzés szerint $\frac{du}{d\vartheta} d\vartheta = du$, tekintettel a pálya differenciálegyenletére és $u=r^{-1}$ -re,

$$d(v^2) = -2R \frac{du}{u^2} = +2R dr \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

2. Ha most az R gyorsulás csak az r függvénye, az (1) egyenlet jobb oldala írható:

$$+2R(r) dr.$$

Legyen $V(r)$ oly függvénye az r -nek (a gyorsulás *potenciálja*), hogy növekedése egyenlő legyen $R(r) dr$ -el, azaz: $d[V(r)] = +R(r) dr$, akkor áll:

$$R = \frac{dV}{dr} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

és (1)-ből:

$$\frac{1}{2} d(v^2) = +dV, \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

vagy:

$$\frac{1}{2} v^2 = V(r) + \text{Constans} \quad . \quad . \quad . \quad (3a)$$

A mozgó pont két különböző helyzetére nézve:

$$\frac{1}{2} v_2^2 - \frac{1}{2} v_1^2 = V(r_2) - V(r_1) \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Az r_1 és v_1 , valamint az r_2 és v_2 egymáshoz tartozó értékek; a sebesség négyzetének változása csakis a $V(r_1)$ és $V(r_2)$ -től azaz r_1 és r_2 két távolságtól függ, ellenben teljesen független attól az úttól, a melyet a mozgó pont befutott, a miközben a centrumtól számított távolsága r_1 -től r_2 -ig változott.

A (3a) a centrális mozgás differenciálegyenletének szintén egy integrálja és fennáll, ha a gyorsulás csak a távolság függvénye.

76. §. *A centrális mozgás néhány jellemző egyenlete, midőn a gyorsulás csak a távolság függvénye.*

1. A pálya differenciálegyenletében [74. §. (7)] az u helyébe r^{-1} -et írva:

$$R = -\frac{c^2}{r^2} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\vartheta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Ha R csak az r függvénye, a megelőző §. (3a) egyenlete szerint:

$$\frac{1}{2} v^2 = V + H \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

hol (a gyorsulás *potenciálja*) $V = \int R(r) dr$ és H az integráció állandója.

Mivel még a 73. §. (4) egyenlete szerint $pv = c$, a (2)-ből ered:

$$\frac{1}{2} \frac{c^2}{r^2} = V + H,$$

melyet a független r szerint differenciálva, nyerjük:

$$-\frac{c^2}{r^3} \cdot \frac{dr}{dr} = \frac{dV}{dr} = R(r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Az egyenlet lényegesen transformálódik, ha az r , a dr , a dp és a pálya ρ görbületi sugara között fennálló $r : \rho = dp : dr$ kettős viszonyt felhasználjuk.

Az érintett tétel (kettős viszony) azonnal származtatható a 36. ábrából.

Ugyanis, A és B a pálya két szomszédos pontja, $P\bar{U}$ és $Q\bar{V}$ a hozzájuk tartozó két érintő, α a közöttük lévő szög, O a mozgás centruma, továbbá:

$$AB \text{ iv} = ds; \quad A\bar{C} = \rho$$

$$\bar{O}\bar{P} = p; \quad \bar{O}\bar{Q} = p + dp; \quad \bar{O}\bar{A} = r; \quad \bar{O}\bar{B} = r + dr;$$

$$\bar{S}\bar{Q} = dp \quad \quad \quad \bar{D}\bar{B} = dr.$$

Az EQS , az ABD és az ABC háromszögekből:

$$dp = r \sin \varepsilon \, d\alpha; \quad dr = ds \sin \varepsilon; \quad ds : d\alpha = \rho;$$

$$dp : dr = r : \rho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Ezen összefüggés felhasználásával a (3)-ból

$$R(r) = -\frac{c^2}{r^3} \frac{r}{\rho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

2. A r^2 értékét a 74. §. (5) egyenletei elsejéből a fentírt (2)-vel egyesítve:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2(V+H) - \frac{c^2}{r^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

ezt pedig a területek elvével, ugyanis $r^2 d\vartheta = c dt$ -vel egybekapcsolva és $t-t_0$ kiküszöbölve, nyerjük:

$$\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 = 2 \frac{r^4}{c^2} (V+H) - r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

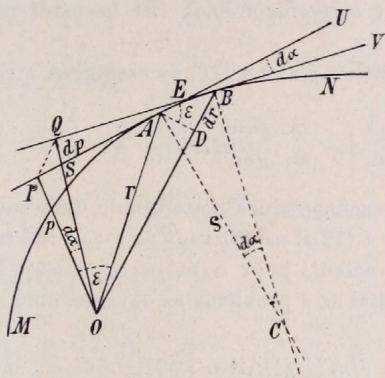
Ha r_0 , ϑ_0 a t_0 -hoz tartozó értékek, a (6)-ból és a (7)-ből ered:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta - \vartheta_0 &= \int_{r_0}^r \frac{c \, dr}{r \sqrt{2r^2(V+H) - c^2}} \\ t - t_0 &= \int_{r_0}^r \frac{r \, dr}{\sqrt{2r^2(V+H) - c^2}} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

mely összefüggések a ϑ szöget és a t időt fejezik ki az r segélyével, a V is csak az r függvénye lévén.

Könynyű átlátni, hogy a (8) két kifejezése az

$$A = \int_{r_0}^r \frac{dr}{r} \sqrt{2r^2(V+H) - c^2} \dots \dots \dots (9)$$



36. ábra.

határozott integrálnak a c és a H parameterek szerint képezett partiális differenciálquotiensei; az A a dynamikában *működés*-nek (*actió*-nak) nevezett mennyiséggel arányos; áll itt:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta - \vartheta_0 &= - \frac{\partial A}{\partial c} \\ t - t_0 &= + \frac{\partial A}{\partial H} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

3. Az r és a t összefüggésének differenciálegyenlete nevezetes alakba hozható.

a. Áll ugyanis $r^2 = x^2 + y^2$ és a gyorsulás derékszögű összetevői:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = R(r) \frac{x}{r}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = R(r) \frac{y}{r}; \quad \dots \dots \dots (11)$$

a sebesség egyenlete pedig a (2) szerint:

$$\frac{1}{2} (v^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = \int R(r) dr + H$$

és (11)-ből:

$$x \frac{d^2x}{dt^2} + y \frac{d^2y}{dt^2} = r R(r).$$

Mivel:
$$\frac{1}{2} \frac{d^2(r^2)}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(r \frac{dr}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right),$$

a megelőző két egyenlet összegezése adja:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2(r^2)}{dt^2} = rR(r) + 2 \int R(r) dr + 2H \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

hol H az integráció állandója [v. ö. (2)-öt].

Ez az r és t összefüggésének (itt harmadrendű) differenciálegyenlete.

b. Lényegesen más alakú a (12) összefüggés, a 73. §. (1) egyenletében:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = R(r) + \frac{c^2}{r^3}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12a)$$

mely az r és t összefüggésének másodrendű differenciálegyenlete.

A (12) vagy a (12a) az r^2 -t vagy az r -t az idő segítségével engedi meghatározni, a nélkül, hogy a pálya egyenletét ismernők, sőt az utóbbi egyenlet által ez a probléma az egyenesvonalú mozgás-éra van visszavezetve.

Jegyzet. I. Ha $rR(r) + 2 \int R(r) dr + 2H = \text{constans}$, akkor a (12) szerint $r^2 = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ és $R(r) = Kr^{-3}$, hol K a gyorsulás állandója; ez az eset COTES spirálisait adja, 117—119. §§.

II. Ha $R(r) = K_1 r + K_2 r^{-3}$, és $K_2 = -c^2$, akkor (12)-ből: $\frac{1}{2} (r^2)'' = 2K_1 r^2 + 2H$, vagy (12a)-ból: $r' = K_1 r$, mely egyenletek a 92. és 95. §§. sémái szerint oldandók meg.

III. Ha $R = Kr^{-2}$, akkor (12)-ből: $\frac{1}{2} (r^2)'' = -Kr^{-1}$; a (12a)-ból: $r'' = Kr^{-2} + c^2 r^{-3}$; s i. t.

Sok esetben ezek a (12) és (12a) egyenletek a vizsgálatnak igen alkalmas kiinduló pontjai gyanánt szolgálhatnak.

77. §. A mozgás differenciálegyenletei u és ϑ által kifejezve, midőn mind a radiális mind a rotációs gyorsulás a zérustól különböző.

Érdekes az általános esetnek, midőn a gyorsulás nem centrális, a tárgyalása az u és ϑ változók segítségével.

Jeleljük a gyorsulás vezérsugári és forgató összetevőit itt R -el és Θ -val; közönséges kifejezéseik a 44. §. (7) formulái szerint:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_r &= \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 = R \\ \varphi_\vartheta &= \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\vartheta}{dt} \right) = \Theta \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

A centrális mozgásnál fellépő $c=r^2 \frac{d\vartheta}{dt}$ jellemzőt és $r=\frac{1}{u}$ helyettesítést kívánjuk bevezetni; de a c -t most *nem szabad állandónak tekinteni* [74. §. 2. pontjának (6) formulája].

Származik: $\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{c}{r^2} = cu^2 \dots \dots \dots (2)$

miáltal az (1) második egyenlete:

$$u \frac{dc}{dt} = \Theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

A (3)-ból és a (2)-ből:

$$\Theta \frac{c}{u} = c \frac{dc}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(c^2)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(c^2)}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(c^2)}{d\vartheta} \cdot cu^2,$$

$$\frac{1}{2} \frac{d(c^2)}{dt} = \frac{\theta}{w^3} \dots \dots \dots (4)$$

Továbbá, mint a 74. §-ban:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d(u^{-1})}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = -c \frac{du}{d\vartheta};$$

ebből

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{d}{dt} \left(c \frac{du}{d\vartheta} \right) = -c \frac{d^2u}{d\vartheta^2} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} - \frac{dc}{dt} \cdot \frac{du}{d\vartheta}.$$

Nyerjük a (2) és (3) tekintetbe vételével:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= -c \frac{du}{d\vartheta}; & \frac{d^2 r}{dt^2} &= -c^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\vartheta^2} - \frac{\Theta}{u} \cdot \frac{du}{d\vartheta} \\ r \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 &= c^2 u^3 \end{aligned} \right\} \dots \dots (5)$$

Ezek szerint az (1) első egyenletében az $idő$ szerint képezett differenciálquotienszeket a ϑ szerint képezett (5) quotienssek által helyettesítve, ered:

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u + \frac{R}{c^2u^2} + \frac{\Theta}{c^2u^3} \cdot \frac{du}{d\vartheta} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Ez a mozgás általános esetében, feltéve *hogy ez sík, a pálya differenciálegyenlete*; ezt a 74. §. (5) és ezen §. (3) formulájából közvetlenül is nyertük volna.

Az egyenlet külső alakja hasonló a közönséges centrális mozgás egyenletéhez [74. §. (7)] és abba azonnal megyen át, mihamarabb benne θ helyébe z írjuk.

Ellenben, ha benne R helyébe zérus tétetik, ez oly mozgás

pályájának differentiálegyenlete leszen a melynél a gyorsulás mindig a sugárra merőleges irányú.

A (6) ot a dynamikában, az ellenálló közegben történő centrális mozgásnál fogjuk alkalmazni.

78. §. *A centrális mozgások hodographjának néhány általános tulajdonsága.*

Legyen PAL a pálya véges ívrésze (37. ábra), O a mozgás centruma, PQ az apsis vagy a polárkoordináták tengelye). A mozgó pont a pálya tetszőleges A helyében legyen, sebessége $\vec{AB}=v$; folytatva a sebesség irányát és arra az O -ból az E talppontig p merőlegeset bocsátva, a sebesség nyomatéka pv , mely a centrális mozgásnál mindig állandó [73. §., (4)]; e szerint:

$$\vec{OE}=p; \quad c=pv. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

1. Válaszszuk ezen \vec{OE} vonal mentén az F pontot úgy, hogy annak az O -tól számított OF távolságára nézve álljon:

$$\vec{OF}=\sqrt{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Ezenkívül, ugyancsak az \vec{OE} egyenesen akként válaszszuk az A pontot, hogy az a v sebességet nagyságra nézve képviselje:

$$\vec{OA} \text{ érték szerint} = v \text{ értékével}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

de ez, mivel az \vec{OE} egyenesben fekszik, a *sebesség irányára merőleges*, azaz, a sebesség irányától az O körül bal-felé $\frac{1}{2}\pi$ szöggel van elforogva.

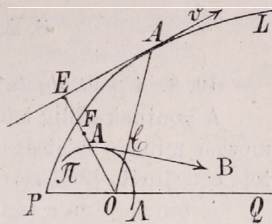
Miután (1) szerint: $v = \frac{c}{p} = \frac{\sqrt{c} \cdot \sqrt{c}}{p}$, a fentírt jelölések értelmében még áll:

$$\vec{OA} : \vec{OF} = \vec{OF} : \vec{OE} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Ha ugyanily szabály szerint szerkesztjük a pálya minden egyes A pontjához tartozó A sebességi pontot, nyerjük a pálya hodographját, a mely azonban az O körül bal-felé $\frac{1}{2}\pi$ -vel van elforgatva; a hodograph véges ívrésze a HA .

2. Húzzuk a hodograph A pontjához az \vec{AB} érintőt: ez az $\vec{OA}=r$ radiusvectort C -ben fogja metszeni. A hodograph tulajdonsága szerint,

a hodographban képzeletileg mozgó **A** pontnak a *sebessége* irány és nagyság szerint képviseli az eredeti pályához tartozó *gyorsulást*, jelen esetünkben pedig, hol a hodograph *O*-körül bal felé $\frac{1}{2}\pi$ -el van elforgatva: az \vec{AB} sebesség az eredeti pálya *A* pontjához tartozó gyorsulást nagyság szerint képviseli ugyan, de iránya szerint merőleges reá, és pedig az \vec{AB} -t az *O* körül $\frac{1}{2}\pi$ -el jobbra kell forgatni, hogy a gyorsulás irányát nyerjük.



37. ábra.

A következőkben mindig szemmel tartjuk jelen hodographunk azon sajátosságát, hogy érintője merőleges az *r* vezérsugarra.

Jeleljék: $\vec{OA} = \mathbf{r}$; $\vec{AB} = \mathbf{p}$, (5)

akkor tekintettel az *AOE* és az *AOE* hasonló két háromszögre:

$$\mathbf{p} : \mathbf{r} = \mathbf{r} : \mathbf{r}, \text{ vagy: } \mathbf{p} \mathbf{r} = \mathbf{r} \mathbf{r} \quad (6)$$

3. Mivel a centrális mozgás pályája mindig *sík* (73. §.), a hozzátartozó hodograph is *sík* görbe. Ezen görbe *görbületének* egyik sajátossága figyelmet érdemel.

Jelelje ϑ a szöget, melyet az *r* a síkban szilárd fekvésűnek tekintett *PQ* egyenessel képez; *s* a pálya-, σ a hodograph véges ívrészét és ρ a hodograph görbületi sugarát.

Mialatt az *r* iránya $d\vartheta$ szöggel változik, a hodograph \vec{AB} érintője *ugyanily* $d\vartheta$ irányváltozást szenved, mivel a 2. pont szerint \vec{AB} mindig merőleges az *r*-re; a σ is eközben $d\sigma$ -val növekszik, és ezen változás: $d\sigma = \rho d\vartheta$, vagy

$$\frac{d\sigma}{dt} = \rho \frac{d\vartheta}{dt} \quad (7)$$

Ámde: $\frac{d\sigma}{dt}$ a hodographban képzeletileg mozgó **A** pont sebessége és ez az eredeti pálya gyorsulása nagyságával egyenlő, melyet a 74. §. 3. pontjában *R*-el jelöltük; ezenkívül a centrális mozgásoknál áll $c = r^2 \frac{d\vartheta}{dt}$, és így:

$$\rho = \frac{r^2}{c} R \quad (8)$$

Jegyzet. Ha *R* csak az *r* távolság függvénye, mint a 75. és 76. §-ban, akkor a hodograph görbületi sugara, ρ szintén csak *r*-től függ.

8. A pont relatív mozgása.

79. §. *A pont abszolút és relatív mozgásáról általánosságban.*

A pontnak eddig tekintetbe vett mozgásainál, vonatkoztattuk a mozgás minden sajátját egy hallgatagon szilárd fekvésűnek tekintett koordináta-rendszerre.

A ténylegesen a természetben fellépő mozgásoknál azonban, a tapasztalat szerint *minden* test, a mely érzékeink alá eshetik, mozgásban van és egy testről sem állíthatjuk, hogy teljes nyugalomban volna.

Mindazonáltal kénytelenek vagyunk minden mozgást bizonyos geometriai alakhoz viszonyítani, azaz a nevezett pontnak az illető geometriai testhez viszonyított helyzetváltozását a pont mozgásának tekinteni.

Ámde, ez nem lesz az a mozgás, a melyet a pont a térben valóban változatlan fekvésűnek tekintett koordináta-rendszerhez viszonyítva végez. hanem egy másik, mozgásban lévő pontrendszerhez viszonyított mozgás.

Az első mozgás, a melyet a pont egy a térben *nyugró* (szilárd, mozdulatlan) pontra vagy koordináta-rendszerre vonatkozólag végez, a *pont abszolút mozgásának* mondatik; ellenben a pontnak valamely más mozgó ponthoz vagy mozgó összszerendezői rendszerhez viszonyított mozgása a *pont relatív mozgása*.

Ilyen relatív mozgásokra nézve a mindennapi tapasztalat szolgáltatja a legkülönbözőbb példákat.

Igy, a föld felületén vagy az ahoz közelségben történő mozgásokat a föld felületéhez avagy helyesebben mondva, a föld felületéhez szilárdan kapcsolt koordináta-rendszerhez viszonyítjuk.

Hasonlóan, midőn valamely haladó kocsiban mozgások történnek, ezeket a koci helyzetéhez viszonyítjuk, azaz a kocsi szilárd összeköttetésben lévő összszerendezői-rendszerre vonatkoztatjuk.

Valamenynyi ily esetekben az általános eljárás az, hogy azon (anyagi) pontrendszerhez, a melyhez a tárgyalt pont mozgását viszonyítjuk, egy koordináta-rendszert szilárdan kapcsolunk, a mely rendszer ezért ugyanazt a mozgást végzi, mint a nevezett pontrendszer.

Ezek szerint a relatív mozgást még közvetkezőleg definiálhatjuk. A relatív mozgás nem egyéb, mint mozgó összszerendezői-rendszerre vonatkoztatott mozgás.

80. §. *Pont mozgása egy másik mozgó ponthoz képest. Párhuzamos koordináta-rendszerek.*

Legyen A_1 és A_2 (38. ábra) két pont, mely általánosságban véve a

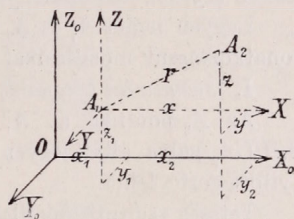


térben szilárd fekvésűnek tekintett $X_0 Y_0 Z_0$ összszenrendezői tengelyrendszerre vonatkozólag $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$ coordinátákkal bírjon.

Ezen pontok *abszolút összszenrendezői, sebességei, gyorsulásai* a következők:

$$\begin{array}{ccc} x_1, & y_1, & z_1, \\ \frac{dx_1}{dt}, & \frac{dy_1}{dt}, & \frac{dz_1}{dt}, \\ \frac{d^2x_1}{dt^2}, & \frac{d^2y_1}{dt^2}, & \frac{d^2z_1}{dt^2}, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} x_2, & y_2, & z_2, \\ \frac{dx_2}{dt}, & \frac{dy_2}{dt}, & \frac{dz_2}{dt}, \\ \frac{d^2x_2}{dt^2}, & \frac{d^2y_2}{dt^2}, & \frac{d^2z_2}{dt^2}. \end{array}$$

Ha az A_2 pont mozgását az A_1 pont mozgásához kívánjuk viszonyítani: akkor úgy járhatunk el legegyszerűbben, hogy az A_1 pontot oly XYZ coordináta-rendszer kezdő-pontjául választjuk, melynek tengelyei az eredeti $X_0 Y_0 Z_0$ rendszer-éihez párhuzamosak (38. ábra). Ezen XYZ rendszer az A_1 pont mozgásában minden tekintetben részt vesz, de úgy, hogy tengelyei mindig párhuzamosak maradjanak az $X_0 Y_0 Z_0$ rendszer-éihez.



38. ábra.

Az A_2 pontnak összszenrendezőit, vonatkoztatva a mozgó XYZ rendszerre, jeleljük x, y, z -vel. E szerint az A_2 pontnak az A_1 -hez viszonyított, *relatív helyzetét* az x, y, z relatív coordináták adják, melyekre nézve:

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1, \quad z = z_2 - z_1 \quad \dots \quad (1)$$

$$\text{Továbbá: } x' = x'_2 - x'_1, \quad y' = y'_2 - y'_1, \quad z' = z'_2 - z'_1 \quad \dots \quad (2)$$

$$x'' = x''_2 - x''_1, \quad y'' = y''_2 - y''_1, \quad z'' = z''_2 - z''_1 \quad \dots \quad (3)$$

Szóval: az A_2 pontnak az A_1 ponthoz viszonyított *relatív összszenrendezői, sebességei és gyorsulásai egyenlők a két pont abszolút összszenrendezői, sebességei és gyorsulásai különbségeivel.*

81. §. A relatív mozgás változatlan marad, ha a két ponthoz egyenlő nagyságú és egyenlő irányú sebességeket adunk.

Legyen u valamely sebesség, u_x, u_y, u_z ennek derékszögű componensei; adjuk ezt a sebességet a megelőző §. A_1 és A_2 pontjai abszolút sebességéhez, ez által a két pont sebességi összetevői:

$$\begin{array}{ccc} \frac{dx_1}{dt} + u_x, & \frac{dy_1}{dt} + u_y, & \frac{dz_1}{dt} + u_z; \\ \frac{dx_2}{dt} + u_x, & \frac{dy_2}{dt} + u_y, & \frac{dz_2}{dt} + u_z; \end{array}$$

Az A_2 -nek az A_1 -hez viszonyított sebességi componensei következők lesznek:

$$\frac{dx_2}{dt} + u_x - \left(\frac{dx_1}{dt} + u_x \right) = \frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \quad \text{s i. t.}$$

azaz: az A_2 pontnak az A_1 -hez viszonyított relativ sebessége ugyanaz maradt.

Általánosságban: midőn két (vagy több) pontból álló mozgó rendszerhez meg egy közös sebességet kapcsolunk, ez által a pontoknak egymáshoz viszonyított relativ mozgása nem változtatjuk.

82. §. *Két pontnak egymáshoz viszonyított relativ pályája egymással egyenlő, de ellentett fekvésű.*

Legyen ismét A_1 és A_2 két a térben tetszőlegesen mozgó pont; vonatkoztatassuk mozgásaikat egymásra.

I. Geometriai tárgyalás.

Az A_2 -pontnak az A_1 pontra vonatkozó relativ mozgása az A_2BCA_2 pálya által legyen előtüntetve (39. ábra), mely zárt vagy nyitott görbe lehet.

Tetszés szerinti időpillanatban az A_2 helyzete ezen relativ mozgásban adassék a rajz A_2 pontja által; az A_2 -nek relativ sebessége a pályának A_2 -höz húzott érintője mentén fekszik és u_2 értékű legyen.

Ha most a két ponthoz egyidejűleg $-u_2$ sebességet kapcsolunk, ez által ezen A_1 és A_2 pontok egymáshoz való viszonylagos mozgása nem változhatik (v. ö. a megelőző §-ot), de az A_2 pontnak relativ sebessége ezáltal zérussá, az A_1 -é pedig $-u_2$ -vé tétetik.

Ha a két pontból álló rendszerrel minden időpillanatban ily közös $-u_2$ sebesség közöltetik, mely az A_2 pont mindenkor sebességével egyenlő, de vele ellentett előjelű, akkor ez által elérjük azt, hogy az A_2 pont nyugalomban marad, míg az A_1 pont minden időpillanatban oly relativ sebességgel bír, a milyennel eredetileg az A_2 -pont mozgott az A_1 -hez képest, de ellentett irányban.

Ebből folyik, hogy az A_1 relativ pályája az A_2 -hez viszonyítva egyenlő alakú az A_2 -nek az A_1 -hez viszonyított mozgása pályájával, de a két pálya fekvése egymástól 180° -kal (π -vel) különbözik.

A tétel kiterjeszthető az A_1A_2 egybekapcsoló egyenesen fekvő tetszőszerinti oly A_3 pontra nézve, melynek az A_1 és A_2 pontoktól való két távolságának viszonya a mozgás közben ugyanaz marad (39. ábra).

Ilyen A_3 pontnak az A_1 -ponthoz viszonyított relativ mozgásánál oly pálya lesz leírva, mely az A_2 pont relativ pályájához hasonló és hasonló fekvésű, és melynek méretei az A_2 pályája méreteihez oly viszonyban vannak, mint A_1A_3 hosszúság az A_1A_2 hosszúsághoz.

A tétel az A_3 pontnak az A_2 -höz viszonyított relativ mozgására nézve még akkor is érvényes, ha az A_3 pont az A_1A_2 egyenes meg-
hosszszabbodása mentén fekszik.

II. Analitikai tárgyalás.

Az A_2 pontnak a A_1 ponthoz viszonyított mozgásának jellemző adatai a 80. §. (1), (2), (3) formulái szerint a következők:

$$x = x_2 - x_1, \quad x' = x'_2 - x'_1, \quad x'' = x''_2 - x''_1, \text{ s i. t. } \quad (1)$$

Ellenben, ha az A_1 pontnak az A_2 ponthoz viszonyított összszen-
dezőit ξ, η, ζ -vel jelöljük, akkor az A_1 -nek az A_2 -höz viszonyított
relativ mozgás jellemzői, ugyancsak a 80. §. sémája szerint:

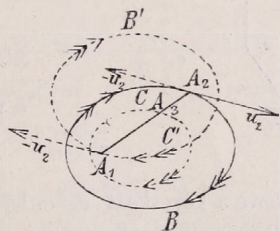
$$\xi = x_1 - x_2, \quad \xi' = x'_1 - x'_2, \quad \xi'' = x''_1 - x''_2; \quad (2)$$

azaz áll:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -x, & \eta &= -y, & \zeta &= -z, \\ \xi' &= -x', & \eta' &= -y', & \zeta' &= -z', \\ \xi'' &= -x'', & \eta'' &= -y'', & \zeta'' &= -z''. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Szóval: az A_1 pontnak az A_2 ponthoz való relativ mozgásánál, az összszen-
dezők, a sebességi és gyorsu-
lási componensek érték szerint egyen-
lők, de ellentett előjelűek, mint az A_2 pontnak az A_1 ponthoz való relativ
mozgásánál; ez pedig a keresett tétel.

Továbbá, ha az A_3 (39. ábra) pont
összszen-
dezőit x_3, y_3, z_3 -al jeleljük, és
megjegyezzük, hogy az



39. ábra.

$$\overline{A_1A_3} : \overline{A_1A_2}, \quad \overline{A_3A_2} : \overline{A_1A_2}$$

viszonyok *állandók*, és:

$$x_3 - x_1 : x_2 - x_1 = y_3 - y_1 : y_2 - y_1 = z_3 - z_1 : z_2 - z_1 = \overline{A_1A_3} : \overline{A_1A_2}, \quad (4)$$

akkor, tekintettel az (1)-re:

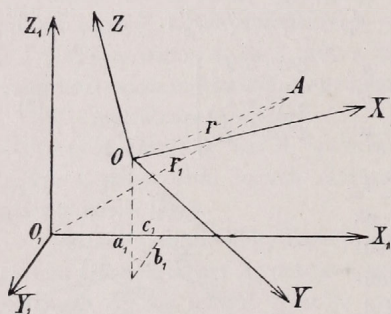
$$x_3 - x_1 = \frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{A_1A_2}} x, \quad y_3 - y_1 = \frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{A_1A_2}} y, \quad z_3 - z_1 = \frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{A_1A_2}} z. \quad (5)$$

Ámde az $x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1$ különbségek egyenlők az A_3 pontnak az A_1 -hez viszonyított *relativ összszen-
dezőivel*, melyek az (5)
szerint mindig *proportionálisak* az A_2 relativ összszen-
dezőivel, rövi-
den, az A_3 pont relativ pályájának méretei az $\frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{A_1A_2}}$ állandó tényezővel
különböznek csak az A_2 pont relativ pályája méreteitől.

83. §. *A relativ összszerendezők, sebességek és gyorsulások általános kifejezései tetszőlegesen mozgó koordináta-rendszerben.*

Jeleljék valamely tetszőleges A pontnak összszerendezőit az XYZ rendszerre vonatkozólag x, y, z ; egy másik, $X_1Y_1Z_1$ rendszerre vonatkozólag x_1, y_1, z_1 (40. ábra); áll [a Math. repertorium 49. §-ának (3) formulája szerint] ha egyszerűség kedvéért $a_1, a_2, a_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ maguk az X_1, Y_1, Z_1 tengelyek iránycosinusai:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 + x & a_1 + y & a_2 + z & a_3 \\ y_1 &= b_1 + x & \beta_1 + y & \beta_2 + z & \beta_3 \\ z_1 &= c_1 + x & \gamma_1 + y & \gamma_2 + z & \gamma_3 \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} x &= a + x_1 & a_1 + y_1 & \beta_1 + z_1 & \gamma_1 \\ y &= b + x_1 & a_2 + y_1 & \beta_2 + z_1 & \gamma_2 \\ z &= c + x_1 & a_3 + y_1 & \beta_3 + z_1 & \gamma_3 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$



40. ábra.

Ha ezen XYZ és $X_1Y_1Z_1$ koordináta-rendszerek egyikét nyugvónak (szilárdnak), másikat pedig mozgónak tekintetjük, akkor az (1) egyenletek kifejezik az A pont abszolút és relativ összszerendezői között fennálló össze függést, differenciálquotiensei pedig az abszolút és relativ sebesség és gyorsulás között fennállót.

A kilencz iránycosinusra nézve a következő egyenletek érvényesek [Math. repertorium 47. §. (2) második rendszere]:

$$\left. \begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 1 \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 &= 1 \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1 \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 &= 0 \\ \gamma_1a_1 + \gamma_2a_2 + \gamma_3a_3 &= 0 \\ a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (2)$$

Az O-nak a_1, b_1, c_1 összszerendezői (40. ábra), általánosságban változók; ugyanaz áll az $a_1, a_2, a_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ iránycosinusokra nézve.

Az (1) egyenletcsoport elsejének első differenciálquotiense az idő szerint

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= a'_1 + x & a'_1 + y' & a'_2 + z' & a'_3 + x a'_1 + y a'_2 + z a'_3 \\ y'_1 &= b'_1 + x' & \beta'_1 + y & \beta'_2 + z' & \beta'_3 + x \beta'_1 + y \beta'_2 + z \beta'_3 \\ z'_1 &= c'_1 + x' & \gamma'_1 + y' & \gamma'_2 + z' & \gamma'_3 + x \gamma'_1 + y \gamma'_2 + z \gamma'_3 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (3)$$

E mellett az $a_1, \dots, \gamma_3, a'_1, \dots, \gamma'_3$ -ra vonatkozólag a (2) szerint:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \alpha'_1 + \alpha_2 \alpha'_2 + \alpha_3 \alpha'_3 &= 0 \\ \beta_1 \beta'_1 + \beta_2 \beta'_2 + \beta_3 \beta'_3 &= 0 \\ \gamma_1 \gamma'_1 + \gamma_2 \gamma'_2 + \gamma_3 \gamma'_3 &= 0 \end{aligned} \right\} ; \quad . \quad . \quad . \quad (3a)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta'_1 \gamma_1 + \beta_1 \gamma'_1 + \beta'_2 \gamma_2 + \beta_2 \gamma'_2 + \beta'_3 \gamma_3 + \beta_3 \gamma'_3 &= 0 \\ \gamma'_1 \alpha_1 + \gamma_1 \alpha'_1 + \gamma'_2 \alpha_2 + \gamma_2 \alpha'_2 + \gamma'_3 \alpha_3 + \gamma_3 \alpha'_3 &= 0 \\ \alpha'_1 \beta_1 + \alpha_1 \beta'_1 + \alpha'_2 \beta_2 + \alpha_2 \beta'_2 + \alpha'_3 \beta_3 + \alpha_3 \beta'_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (3b)$$

A (3a) és (3b) szerint az $\alpha_1 \dots \gamma'_3$ kilencz quotiens közül csak három a független.

A (3)-ból új differentiálás útján lesz:

$$\left. \begin{aligned} x''_1 &= \alpha''_1 + x'' \alpha_1 + y'' \alpha_2 + z'' \alpha_3 + 2[x' \alpha'_1 + y' \alpha'_2 + z' \alpha'_3] + x \alpha''_1 + y \alpha''_2 + z \alpha''_3 \\ y''_1 &= \beta''_1 + x' \beta_1 + y' \beta_2 + z' \beta_3 + 2[x' \beta'_1 + y' \beta'_2 + z' \beta'_3] + x \beta''_1 + y \beta''_2 + z \beta''_3 \\ z''_1 &= \gamma''_1 + x'' \gamma_1 + y'' \gamma_2 + z'' \gamma_3 + 2[x' \gamma'_1 + y' \gamma'_2 + z' \gamma'_3] + x \gamma''_1 + y \gamma''_2 + z \gamma''_3 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Ezen egyenletek mellett a (3a)-n és (3b)-n kívül, épen ezek szerint még következő összefüggések állanak fenn:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \alpha''_1 + \alpha_2 \alpha''_2 + \alpha_3 \alpha''_3 + \alpha_1'^2 + \alpha_2'^2 + \alpha_3'^2 &= 0 \\ \beta_1 \beta''_1 + \beta_2 \beta''_2 + \beta_3 \beta''_3 + \beta_1'^2 + \beta_2'^2 + \beta_3'^2 &= 0 \\ \gamma_1 \gamma''_1 + \gamma_2 \gamma''_2 + \gamma_3 \gamma''_3 + \gamma_1'^2 + \gamma_2'^2 + \gamma_3'^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (4a)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 \gamma''_1 + \beta_2 \gamma''_2 + \beta_3 \gamma''_3 + 2[\beta'_1 \gamma'_1 + \beta'_2 \gamma'_2 + \beta'_3 \gamma'_3] + \gamma_1 \beta''_1 + \gamma_2 \beta''_2 + \gamma_3 \beta''_3 &= 0 \\ \gamma_1 \alpha''_1 + \gamma_2 \alpha''_2 + \gamma_3 \alpha''_3 + 2[\gamma'_1 \alpha'_1 + \gamma'_2 \alpha'_2 + \gamma'_3 \alpha'_3] + \alpha_1 \gamma''_1 + \alpha_2 \gamma''_2 + \alpha_3 \gamma''_3 &= 0 \\ \alpha_1 \beta''_1 + \alpha_2 \beta''_2 + \alpha_3 \beta''_3 + 2[\alpha'_1 \beta'_1 + \alpha'_2 \beta'_2 + \alpha'_3 \beta'_3] + \beta_1 \alpha''_1 + \beta_2 \alpha''_2 + \beta_3 \alpha''_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4b)$$

Ezek a pont relativ összrendezőire, sebességeire és gyorsulásaira vonatkozó legáltalánosabb formulák, derékszögű koordináta-rendszerre nézve.

Jegyzet. Az e helyen felírt egyenleteket a merev pontrendszerek általános mozgása relativ sebessége és gyorsulása tárgyalásánál, különösen a CLAIRAUT-CORIOLIS-féle tétel megvizsgálása alkalmával szintén fogjuk találni, ezért részletes értelmezésük is czélszerűbben ott történik.

84. §. *Állandó helyzetű két tengelyrendszerre vonatkozólag a sebességek és bármily rendű gyorsulások ugyanazok.*

A megelőző §-ban származtatott kifejezéseket arra az esetre alkalmazzuk, midőn $a_1, b_1, c_1, \alpha_1 \dots \gamma_3$ állandó mennyiségek.

Ekkor az x_1, y_1, z_1 új összrendezők *tetszésszerűnti* differentiál-quotientseire nézve a 83. §. (1) formulái szerint:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^n x_1}{dt^n} &= \frac{d^n x}{dt^n} \alpha_1 + \frac{d^n y}{dt^n} \alpha_2 + \frac{d^n z}{dt^n} \alpha_3 \\ \frac{d^n y_1}{dt^n} &= \frac{d^n x}{dt^n} \beta_1 + \frac{d^n y}{dt^n} \beta_2 + \frac{d^n z}{dt^n} \beta_3 \\ \frac{d^n z_1}{dt^n} &= \frac{d^n x}{dt^n} \gamma_1 + \frac{d^n y}{dt^n} \gamma_2 + \frac{d^n z}{dt^n} \gamma_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Négyzetre emelve és összegezve ezen egyenleteket és figyelembe véve az $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ irányszögek között fennálló összefüggéseket, melyek [a Math. repertorium 47. §. (2) első rendszere szerint] :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1 \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 &= 1 \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 &= 0 \\ \alpha_3 \alpha_1 + \beta_3 \beta_1 + \gamma_3 \gamma_1 &= 0 \\ \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

alakban írhatók, nyerjük :

$$\left(\frac{d^n x_1}{dt^n} \right)^2 + \left(\frac{d^n y_1}{dt^n} \right)^2 + \left(\frac{d^n z_1}{dt^n} \right)^2 = \left(\frac{d^n x}{dt^n} \right)^2 + \left(\frac{d^n y}{dt^n} \right)^2 + \left(\frac{d^n z}{dt^n} \right)^2 \quad (3)$$

E szerint : a sebesség és gyorsulás (és a még a magasabb rendű gyorsulások is) ugyanazok maradnak, bármily helyzetű és fekvésű, *szilárd (nyugró)* tengelyrendszerre is vonatkoztassuk azokat.

85. §. *Sík mozgás vonatkoztatása a síkban forgó derékszögű összrendezői tengelyrendszerre. Állandó szögsebesség.*

Számos esetben kívánatos valamely síkbeli mozgást oly derékszögű tengelyrendszerre vonatkoztatni, mely a mozgás síkjának bizonyos pontja körül, a mozgás síkjában forog.

Ha XY a nyugvó, X_1Y_1 a forgó koordináta-rendszer (41. ábra), α az X és az X_1 két pozitív tengely között lévő szög, akkor valamely A pontnak összrendezőire nézve áll [Math. repertorium 50. §. (1)] :

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= +x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y_1 &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} x &= x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha \\ y &= x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 &= x^2 + y^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

1. Induljunk ki az *első* csoportból és képezzük a relatív mozgás adatait az X_1Y_1 rendszerre nézve.

Ha az X_1Y_1 rendszer forgásának szögsebességét ω -val jeleljük :

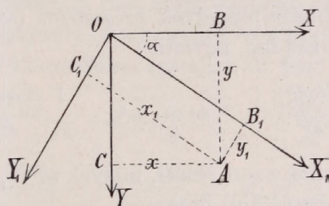
$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}, \dots \dots \dots (2)$$

az (1)-ből némi összevonás után :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= + \frac{dx}{dt} \cos \alpha + \frac{dy}{dt} \sin \alpha + \omega y_1 \\ \frac{dy_1}{dt} &= - \frac{dx}{dt} \sin \alpha + \frac{dy}{dt} \cos \alpha - \omega x_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

A relativ sebességek felírt kifejezéseinek jobb oldalai két fajta tagokból állanak : nevezetesen

$$a \quad \frac{dx}{dt} \cos \alpha + \frac{dy}{dt} \sin \alpha ; \quad \text{és} \quad a \quad - \frac{dx}{dt} \sin \alpha + \frac{dy}{dt} \cos \alpha$$



41. ábra.

részek az X_1Y_1 rendszerre vonatkozó sebességek azon részei, a melyek csak az X_1Y_1 rendszer helyzetétől (az α szögtől) függenek ; ellenben a többi két tag :

$$\omega y_1 \quad \text{és} \quad - \omega x_1$$

az X_1Y_1 rendszer mozgásától, közelebből pedig forgásának ω szögsebességétől függő részei.

2. A relativ gyorsulásokra nézve pedig (3)-ból :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= + \frac{d^2x}{dt^2} \cos \alpha + \frac{d^2y}{dt^2} \sin \alpha + \frac{d\alpha}{dt} \left(- \frac{dx}{dt} \sin \alpha + \frac{dy}{dt} \cos \alpha \right) + \frac{d\omega}{dt} y_1 + \omega \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{d^2y_1}{dt^2} &= - \frac{d^2x}{dt^2} \sin \alpha + \frac{d^2y}{dt^2} \cos \alpha + \frac{d\alpha}{dt} \left(- \frac{dx}{dt} \cos \alpha - \frac{dy}{dt} \sin \alpha \right) - \frac{d\omega}{dt} x_1 - \omega \frac{dx_1}{dt} \end{aligned}$$

Ámde a jobboldali részek zárójeles tagjaira nézve a (3) formulák szerint :

$$\frac{dx}{dt} \cos \alpha + \frac{dy}{dt} \sin \alpha = \frac{dx_1}{dt} - \omega y_1, \quad - \frac{dx}{dt} \sin \alpha + \frac{dy}{dt} \cos \alpha = \frac{dy_1}{dt} + \omega x_1.$$

Ezeket helyettesítve és tekintetbe véve, hogy :

$$2\omega \frac{dx_1}{dt} + x_1 \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{x_1} \frac{d(\omega x_1^2)}{dt}, \quad 2\omega \frac{dy_1}{dt} + y_1 \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{y_1} \frac{d(\omega y_1^2)}{dt},$$

nyerjük :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= + \frac{d^2 x}{dt^2} \cos \alpha + \frac{d^2 y}{dt^2} \sin \alpha + \omega^2 x_1 + \frac{1}{y_1} \frac{d(\omega y_1^2)}{dt} \\ \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= - \frac{d^2 x}{dt^2} \sin \alpha + \frac{d^2 y}{dt^2} \cos \alpha + \omega^2 y_1 - \frac{1}{x_1} \frac{d(\omega x_1^2)}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Tekintettel a felírt (4) egyenletek jobb oldalainak szerkezetére, észreveszszük, hogy a relativ gyorsulások kifejezéseinek első két-két tagja, ugyanis :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} \cos \alpha + \frac{d^2 y}{dt^2} \sin \alpha; \quad \text{és} \quad - \frac{d^2 x}{dt^2} \sin \alpha + \frac{d^2 y}{dt^2} \cos \alpha$$

csak az $X_1 Y_1$ koordináta-tengelyek helyzetétől (az α szögtől) függ ; ellenben a többi két-két tag, ugyanis :

$$\omega^2 x_1 + \frac{1}{y_1} \frac{d(\omega y_1^2)}{dt}; \quad \text{és} \quad \omega^2 y_1 - \frac{1}{x_1} \frac{d(\omega x_1^2)}{dt}$$

a relativ gyorsulásoknak azon részei, melyek az $X_1 Y_1$ rendszer mozgásától, (az ω szögsebességtől) függenek.

A (4) kifejezések egész általánosságban véve érvényesek ; de ha azokat alkalmazni akarjuk, akkor az $X_1 Y_1$ rendszer forgásának időbeli lefolyását, azaz az α szöget mint az időnek függvényét kell ismer-nünk ; akkor az ω és a $\frac{d\omega}{dt}$ az időnek adott függvényei gyanánt tekin-tendők.

I. *Jegyzet* : A forgó koordináta-tengelyrendszer forgássebessége állandó.

Ha $\omega = \text{constans}$, és így $\frac{d\omega}{dt} = 0$, a (3) és (4) formulákból lesznek :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= + \frac{dx}{dt} \cos \alpha + \frac{dy}{dt} \sin \alpha + \omega y_1 \\ \frac{dy_1}{dt} &= - \frac{dx}{dt} \sin \alpha + \frac{dy}{dt} \cos \alpha - \omega x_1 \end{aligned} \right\} \quad (3a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= + \frac{d^2 x}{dt^2} \cos \alpha + \frac{d^2 y}{dt^2} \sin \alpha + \omega^2 x_1 + 2 \omega \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= - \frac{d^2 x}{dt^2} \sin \alpha + \frac{d^2 y}{dt^2} \cos \alpha + \omega^2 y_1 - 2 \omega \frac{dx_1}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (4a)$$

II. *Jegyzet*. Ezen §. (4) és (4a) egyenletei a CLAIRAUT-CORIOLIS-féle tétel speciális eseteinek tekinthetők. (V. ö. a 83. §. *Jegyzetét*, 105. l.).

9. A pont mozgásának leírása.

86. §. A mozgás teljes ismeretéhez szükséges adatok. A mozgás leírása. Három független meghatározó rész.

A pont mozgását teljesen ismerjük, ha minden időpillanatra nézve ismerjük annak helyzetét a térben, annak sebességét és gyorsulását, összesen e szerint a nevezett mennyiségek vector jellegénél fogva, kilencz meghatározó részt.

Kissé másként is fejezhetjük ki ezen megállapodást, mondván, hogy a pont mozgását teljesen leírhatjuk*, ha minden időpillanatra nézve adva van helyzete, sebessége és gyorsulása.

A kilencz meghatározó rész közül azonban csak három a független, mivel az összszerendezők, a sebességek és a gyorsulások között mindig a következő hat kinematikai egyenlet áll fenn:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt}, & v_y &= \frac{dy}{dt}, & v_z &= \frac{dz}{dt}; \\ \varphi_x &= \frac{d^2x}{dt^2}, & \varphi_y &= \frac{d^2y}{dt^2}, & \varphi_z &= \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

Ha nem derékszögű, hanem tetszőleges más rendszerre vonatkoztatjuk a mozgást, az összszerendezők, a sebességek és gyorsulások között megfelelő más hat egyenlet áll fenn, úgy, hogy a független meghatározó részek száma mindig három marad.

Ezen három ismeretlen rész meghatározására általánosságban véve három összefüggés szükséges, mely különböző jellegű is lehet.

Sokszor az összefüggések közvetlenül adják meg a három meghatározó részt; rendesen azonban e célra matematikai eljárások szükségesek, melyek természete-, az adott három összefüggés jellege szerint nagyon különböző lehet (l. a köv. §-ot).

87. §. Az összszerendezők, vagy a sebességek vagy a gyorsulások az ismert adatok.

1. A legegyszerűbb eset az, midőn a coordináták az időnek ismert függvényei:

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t), \quad z=f_3(t) \dots \dots \dots (1)$$

Ezek az egyenletek a mozgás leírására teljesen elegendők; a többi meg nem adott hat meghatározó rész differenciálás által azonnal nyerhető:

* Ez a kifejezés Kirchhoff-tól ered (1873).

$$v_x = f'_1(t), \quad v_y = f'_2(t), \quad v_z = f'_3(t) \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

$$\varphi_x = f''_1(t), \quad \varphi_y = f''_2(t), \quad \varphi_z = f''_3(t) \quad . \quad . \quad . \quad (1b)$$

2. Szintén egyszerű eset az, midőn a *sebességi* összetevők advák mint az időnek ismert függvényei, azaz ha:

$$v_x = g_1(t), \quad v_y = g_2(t), \quad v_z = g_3(t) \quad . \quad . \quad . \quad (2a)$$

A megelőző §. (1) egyenletcsoportjai elsejéből ki fogjuk mutatni, hogy ez a három *függvény* nem elegendő a meghatározó adatok teljes kiszámítására, hanem még *három állandónak* az ismerete szükséges.

A gyorsulás összetevői azonnal származnak ugyan differentiálás útján:

$$\varphi_x = g'_1(t), \quad \varphi_y = g'_2(t), \quad \varphi_z = g'_3(t); \quad . \quad . \quad . \quad (2b)$$

ellenben az *összrendezők* kiszámítandók az adott:

$$\frac{dx}{dt} = g_1(t), \quad \frac{dy}{dt} = g_2(t), \quad \frac{dz}{dt} = g_3(t) \quad . \quad . \quad . \quad (2aa)$$

egyenletekből, melyek első rendű és első fokú differentiál-egyenletek.

A (2aa) egyenletekből quadratura útján következik:

$$\left. \begin{aligned} x &= \int g_1(t) dt + C_1 \\ y &= \int g_2(t) dt + C_2 \\ z &= \int g_3(t) dt + C_3 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Ezek szerint az *összrendezők* teljes ismeretéhez a $g_1(t)$, $g_2(t)$, $g_3(t)$ függvényeken kívül még az integrációnak C_1 , C_2 , C_3 állandói szükségesek. Ezen utóbbiak a mozgás közelebbi feltételeiből következnek, mint azt a kinematika részletes részének (90—130. §§.) példáiban látni fogjuk.

3. Gyakran fordul elő az az eset, hogy a *gyorsulás* összetevői advák mint az időnek ismert függvényei; ez különösen a dinamikai problémák tárgyalásánál szokott lenni.

Ilyenkor:

$$\varphi_x = h_1(t), \quad \varphi_y = h_2(t), \quad \varphi_z = h_3(t). \quad . \quad . \quad . \quad (3b)$$

az adott függvények; de a megelőző §. (1) egyenleteinek második csoportjából kimutatjuk, hogy ezek itt nem elegendők a mozgást jellemző adatok teljes kiszámítására, hanem még az integráció *hat állandóját* kell ismernünk.

Az adott egyenletek ugyanis következőleg írhatók fel :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = h_1(t); \quad \frac{d^2y}{dt^2} = h_2(t); \quad \frac{d^2z}{dt^2} = h_3(t); \quad \dots \quad (3bb)$$

ezek három egyenlethől álló, másodrendű és elsőfokú differenciál-egyenletrendszeret képeznek.

Egyszeri integráció útján (3bb)-ből a *sebesség* összetevői :

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \int h_1(t) dt + D_1 \\ v_y &= \int h_2(t) dt + D_2 \\ v_z &= \int h_3(t) dt + D_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3a)$$

Kétszeri integráció útján az *összszrendezők* :

$$\left. \begin{aligned} x &= \int \left[\int h_1(t) dt \right] dt + D_1 t + E_1 \\ y &= \int \left[\int h_2(t) dt \right] dt + D_2 t + E_2 \\ z &= \int \left[\int h_3(t) dt \right] dt + D_3 t + E_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Az utóbbi két egyenletrendszer értelmében, ha a gyorsulások ismereteseek, a $h_1(t)$, $h_2(t)$, $h_3(t)$ függvényeken kívül még az integráció-nak (a mozgás közelebbi feltételeiből meghatározandó) *hat állandója*, a D_1 , D_2 , D_3 és E_1 , E_2 , E_3 szükséges, hogy a sebességeket és az összszrendezőket teljesen lehessen kiszámítani.

88. §. *Általánosítás. A pont kinematikájának általános problémája visszavezetve matematikai problémára.*

1. A pont mozgásának általános problémája rendesen az, hogy az adott három egyenlet (vagy összszefüggés, 86. §), csak a mozgást jellemző oly három kapcsolatot fejez ki, mely az összszrendezők, a sebesség és a gyorsulás összetevői és az idő összszefüggését adja az illető mozgásra nézve.

Ezen három egyenlethez járul még a fennálló hat kinematikai egyenlet az összszrendezők, sebesség és gyorsulás összetevői között [86. §. (1)].

A kilencz egyenlet derékszögű coordinátákban írható :

$$\left. \begin{aligned} F_1(x, y, z, v_x, v_y, v_z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, t) &= 0, \\ F_2(x, y, z, v_x, v_y, v_z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, t) &= 0, \\ F_3(x, y, z, v_x, v_y, v_z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, t) &= 0; \\ v_x &= \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}; \\ \varphi_x &= \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \varphi_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \varphi_z = \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

A differenciálegyenletek ezen rendszerének *megoldása* annyit jelent, mint az egyes, az egyenletrendszernek megfelelő $x, y, z; v_x, v_y, v_z; \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ mennyiségeket az időnek explicit függvényei által fejezni ki.

A felírt *kilencz* egyenletet rendszeren *három* egyenletre szokás visszavezetni az által, hogy a *kilencz* egyenletből az $x, y, z; v_x, v_y, v_z; \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ mennyiségek közül *hármat explicite* fejezünk ki a többi hat mennyiség és az idő által.

2. A pont mozgásának általános problémáját a kinematikában (de a dynamikában is) rendszeren úgy szokás formulázni, hogy a $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ gyorsulási componensek explicite kifejeztetnek, $x, y, z; v_x, v_y, v_z$ és t által, úgy hogy :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= X(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t) \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t) \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= Z(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

a három egyenletre redukált rendszere az eredetileg, (1) alatt, *kilencz* egyenletből álló rendszernek.

A matematika nyelvén mondva, a (2) csoport a *simultán* (együttesen fennálló) *másodrendű differentialegyenleteknek* három egyenletből álló *rendszere*.

A rendszert sokszor következő rövidített alakban szokás felírni :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z \dots \dots \dots (2a)$$

Az analysis feladata, ezen egyenletrendszert megoldani, illetve integráljait felkeresni, azaz, az x, y, z öszszrendezők számára azokat a függvényeket találni, melyek a (2) egyenleteket kielégítik és a mozgás speciális problémája feltételeinek is megfelelnek. Ha ez megtörtént, akkor a pont mozgásának problémája meg van fejtve.

3. A megelőző §§-ok tárgyalásaiból kiderül, hogy a *pont mozgásának kinematikai problémája vissza van vezetve matematikai problémára*.

A (2) vagy a (2a) rendszer egyenleteit sokszor a *mozgás egyenletei-nek* nevezik.

A mozgás egyenleteinek integrációjára nézve *általánosságban* kevés módszer létezik, de számos speciális esetben a gyorsulás összevetői oly tulajdonsággal bírnak, hogy az egyenleteknek egyszeri, sokszor kétszeri integrációja lehetségessé válik.

Mindenezen esetekben az integráció fogatosítására különböző módszerek alkalmazhatók, melyeket a pont kinematikája részletes részének (90—130. §§.) megfelelő helyein tárgyalni fogunk.

De mindig szem előtt tartandó az, hogy az egyenletek teljes integráljaiban az integrációnak *hat* állandója lép fel, melyet minden egyes problémára nézve ennek speciális feltételeiből külön kell meghatározni.

10. A pont kényszermozgása.*

89. §. *Szabad mozgás. Kényszer és akadály. Kényszermozgás. A pont mozgása szabadságának különböző fokai.*

1. Ha a pont mozgása akadály vagy korlátozó feltétel nélkül történik, azt *szabad mozgásnak* nevezik; a pont minden irányban egyenlő könnyűséggel mozoghat el.

2. Valamely *feltétel* a pont mozgathatóságát korlátozza. E korlátozás általánosságban véve kétféleképen nyilvánulhat.

a. Az első esetben a feltétel kényszeríti a pontot, hogy mozgás közben bizonyos felületen vagy görbén maradjon; ily feltételt *kényszerítőnek* nevezhetni.

b. A második esetben a feltétel megakadályozza, hogy a mozgás a tér bizonyos részében történhessék, míg a tér másik részében a mozgás szabadon mehet végbe; ily feltételt *akadályozónak* vagy *határ-feltételnek* nevezik.

Valamely mozgó pontra nézve az $r=a$ feltétel kifejezi, hogy a pont az a sugarú gömbfelületen tartozik maradni; ez kényszerítő feltétel. Ellenben az $r \leq a$ feltétel értelmében a pont az a sugarú gömb belsejében szabadon mozoghat, de belőle el nem távozhatik; ez akadályozó feltétel.

Rendesen a kényszerítő feltételt röviden *feltételnek*, a másikat *akadály- vagy határ-feltételnek* nevezik.

3. Azt a mozgást, mely kényszerítő feltétel vagy feltételek mellett megyen végbe, általánosságban *kényszermozgásnak* nevezzük.

a. *Előírt felületen* történő mozgásnál azon felületnek alakja (illetve egyenlete) van adva, melyen a pont pályája fekszik, azaz ismeretes a pont x, y, z koordinátái között fennálló *egy* összefüggés; ezért itt a mozgás teljes meghatározására még csak *két* összefüggés szükséges.

* V. ö. a merev pontrendszerek kényszermozgását.

b. Előírt pályán (görbén) történő mozgásnál a pálya alakja (térbeli görbéknek ezeknek két egyenlete) ismeretes, azaz adva van a pont x, y, z koordinátái között fennálló két összefüggés; e szerint itt a mozgás teljes ismeretéhez még csak *egy* összefüggés kívántatik meg.

Így midőn a mozgó pont egy merev, kifeszíthetetlen fonál vagy rúd segítségével egy szilárd ponttól állandó távolságban tartatik, akkor a mozgó pont bizonyos gömbfelületen tartozik maradni; ha ehhez még azt a feltételt kapcsoljuk, hogy a mozgás síkban történjék, akkor a pont kör mentén halad s i. t.; akkor e gömb, illetve e kör egyenlete képviseli a feltételt.

4. Felemlíthetjük itt a mozgás szabadságának mértékét.

a. A teljesen szabad pont *három* irányban mozdúlhat el (az irányok tetszőlegesen, egymásra merőlegesen is lehetnek) és ezért azt szokás mondani, hogy *a teljesen szabad pont a mozgás szabadságának három fokával bír.*

b. Ezen szabadságot korlátozzuk, ha a pontot alávetjük annak a feltételnek, hogy *bizonyos felületen tartozik maradni.* Ekkor a pontnak elemi elmozdulása mindenkor csak a megfelelő tangenciális sík mentén történhetik, azaz csak *két irányban* szabad a mozgás.

Az előírt felületen mozgó pont e szerint a mozgás szabadságának csak két fokával bír.

c. Midőn a pont mozgását még tovább korlátozzuk azon feltétel által, miszerint az egyidejűleg *két felületen* tartozik maradni: akkor ez annyit jelent, hogy a pont a *két felület metszőgörbéjén* fog mozogni. A mozgásnak akkor csak *egy iránya* van, és ez a görbéhez húzott érintőbe esik. Ennek értelmében az *előírt görbén mozgó pont a mozgás szabadságának csak egy fokával bír.* Ha a mozgás szabadságának ezt az utolsó fokát is elvonjuk a ponttól: ez nyugalomban marad.

89a. §. *A feltételi gyorsulás mindig merőleges a pályára.*

A feltétel vagy a feltételek az ezek nélkül szabad pont mozgását módosítják; mivel pedig általánosságban gyorsulások hozzákapcsolása által minden mozgást egészen tetszőlegesen megváltoztathatjuk: önként következik, hogy minden feltétel alkalmasan választott gyorsulás által helyettesíthető, melyet a feltételtől független gyorsuláshoz adva, a pontot az így eredő gyorsulással szabadon mozognak tekinthetjük.

Itt a megelőző §. 3. pontjában említett azon esetekkel foglalkozunk, melyeknél a pont az előírt felületen vagy görbén *surlódás nélkül mozog*, hol a feltétel jelenléte a v sebességnek csak *irányát*, de nem az értékét változtathatja meg.

Jeleljék x, y, z a pont koordinátáit, $ds = [(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2]^{\frac{1}{2}}$ elemi el-

mozdulását, $\vec{\chi}$ a szabadon mozgó pont adott gyorsulását, $\vec{\psi}$ a feltételeket helyettesítő, végre $\vec{\varphi}$ az eredő gyorsulást irány és nagyság szerint.

Mivel $\vec{\varphi} = \vec{\chi} + \vec{\psi}$, áll:

$$\varphi_x = x'' = \chi_x + \psi_x; \quad \varphi_y = y'' = \chi_y + \psi_y; \quad \varphi_z = z'' = \chi_z + \psi_z \quad . \quad . \quad (1)$$

Továbbá mivel $x''x' + y''y' + z''z' = s's'$ és surlódás nincs:

$$\varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz = \frac{1}{2} d(v^2) = \chi_x dx + \chi_y dy + \chi_z dz \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

és így:

$$\psi_x dx + \psi_y dy + \psi_z dz = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

azaz a ψ kényszergyorsulás merőleges a pályára.

1. Legyen $F(x, y, z) = 0$ az előírt felület egyenlete, a, b, c normálisának iránycosinusai, melyek F -nek az x, y, z szerint képezett partiális differentiálquotienszeivel arányosak [Math. repertorium 79. §. (8a)].

Ebből:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

melyet a (3)-al összehasonlítva, nyerjük:

$$\psi_x : \psi_y : \psi_z = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z} = a : b : c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Szóval: Az $F(x, y, z) = 0$ feltételt helyettesző ψ gyorsulás az F felület normálisába esik.

2. Legyenek $F_1(x, y, z) = 0$ és $F_2(x, y, z) = 0$ az előírt két felület (illetve közös metszögörbéknek) egyenletei; mindegyikükre nézve egy (4) alakú egyenlet áll fenn, de ezeket a (3)-al külön-külön összehasonlítani nem lehet; itt a (3)-ból csak azt következtethetjük, hogy a két feltételt helyettesző ψ gyorsulás az előírt pálya normális síkjába esik.

A ψ kényszergyorsulásnak az említett esetekre vonatkozó, az adott feltételből vagy feltételekből való számítását és tényleges meghatározását a 130. §. adja.

A pont kényszermozgása további tárgyalását didaktikai szempontból a dinamikába, az anyagi pont kényszermozgásának fejezetébe tesszük át.

B. RÉSZLETES RÉSZ.

1. Példák és eljárások a pont egyenes vonalú mozgására.

90. §. *A leírt út mint az időnek explicit, egész, racionális függvénye van adva.*

Az s uthossz, a sebesség és a gyorsulás között az összefüggés itt: $v=s'$; $\varphi=s''$.

1. Egyenletes mozgás.

Legyen az adott egyenlet

$$s=a+bt; \dots \dots \dots (1)$$

ebből: $v=b, \quad \varphi=0 \dots \dots \dots (1a)$

E szerint az (1) egyenlet oly mozgást képvisel, melynek *sebessége* nagyság és irány szerint *állandó*, gyorsulása pedig *zérus*. Ez az *egyenestestmozgás*.

Legyen A a pont helyzete t időben, és O a pályának azon pontja, melytől az s hosszakat számítjuk (42. ábra).

A mozgás hodographja az \vec{OA} -nak A végpontja.

Az a és b állandók jelentésére nézve tekintsük a mozgást a t idő számításának kezdetén azaz a *kezdő állapotot*; ekkor:

$$s_{t=0}=a; \dots \dots \dots (2)$$

e szerint az időszámítás kezdetén a mozgó pont a távolságban van az O -tól, A_0 -ban, hol $a=\vec{OA}_0$.

A b pedig a mozgás állandó sebességét jelenti, azaz a hodographban az állandó \vec{OA} hosszát (42. ábra.)

Ha keressük, mikor lesz $s=0$, azaz, mikor megyen a mozgó pont az O kezdőponton keresztül, úgy ezt az $s=a+bt$ egyenletből $0=a+bt_{s=0}$ alakban nyerjük,

$$t_{s=0}=-\frac{a}{b} \dots \dots \dots (3)$$

Ezen $t_{s=0}$ időköz negatív, ha a és b pozitív; ellenben pozitív, midőn a negatív.

Az első esetben az A_0 helyzete az O -tól jobbra fekszik; a második esetben az O -tól balra.

A fentebbiekből kitűnik, hogy az adott $s=a+bt$ egyenlet elegendő a mozgás minden jellemzőjének meghatározására.

2. Egyenletesen gyorsuló mozgás.

Legyen adva:

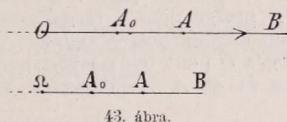
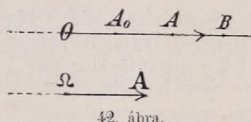
$$s = a + bt + ct^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

egyenlet, melyből:

$$\left. \begin{array}{l} v = b + 2ct \\ \varphi = 2c \end{array} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (4a)$$

Ezen mozgás *sebessége* egy *állandó* és egy az idővel arányosan *növekvő* tagból áll; a gyorsulás ellenben *állandó*. Ilyen mozgást *egyenletesen gyorsuló*-nak nevezzük.

a. Legyen OB a pálya és ΩB a hodographja (43. ábra), a pont t időben A -ben van, a hodograph megfelelő pontja A .



Az a, b, c állandók jelentése. Az időszámitás kezdetén, az ú. n. kezdő állapotra nézve, az általános egyenletből lesz $s_{t=0}=a$, avagy, ha A_0 és A_0 a $t=0$ -nak megfelelő helyzetek:

$$\left. \begin{aligned} s_{t=0} &= a = OA_0, \\ v_{t=0} &= b = \Omega A, \\ \frac{1}{2} \varphi &= c. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

míg

E szerint a jelenti a mozgó pont távolsát az O -tól az időszámítás kezdetén, azaz a kezdő távolságot, b az ugyanezen időpillanatra vonatkozó sebességét és c az állandó gyorsulás felét.

Az $s=a+bt+ct^2$ egyenlet által adott mozgás időbeli teljes lefolyásának tanulmányozása céljából vizsgáljuk meg a mozgás jellemző adatait $t=-\infty$ -től kezdve $t=+\infty$ -ig, azaz az egész végtelen időben.

Egyszerűség kedvéért az a, b, c együtthatók absolute *positiv* értékűek legyenek.

Kezdjük $t = -\infty$ idővel. Itt $s_{t=-\infty} = a - b \cdot \infty + c \cdot \infty^2$; $v_{t=-\infty} = b - 2c \cdot \infty$; e szerint a pont az időszámítás kezdete előtti végtelen időben az O -tól $s_{t=-\infty}$, azaz *positiv* (az O -tól jobbra eső) végtelen távolságban van és $v_{t=-\infty}$ végtelen *negatív* (az O felé fordított) sebességgel mozog.

Az idő folytával az s értéke csökken és a v abszolút értéke is kisebb lesz, végre oly időpillanat fog bekövetkezni, melyben a sebesség zérus. Jelelve $t_{v=0}$ -al ezt az időt, ennek értéke az általános $v=b+2ct$ egyenlet értelmében:

$$t_{v=0} = -\frac{b}{2c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad : \quad . \quad (6)$$

A sebesség, mely a $t_{v=0}$ időpillanat előtti időben *negatív*, most zérus, és ha az idő még tovább növekszik, *pozitív* lesz. A $t_{v=0}$ időpillanatban a sebesség *megváltoztatja az irányát*. Helyetteszük az s (4) egyenletébe a $t_{v=0}$ időt; a hozzátartozó $s_{v=0}$ értéke:

$$s_{v=0} = a + b(t_{v=0}) + c(t_{v=0})^2$$

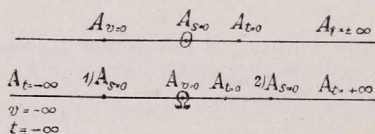
azaz, $t_{v=0}$ értéket a (6)-ból helyettesítve:

$$s_{v=0} = -\frac{b^2 - 4ac}{4c} \dots \dots \dots (7)$$

Ezen, az O -tól $s_{v=0}$ távolyra eső pontot $A_{v=0}$ -át, (44. ábra) nevezett tulajdonságánál fogva, a mozgás *forduló pontjának* nevezzük.

Az idő további növekedésénél v és s folytonosan növekszik és $t = +\infty$ esetére mindkettő pozitív értékű végtelen lesz.

A mozgó pont a megelőzők szerint, az időszámítás *előtti* végtelen időben az s -ek pozitív oldalán végtelen távolságban végtelen sebességgel mozog a O pont felé; sebessége folytonosan fogy, mennél közelebb jut az O -hoz és az $A_{v=0}$ pontban a sebesség zérus. Ezen forduló pontot elérve,



44. ábra.

a pont nem halad többé jobbról balfelé, hanem ellenkező irányban és pedig folytonosan növekvő *pozitív* sebességgel. Az időszámítás *után* végtelen időben a pont az s -ek *pozitív* oldalán végtelen távolságban mozog az O ponttól végtelen nagy pozitív sebességgel.

Ez a mozgás időbeli lefolyásának általános leírása.

b. A mozgásnak még érdekes egyes részletei a következők:

Az $A_{v=0}$ *forduló pont helyzete*, (44. ábra) a (7) egyenlet értelmében, a szerint esik az O -tól *balra*, az O -ba, az O -tól *jobbra* a mint rendre $b^2 > 4ac$, $b^2 = 4ac$, $b^2 < 4ac$.

Az első esetben a mozgó pont kétszer (ugyanis oda- és vissza-) megyen az O helyzeten keresztül; a második esetben O egyszermind a forduló pont és a harmadik esetben a mozgó pont soha nem érheti el az O helyzetet.

A O ponton keresztül való átmenetelnél $s=0$, a megfelelő idő és sebesség $t_{s=0}$ és $v_{s=0}$.

A jellemző egyenlet az általános (4) összefüggésből:

$$0 = a + bt_{s=0} + c(t_{s=0})^2;$$

miből a két gyök értéke mint a két átmenetelnél megfelelő két idő:

$$1) t_{s=0} = -\frac{1}{2c} (b - \sqrt{b^2 - 4ac}), \quad 2) t_{s=0} = -\frac{1}{2c} (b + \sqrt{b^2 - 4ac}). \dots (8)$$

A hozzátartozó $v_{s=0}$ sebességek az általános (4a) egyenlet és a (8) szerint:

$$1) v_{s=0} = + \sqrt{b^2 - 4ac}, \quad 2) v_{s=0} = - \sqrt{b^2 - 4ac}; \quad \dots \quad (9)$$

a két átmenetel ezek értelmében egyenlő értékű, de ellentett előjelű (irányú) sebességgel történik.

A (8) és (9) kifejezések reálisak, zérusok, vagy komplexek (illetve imagináriusok), a szerint, a mint $b^2 > 4ac$, $b^2 = 4ac$, $b^2 < 4ac$.

a) A $b^2 > 4ac$ esetben a két átmenetelhez tartozó jellemzők *reális* értékűek, és ez a körülmény kifejezi, hogy az átmenetek tényleg történnek.

b) A $b^2 = 4ac$ esetben az átmenetel a mozgás fordulójával esik egybe.

c) A $b^2 < 4ac$ esetben a két átmenetelhez tartozó jellemzők *reális* és *imaginárius* részből állanak; ez kifejezi, hogy az átmenetek itt lehetetlenek és nem is történnek.

Ugyanezt mondja az $v_{s=0}$ forduló pont *helyzetének* vizsgálata a (7) formula alapján.

Jegyzet. Ha az a , b , c együtthatók közül az egyik vagy többen absolute negatív értékűek, a mozgást a fent tárgyaltéhoz egészen hasonló módon vizsgáljuk meg, de a kivitelt az olvasóra bizzuk.

3. Nem egyenletesen gyorsuló mozgás.

Legyen:

$$s = a + bt + ct^2 + dt^3; \quad \dots \quad (10)$$

ebből:

$$\left. \begin{aligned} v &= b + 2ct + 3dt^2 \\ \varphi &= 2c + 6dt \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (10a)$$

Itt a v és φ -nek szerkezete olyan, mint a 2. példában (117. l.) az s és v -é, e szerint az ott az s és v számára talált eredmények általánosságban érvényesek a jelenlegi mozgás sebességére és gyorsulására, szóval a 2. alatt tárgyalt mozgás *pályája* ugyanoly tulajdonsággal bír, mint a jelen mozgás *hodographja*, s az előbbinek *hodographja* mint a jelen mozgás *gyorsulása* s i. t.

A gyorsulás *nem állandó* és így a mozgás *nem egyenletesen gyorsuló*.

Az *állandók* jelentése részben a kezdő állapotból következik:

$$s_{t=0} = a; \quad v_{t=0} = b; \quad \varphi_{t=0} = 2c \quad \dots \quad (11)$$

míg a d állandót például azon időpillanat segítségével nyerjük, melyben a gyorsulás zérus, így:

$$d = - \frac{c}{3t_{\varphi=0}} \quad \dots \quad (11a)$$

A mozgást az előbbihez hasonló módon vizsgálhatjuk, de itt csak a forduló pontok és az átmenetek tárgyalására szorítkozunk.

A *forduló pontok* száma itt *kettő*; a megfelelő $t_{v=0}$ időpillanatok részére a feltételei egyenlet a (10a)-ból:

$$0 = b + 2c(t_{v=0}) + 3d(t_{v=0})^2 \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

mely másodfokú s így $t_{v=0}$ számára két értéket ad.

A hozzá tartozó $s_{v=0}$ távolok a (10)-ből következő:

$$s_{v=0} = a + b(t_{v=0}) + c(t_{v=0})^2 + d(t_{v=0})^3 \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

egyenlet által advák, ha jobb oldalába a $t_{v=0}$ helyébe a (12) egyenletből folyó értékek helyettesítetnek.

Ha a két forduló pont az O -nak csak *egyik* oldalán fekszik, akkor az O ponton keresztül csak *egy* átmenetel történik; de, ha ezen két pont az O -nak két oldalán fekszik, *három* átmenetel következik be.

Az átmenetelek $t_{s=0}$ időpontjaira nézve a (10) egyenletből:

$$0 = a + bt_{s=0} + c(t_{s=0})^2 + d(t_{s=0})^3 \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Az egyenletnek *három* gyöke lévén, általánosságban *három* ily időpillanat létezik, melyben a pont az O -n átmegy; a $t_{s=0}$ ezen három értékének felírását az olvasóra bizzuk.

Az átmenetelek *sebességei* a (10a) szerint:

$$v_{s=0} = b + 2c(t_{s=0}) + 3d(t_{s=0})^2 \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

egyenletből következnek, ha jobb oldalába a $t_{s=0}$ helyébe a megelőző (14) egyenlet gyökértégeit helyettesítjük.

Ezen $t_{s=0}$ gyökök közül az egyik mindenestre *reális*, míg a többi kettő vagy együttesen reális vagy együttesen complex (és pedig conjugált); a pont e szerint az O helyzeten keresztül *legalább egyszer* halad; és ha az utóbbi két gyök *reális*, még kétszer, összesen *háromszor*; ezenkívül a második átmenetelnél a sebesség ellenkező irányú az első átmenetelével, míg a harmadik és az első átmenetel sebességei egyirányúak. Ha az utóbbi két gyök complex jellegű, második és harmadik átmenetel nincs (megfelelőleg a 2. alatt tárgyalt példa c pontjának).

A mozgás további részleteinek megvizsgálását az olvasóra bizzuk.

4. Ugyanily módon tárgyalhatók még az általános

$$s = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

egyenlet által képviselt mozgások, ezeknél a forduló pontok száma $n-1$ és az átmenetelek legnagyobb száma n ; de lehetséges, hogy az átmenetelek száma a valóságban *kettővel*, *néggyel* stb. kevesebb mint n , sőt egészen $2 \frac{n-1}{2}$ -el, ha n páratlan vagy $2 \frac{n}{2}$ -el, ha n páros szám.

91. §. *Periodusos (szakaszos) mozgás. Egyszerű harmonikus mozgás. Periodus, amplitúdó. Elongáció. pházis.*

Oly egyenes vonalú mozgást tárgyalunk, mely időközönként (periodusosan) ismétlődő részekből, szakaszokból áll.

Ily mozgások nem csak a kinematika példáiként tekintendők, hanem a dynamikában, a hang, a fény, a rugalmasság, az electro-

mosság stb. elméletében mindenütt fellépő és ott legnagyobb fontossággal bíró mozgásalakok.

Egyszerű harmonikus mozgás.

1. A mozgás egyenlete legyen:

$$s = a \cos(\omega t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

hol a és ω állandók. Ebből:

$$\left. \begin{aligned} v &= -a\omega \sin \omega t \\ \varphi &= -a\omega^2 \cos \omega t \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Itt az elmozdulás s , a sebesség v és a gyorsulás φ az időnek *periodusos* (szakaszos) függvényei.

Az időtől való függést a legegyszerűbb goniometriaival függvények fejezik ki; magát a mozgást *egyszerűen harmonikus vagy egyszerűen periodusos*, sokszor még *egyszerű rezgő vagy lengő* mozgásnak is nevezzük.

A gyorsulás egyenletét írhatjuk:

$$\varphi = s'' = -\omega^2 s; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

e szerint a φ gyorsulás mindig egyenesen *arányos* az s elmozdulással és *vele ellentett előjelű*, azaz az s -ek *kezdőpontja felé van fordítva* (a mi a pontnak *vonzását* az O felé jelenti).

Az s , v , φ egy és ugyanazon (ωt) szög goniometriaival függvényeivel arányosak és ezek értéke és előjele mindazon (ωt) argumentumokra nézve ugyanaz, melyek egymástól a 2π -nek egész számú sokszorosával különböznek.

Jelelje T azt az időközt, mely alatt az (ωt) szög 2π -vel növekedett; az azt meghatározó egyenlet:

$$\omega(t + T) = \omega t + 2\pi,$$

miből:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Ezen T időköz a tárgyalt mozgás egy jellemző állandója, a meny-nyiben minden ily T elmúltával a mozgás minden tulajdonságaiban ismétlődik; ezért a T -t a mozgás *periodusának* (*szakaszának*) nevezzük.

Segélyével az (1) és (2) írhatók:

$$s = a \cos(2\pi \frac{t}{T}), \quad v = -\left(\frac{2\pi a}{T}\right) \sin(2\pi \frac{t}{T}), \quad \varphi = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 s \quad . \quad (5)$$

Az idő folytával az s legnagyobb értéke $+a$, legkisebb értéke $-a$; ezen a mennyiség a harmonikus mozgás *amplitúdója* (*legnagyobb kitérése*), azaz a mozgó pontnak legnagyobb távolsága az O -tól.

92. §. Az egyszerű harmonikus mozgás, tekintre ezt mint az $s'' + \omega^2 s = 0$ egyenlet teljes megoldását. A megfejtés kétféle eljárása.

A megelőző §. tárgyalását itt fordítva akarjuk megtenni; ugyanis nem az s -et mint az idő explicit függvényét tekintjük adott mennyiségnek, hanem a mozgás differenciálegyenletét.

A kérdés e szerint itt abban áll, hogy a

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega^2 s = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

egyenletből az s -et az idő függvénye gyanánt fejezzük ki, az ω -t állandónak tekintve.

Az (1) egyenletet két eljárás szerint akarjuk megfejtetni.

1. Egyenes integráció alkalmazása gyorsan vezet célhoz.

Áll az identitás:

$$d\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right] = \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right] dt = 2 \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} dt = 2 \frac{d^2 s}{dt^2} ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Szorozva az (1) egyenletet $2 ds$ -el, a (2) szerint származik:

$$d\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right] = -\omega^2 d(s^2),$$

miből azonnal:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -\omega^2 s^2 + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

hol C az integrációnak állandója. A (3)-at sokszor az (1) differenciálegyenlet első integrálegyenletének nevezik.

A (3) bal oldala pozitív lévén, a C csak pozitív lehet és $\geq s^2 \omega^2$; helyébe egy másik, c^2 állandót vezetünk be a

$$C = c^2 \omega^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

egyenlet segítségével, miáltal a (3)-ból

$$\frac{ds}{dt} = \omega \sqrt{c^2 - s^2} = \omega c \sqrt{1 - \frac{s^2}{c^2}}$$

vagy még

$$\frac{d\left(\frac{s}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{s^2}{c^2}}} = \omega dt.$$

Az egyenlet mindkét oldala egyszerű függvény differenciálja lévén [Math. repertorium 104. §. (18a) formulája]:

$$\arcsin\left(\frac{s}{c}\right) = \omega t + D, \quad \text{vagy} \quad s = c \sin(\omega t + D) \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Ily egyenleteket úgy szokás megoldani, hogy először egy *particularis* (részleges) megoldást keresünk, azaz oly függvényt, mely az egyenletnek megfelel és segélyével képezzük az *általános* megoldást.

a. Észreveszszük, hogy az (1) egyenlet $s=e^{kt}$ alakú függvény által kielégíthető, mert áll:

$$s=e^{kt}, \quad s'=ke^{kt}, \quad s''=k^2e^{kt};$$

és így lenne:

$$s''+\omega^2s=(k^2+\omega^2)e^{kt}.$$

Arra nézve, hogy az e^{kt} kielégítse az $s''+\omega^2s=0$ egyenletet, kell, hogy a következő jellemző (feltételi) egyenlet álljon

$$k^2+\omega^2=0.$$

Ebből:

$$k=\pm\sqrt{-\omega^2}=\pm\omega\sqrt{-1} \dots \dots \dots (12)$$

Írva: $\sqrt{-1}=i$, a feltételi egyenletnek megfelel:

$$k_1=+i\omega \quad \text{és} \quad k_2=-i\omega;$$

ezek szerint az

$$s_1=e^{i\omega t}, \quad s_2=e^{-i\omega t}$$

függvények eleget tévén az (1)-nek, a differenciálegyenlet *particularis* megoldásai, azaz a *teljes* vagy *általános* megoldásnak *egyes részei*.

[A partikuláris megoldások száma mindig egyenlő a differenciálegyenlet *rendjével*.]

Belőlük a *teljes* megoldást az által képezzük, hogy s_1 -et és s_2 -öt tetszőleges A_1 és A_2 (realis, imaginárius, vagy complex) állandókkal szorozzuk és a szorzatokat összegezzük. E szerint az (1) *teljes megoldása*:

$$s=A_1s_1+A_2s_2=A_1e^{i\omega t}+A_2e^{-i\omega t} \dots \dots \dots (13)$$

Ez is megfelel az (1) egyenletnek, mert:

$$s''=A_1s_1''+A_2s_2''=-\omega^2(A_1s_1+A_2s_2),$$

azaz ismét:

$$(A_1s_1+A_2s_2)'+\omega^2(A_1s_1+A_2s_2)=0 \dots \dots \dots (14)$$

Az (1) teljes megoldása a (13) szerint imaginárius kitevőjű két exponenses menynyiség összege.

b. Ezen (14) kifejezés imaginárius és reális részét az

$$e^{i\alpha}=\cos \alpha+i \sin \alpha; \quad e^{-i\alpha}=\cos \alpha-i \sin \alpha$$

sémák segélyével választjuk el egymástól; lesz belőle:

$$s=(A_1+A_2) \cos (\omega t)+i(A_1-A_2) \sin (\omega t) \dots \dots \dots (15)$$

A (15) szerint az s állandó együtthatókkal bíró két geometriai függvény összege, a két rész külön-külön particuláris megoldása az (1) egyenletnek, mert azt kielégítik.

A (15) további értelmezésénél abból a legáltalánosabb felvételtől indulunk ki, hogy az A_1 és az A_2 complex értékek:

$$A_1 = a_1 + ib_1; \quad A_2 = a_2 + ib_2, \quad \dots \quad (16)$$

hol $a_1, a_2; b_1, b_2$ reális értékek.

Helyetteszve a (16) értékeket (15)-be és különválasztva a reális és az imaginárius tagokat, nyerjük:

$$s = [(a_1 + a_2) \cos(\omega t) - (b_1 - b_2) \sin \omega t] + \left\{ \begin{array}{l} \\ + i [b_1 + b_2] \cos(\omega t) + (a_1 - a_2) \sin(\omega t) \end{array} \right\} \quad (17)$$

A teljes megoldásnak ezen legáltalánosabb alakja egy reális és egy imaginárius részből áll, melyek mindegyike, külön-külön, megoldása a differenciálegyenletnek.

Ezen megoldás által képviselt mozgást most interpretálni akarjuk.

A (17) complex kifejezés, kinematikailag tekintve, azon jelentéssel bír, hogy az s reális része egy tényleges mozgásnak felel meg, míg imaginárius része tényleges mozgást nem képviselhet.

Ha az eredeti (1) egyenlet egy tényleges mozgás differenciálegyenlete, akkor a talált teljes megoldás reális része képviseli azt a legáltalánosabb mozgást, mely a differenciálegyenletnek megfelel.

Rövidség kedvéért írva:

$$a_1 + a_2 = a; \quad -(b_1 - b_2) = b, \quad \dots \quad (18)$$

a mozgás általános kifejezése (17)-ből:

$$s = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \quad \dots \quad (19)$$

Ez pedig ismét a megelőző §. 1. és 2. alatt tárgyalt egyszerű harmonikus mozgások algebrai összege.

c. Könynyű a (19)-at az egyszerű rezgő mozgás alakjára hozni.

Helyetteszük az a és b állandókat A és δ állandók által, az

$$a = A \cos(2\pi\delta), \quad b = -A \sin(2\pi\delta) \quad \dots \quad (20)$$

összefüggések segélyével. Nyerjük:

$$s = A \cos(\omega t + 2\pi\delta); \quad \text{vagy (7) szerint:} \quad s = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta \right) \quad (19a)$$

mint az egyszerű, harmonikus mozgás általános kifejezését, melynek A az amplitudója, $2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta \right)$ a phásisa és T a periodusa.

Az időszámítás kezdetén ($t = 0$ -kor) a pházis értéke $2\pi\delta$; ezt kezdő pházis-nak mondjuk.

Segélyével kifejezhetők az elongációknak, a sebességnek és a gyorsulásnak kezdő értékei.

Összehasonlítva a (19a)-t a (8)-al, ered $c=A$.

93. §. *Egyenlő periodusú két egyszerű harmonikus mozgás össze-
tevése egyszerű harmonikus mozgássá. Analytikai és graphikai eljárás.*

Legyen:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= a_1 \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta_1 \right), \\ s_2 &= a_2 \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta_2 \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

két egyszerű, egyenlő szakaszú rezgő (vagy lengő) mozgás és legyen valamely pont mozgása:

$$s = s_1 + s_2 \dots \dots \dots (2)$$

Hogy az $s_1 + s_2$ összeggel egyenértékű egyszerű harmonikus mozgást lehessen találni, bontsuk szét (1)-ben az egyes pházisok cosinusait, úgy, hogy a (2)-ből:

$$s_1 + s_2 = (a_1 \cos 2\pi\delta_1 + a_2 \cos 2\pi\delta_2) \cos \frac{2\pi t}{T} - (a_1 \sin 2\pi\delta_1 + a_2 \sin 2\pi\delta_2) \sin \frac{2\pi t}{T} \quad (3)$$

Az a_1 , a_2 , δ_1 , δ_2 állandók, ezért az $s_1 + s_2$ ezen kifejezése ugyanazon jellegű, mint a megelőző §-ban a (10) vagy a (19) kifejezés: $s = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$; e szerint a (3) is hozható oly egyszerű alakra, mint (8) vagy (19a). Rövidség kedvéért két új állandót, a és δ -t vezetünk be az:

$$\left. \begin{aligned} a_1 \cos 2\pi\delta_1 + a_2 \cos 2\pi\delta_2 &= a \cos 2\pi\delta \\ a_1 \sin 2\pi\delta_1 + a_2 \sin 2\pi\delta_2 &= a \sin 2\pi\delta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

összefüggések alapján; ez által a (3)-ból azonnal:

$$s = s_1 + s_2 = a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta \right) \dots \dots \dots (5)$$

mint oly egyszerű (eredő) harmonikus mozgás származott, mely az $s_1 + s_2$ egyszerű harmonikus mozgások összegét minden tekintetben helyettesíti.

Ezen eredő mozgás a amplitudója és $2\pi\delta$ kezdő pházisa az egyes, összetevő mozgások a_1 , a_2 amplitudóiból és $2\pi\delta_1$, $2\pi\delta_2$ kezdő pházisaiból a (4) egyenletei alapján határozódnak meg; ezek viszonya és négyzeteik összege adja:

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos 2\pi(\delta_2 - \delta_1) \\ \text{tg } 2\pi\delta &= \frac{a_1 \sin 2\pi\delta_1 + a_2 \sin 2\pi\delta_2}{a_1 \cos 2\pi\delta_1 + a_2 \cos 2\pi\delta_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

E formulák értelmezését az olvasónak ajánljuk.

1. *Jegyzet.* Ezen helyettesítés (összetevés) graphikailag is igen tanulságos módon tüntethető elő.

Legyen (47. ábra) P_1 és P_2 két pont, mely az $\overline{OP_1} = a_1$ és az $\overline{OP_2} = a_2$ sugarú körökben egyenletes $\frac{2\pi a_1}{T}$ és $\frac{2\pi a_2}{T}$ sebességgel mozogjon és melyeknek A_1 és A_2 vetületei az MN átmérőn az s_1 - és az s_2 -nek megfelelő egyszerű, harmonikus mozgást végezzenek (91. §. 46. ábra 122. l.); e szerint: $\overline{OA_1} = s_1$; $\overline{OA_2} = s_2$ az összezteendő két elongáció.

A phásisokat az OM szilárdnak tekintett egyenestől számítjuk, úgy, hogy $(MOP_1) \angle = 2\pi(\frac{t}{T} + \delta_1)$ és $(MOP_2) \angle = 2\pi(\frac{t}{T} + \delta_2)$, és ezekből a

$$\text{phásiskülönbség} = (I_1OP_2) \angle = 2\pi(\delta_2 - \delta_1) \dots \dots \dots (7)$$

Kiegészítve az $\overline{OP_1} = a_1$, és $\overline{OP_2} = a_2$ egyeneseket az OP_1PP_2O egyenközénné, ennek OP átlójára nézve áll:

$$\overline{OP}^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos 2\pi(\delta_2 - \delta_1) \dots \dots \dots (8)$$

azaz: $\overline{OP} = a$ a (6) formulák elseje szerint.

Ezenkívül, P_1P párhuzamos és egyenlő a OP_2 -vel és így $OA_2 = \overline{A_1A} = s_2$; ezért:

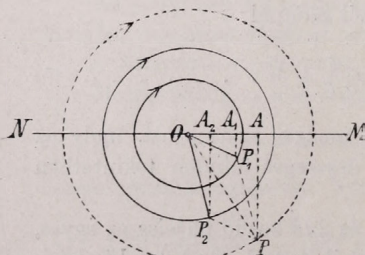
$$\overline{OP} \cdot \cos(AOP) = \overline{OA_1} + \overline{A_1A} = s_1 + s_2 \dots \dots \dots (9)$$

Ez pedig, az (5) értelmében az s mozgás, melynek kifejezése:

$$s = a \cos 2\pi(\frac{t}{T} + \delta) \dots \dots \dots (5)$$

Ebből következik:

$$(AOP) \angle = (MOF) \angle = 2\pi(\frac{t}{T} + \delta) \dots \dots \dots (10)$$



47. ábra.

Az $s_1 + s_2$ összetett mozgást e szerint mindig úgy tekinthetjük, mint a P pont körmozgásának az MN átmérőre való vetületét; a P pont helyzete az $\overline{OP_1}$ és $\overline{OP_2}$ két vonsugar geometriai eredőjének végpontja, és ez a mozgó P_1 és P_2 pontokhoz képest mindig ugyanazon viszonylagos (relatív) fekvésben van, mivel a szög $(P_1OP_2) \angle = 2\pi(\delta_2 - \delta_1)$ állandó.

A P szögsebessége az O körül ugyanaz mint az OP_1 és OP_2 szögsebessége (91. §. 1. pontjának jegyzete), azaz egyenlő $\frac{2\pi}{T}$ -vel és így a P_1 , P_2 és P

pontok állandó viszonylagos helyzetben forognak az O körül.

2. *Jegyzet.* Hogy az (1) alatt felírt s_1 és s_2 összege csak egyszerű harmonikus mozgás lehet, közvetlenül abból következik, hogy ezek megfelelően a 92. §. (1) egyenletének:

$$s_1'' + \omega^2 s_1 = 0; \quad s_2'' + \omega^2 s_2 = 0,$$

összegük is megfelel az (1)-nek:

$$(s_1 + s_2)' + \omega^2 (s_1 + s_2) = 0.$$

Mintán pedig e differenciálegyenlet teljes megoldása (92. §. 2. pontja) egyszerű harmonikus mozgás, az $s_1 + s_2$ is csak ily jellegű mozgás lehet.

94. §. *Általánosítás.* Tetszőleges számú egyenlő periodusú, egy egyenesben végbemenő egyszerű harmonikus mozgások összevetése (helyettesése).

Adva legyen n számú egyszerű, egyenlő periodussal bíró, egy egyenesben végbemenő harmonikus mozgás:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= a_1 \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta_1 \right) \\ &\dots \dots \dots \\ s_n &= a_n \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta_n \right) \end{aligned} \right\}; \dots \dots \dots (1)$$

keressük azt az egyszerű harmonikus mozgást, mely azok:

$$s = s_1 + s_2 + \dots + s_n \dots \dots \dots (2)$$

összeget minden tekintetben helyettesíti.

E célból csakis a megelőző §-ban adott eljárás *általánosítandó.*

Analytikai úton haladva, bontsuk szét az egyes pházisok cosinusait és írjuk a (2)-öt:

$$\left. \begin{aligned} s &= + (a_1 \cos 2\pi \delta_1 + a_2 \cos 2\pi \delta_2 + \dots + a_n \cos 2\pi \delta_n) \cos \frac{2\pi t}{T} - \\ &- (a_1 \sin 2\pi \delta_1 + a_2 \sin 2\pi \delta_2 + \dots + a_n \sin 2\pi \delta_n) \sin \frac{2\pi t}{T}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Rövidség kedvéért itt is bevezetve az a és δ jelzőket, ezek számára a meghatározó egyenletek [v. ö. a 93. §. (4) formuláit]:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k \cos 2\pi \delta_k &= a \cos 2\pi \delta \\ \sum_{k=1}^n a_k \sin 2\pi \delta_k &= a \sin 2\pi \delta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

E szerint az s_k -ek összege:

$$s = \sum_{k=1}^n s_k = a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta \right) \quad (5)$$

ismét egyszerű harmonikus mozgás, melynek periodusa az öszszetevő mozgások periodusával egyenlő, melynek a amplitudója és $2\pi\delta$ kezdőphásisa az öszszetevő mozgásokéiból a (4) egyenletek alapján következőleg határozódnak meg:

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= [\sum a_k \cos 2\pi\delta_k]^2 + [\sum a_k \sin 2\pi\delta_k]^2 \\ \operatorname{tg} 2\pi\delta &= \frac{\sum a_k \sin 2\pi\delta_k}{\sum a_k \cos 2\pi\delta_k} \end{aligned} \right\} \quad (4a)$$

1. *Jegyzet.* *Graphikai* eljárást követve [93. §, 1. *Jegyzet* (47. ábra) i 28. l.], az egyes $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \dots, \vec{OP}_n$ vectorokat kellene a_1, a_2, \dots, a_n nagyság és $2\pi(\frac{t}{T} + \delta_1), 2\pi(\frac{t}{T} + \delta_2), \dots, 2\pi(\frac{t}{T} + \delta_n)$ irány szerint (számítva ezen szögeket az \vec{OM} szilárdnak tekintett egyenestől) felrajzolniuk és belőlük a vectorok polygonját képezniük; a polygon egyik végpontja O , másika pedig P lesz, mely utóbbinak vetülete az MN egyenesre egyenlő a P_1, P_2, \dots, P_n mozgásai vetületeinek keresett öszszegével.

Vége az egyes mozgások differentialegyenleteit öszszegezve, származik:

$$\left(\sum_{k=1}^n s_k \right)'' + \omega^2 \left(\sum_{k=1}^n s_k \right) = 0, \quad (5)$$

miből azonnal következtethetjük, hogy az s -ek öszszege, az $\sum s_k$, az egyszerű, harmonikus mozgások jellemző tulajdonaival bír.

2. *Jegyzet.* A harmonikus mozgások öszszetevésére és szétbontására nézve itt származtatott tételek csak *egyenlő periodussal* bíró egy egyenesben történő mozgásokra vonatkoznak. (Ezek e szerint alkalmazhatók egy színű fényrezgésekre és egymagasságú hangrezgésekre és általánosságban a testek egyenlő periodusú rezgéseire vagy lengéseire).

Különböző periodussal bíró *egyenes* vonalú harmonikus mozgások öszszetevése, valamint nem egyszerű periodusos mozgások szétbontása különböző periodusú egyszerű harmonikus mozgásokra, más, egyszerű az olvasóra bízandó vizsgálatot [a derékszögükre l. a 106. §-ot], illetve *Fourier-féle* sorkifejtéseket igényel. [Erről a rugalmasság tanában].

95. §. Az $s'' - \omega^2 s = 0$ egyenlet által meghatározott mozgás. A megfontolás kétféle eljárása.

A tárgyalandó mozgás differentialegyenlete csak az által különbözik a 91—94. §§-okban megvizsgált mozgás egyenletétől, hogy itt az $\omega^2 s$ tag *negatív* előjelű, azaz, a gyorsulás itt is *arányos* az s -el, de mindig vele *egyenlő* előjelű, e szerint az s -ek O kezdőpontjától *el van fordítva*; ez a pontnak az O -tól való *tasztítását* jelenti. Ezért a mozgás a megelőzőleg tárgyalt mozgástól teljesen elütő jellegű.

A megvizsgálandó

Jegyzet. Ha t , időt hozunk be, melynek kezdőpontját a $t_{v=0}$ időpontba (a megfordulás pillanatába) tesszük, akkor:

$$t = t_{v=0} + t, \quad \dots \quad (15)$$

és a (13) tekintetbe vételével:

$$e^{\omega t} = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} e^{\omega t_1};$$

ha még írjuk $\sqrt{a_1 a_2} = a$, hol (14) szerint a a forduló pont távolsága az O -tól, akkor a (7)- vagy (9b)-ből

$$2s = a(e^{\omega t_1} + e^{-\omega t_1}) \quad \dots \quad (16)$$

A mozgás további vizsgálatát az olvasóra bizzuk.

96. §. Az $s'' + 2zs' \pm \omega^2 s = 0$ egyenlet megfejtése. Három eset: Csillapított egyszerű harmonikus mozgás. Aperiodusosan csillapított mozgás. Kivételes eset.

A jelen §-ban azon probléma körvonalait kívánjuk adni, mely mindenkor felmerül, mikor egyszerű harmonikus mozgások (ugyanis csekélyebb amplitúdóval bíró ingaszerű lengések vagy rugalmas testek egyszerű rezgései s í. t.) oly mozgási ellenállással vagy surlódással találkoznak, mely a sebesség első hatványával arányos és a sebességgel ellentett irányú.

Ekkor a gyorsulás két részből áll; az első az egyensúlyi helyzettől való s eltávolodással (kitéréssel) arányos és az s -ek O kezdőpontja (az egyensúlyi helyzet, azaz a centrum) felé tart, a második a $\frac{ds}{dt}$ sebességgel egyenesen arányos és vele ellenkező irányú; ezért a gyorsulás kifejezése:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\omega^2 s - 2z \frac{ds}{dt},$$

avagy

$$s'' + 2zs' + \omega^2 s = 0^* \quad \dots \quad (1)$$

Az (1) egy másodrendű, első fokú nem teljes differenciálegyenlet, mert az s -től független tagja nincsen; továbbá az s differenciálquotiensinek coefficientensei állandók. Az ily egyenletet mindig egy $s = e^{kt}$ alakú particuláris megoldással elégíthetni ki és ezért általános megoldását a 92. §. 2. pontjának sémája szerint találjuk.

* *Jegyzet.* Ha az egyenlet utolsó tagja $-\omega^2 s$ volna, azaz a gyorsulás ezen része *taszító* lenne, mint a megelőző §-ban, akkor az $s'' + 2zs' + \omega^2 s = 0$ egyenletnek megoldása és az általa képviselt mozgás teljesen megfelelő jelen §. II. pontjának, csak hogy ott a $-\omega^2$ helyébe $+\omega^2$ teendő.

marad a mozgás kifejezésére:

$$s = e^{-\kappa t} [a \cos(t \sqrt{\omega^2 - \kappa^2}) + b \sin(t \sqrt{\omega^2 - \kappa^2})] \quad (6)$$

E mozgás nem periodusos, mivel nem létezik oly időköz, melynek lefolyása után a mozgás valamenynyai tulajdonságaiban ismétlődnek; ellenben a $[\]$ zárójelekben lévő kifejezés egyszerűen periodusos (harmonikus) jellegű [92. §. (5a) és (10)].

A (6) egyszerűsítése és könnyebb tanulmányozhatása céljából írjunk itt is:

$$a = A \cos(2\pi\delta), \quad b = -A \sin(2\pi\delta);$$

úgy hogy a (6)-ból:

$$s = A e^{-\kappa t} \cos(t \sqrt{\omega^2 - \kappa^2} + 2\pi\delta) \quad (7)$$

Ez a mozgás e szerint oly egyszerű harmonikus mozgásnak tekinthető, melynek amplitúdója, $A e^{-\kappa t}$, az idő folytával folytonosan fogyó és az idő végtelen növekedésével elenyésző kicsiny lesz.

Ennek értelmében a mozgó pont folytonosan kisebbedő lengéseket végez az s -ek kezdőpontja, az O körül és végre e pontban nyugalomba jő.

Ezt a mozgást *csillapított* (kisebbedő amplitúdójú) *egyszerű harmonikus mozgás*nak nevezik; lényegesebb sajátságait a következő 97. §-ban külön vizsgáljuk meg.

II. Aperiodusosan csillapított mozgás. $\kappa^2 > \omega^2$.

Ha κ^2 nagyobb mint ω^2 , akkor a (4) egyenlet változatlan marad; ha itt is, mint a 95. §. (10) egyenleteiben az $\frac{1}{2}A_1$ és $\frac{1}{2}A_2$ helyébe $a_1 + ib_1$ -t és $a_2 + ib_2$ -t helyettesítünk, akkor a (4) egy reális és egy imaginárius tagra fog bomlani, melyek közül csak az első felel meg a mozgásnak és így:

$$2s = e^{-\kappa t} (a_1 e^{+t \sqrt{\kappa^2 - \omega^2}} + a_2 e^{-t \sqrt{\kappa^2 - \omega^2}}) \quad (8)$$

A kifejezés zárójeles része megegyezik a 95. §. (9b) egyenlete szerkezetével.

A sebesség számára nyerjük:

$$2 \frac{ds}{dt} = -e^{-\kappa t} \left\{ a_1 (\kappa - \sqrt{\kappa^2 - \omega^2}) e^{+t \sqrt{\kappa^2 - \omega^2}} + a_2 (\kappa + \sqrt{\kappa^2 - \omega^2}) e^{-t \sqrt{\kappa^2 - \omega^2}} \right\} \quad (9)$$

A (8) és (9) elegendő a mozgás értelmezésére.

A $t = -\infty$ értéknél az $s = +\infty$; az idő folytával az s fogy és zérus lesz, ha a hozzá tartozó t_0 idő a (8) szerint megfelel az

$$a_1 e^{t_0 \sqrt{\kappa^2 - \omega^2}} = -a_2 e^{-t_0 \sqrt{\kappa^2 - \omega^2}}, \text{ azaz, a } t_0 = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 - \omega^2}} \lg \left(\sqrt{-\frac{a_2}{a_1}} \right) \quad (10)$$

egyenletnek, mely a t_0 számára csak *egy* értéket ad és addig reális, míg az a_1 és a_2 ellentett előjelű.

A mozgás akkor mutat forduló pontot, ha a (9) zárójeles tényezője zérus; ha t , e megfordulás bekövetkezésének ideje, akkor (9)-ből:

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}} \left\{ \lg \left(\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{a_1^2}} \right) + \lg \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}}{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}}} \right\} \quad (11)$$

Itt is a t_1 -nek csak *egy* értéke van, mely addig reális, míg az a_1 és a_2 ellentett előjeltű.

Végre a t -nek ezentúli folytonos növekedésével mind az s , mind az s' a zérus felé konvergál.

Evvel a mozgás jellege teljesen elő van tüntetve; ez ugyanis semmiféle periodust nem mutat, legfeljebb egy átmenetelt és egy forduló pontot (ha a_1 és a_2 egyenlő előjeltű, nincs átmenetel és nincs forduló pont) és azután a mozgó pont folytonosan kisebbedő sebességgel (lengés nélkül) közeledik az egyensúlyi helyzethez (a mozgás centrumához).

Ezért ezt a mozgást *aperiodusosan* (periodus nélküli) *csillapított mozgásnak* nevezik.

A forduló pont az O -tól véges távolságban fekszik; helyzetének [a (11) és (8) segítségével megejtendő] számítását az olvasónak ajánljuk.

Jegyzet. Ezen II. pont valamennyi eredménye azonnal érvényesíthető, ha az (1) egyenlet $s' + 2\alpha s - \omega^2 s = 0$ alakú (v. ö. az e §. elején előforduló *Jegyzetet*, a 133. lap lábjegyzékét); ekkor a (8)–(11) egyenletekben csak $-\omega^2$ helyetteszendő az ω^2 helyébe; a mozgás jellege ez által nem változik.

III. *Kivételes eset.* $\alpha^2 = \omega^2$.

Ezen esetben a (3)-ban kifejezett k_1 és k_2 gyökök egyenlők és a (4) egyenlet redukálódik az

$$s = (A_1 + A_2) e^{-\alpha t} \quad (12)$$

egyenletre, mely, mivel $(A_1 + A_2)$ *egy* állandónak tekintendő, csak partikuláris megoldása lehet az (1) egyenletnek.

Ezen esetre nézve a teljes megoldást következőleg nyerjük:

Vegyük eleinte fel, hogy a $\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$ *véges*, de kicsiny h értékű, úgy, hogy a (3)-ból legyen

$$k_1 = -\alpha + h; \quad k_2 = -\alpha - h;$$

e szerint a (4):

$$s = e^{-\alpha t} (A_1 e^{ht} + A_2 e^{-ht}) \quad (13)$$

(Sorba fejtve az e^{ht} és az e^{-ht} menynységeket (Math. repertorium 16. §-ának 2. formulája) és rövidség kedvéért írva

$$A_1 + A_2 = A; \quad (A_1 - A_2)h = B,$$

hol A és B *véges* menynységek, a (13)-ból:

$$s = e^{-\alpha t} \left(A + Bt + \frac{1}{2} A h t^2 + \frac{1}{2.3} B h^2 t^3 + \dots \right)$$

A Bt mindig végesnek tekintve és a magasabb rendű tagokat elhagyva, marad

$$s = (A + Bt) e^{-\alpha t} \quad (14)$$

mint az (1) egyenletnek teljes megoldása ezen esetben.

[Mivel (14)-ből:

$$s' = -\alpha s + B e^{-\alpha t}; \quad s'' = +\alpha^2 s - 2\alpha B e^{-\alpha t}; \quad (15)$$

az (1) egyenlet, melyben itt $x^2 = \omega^2$, a következő

$$s'' + 2xs' + x^2s = (x^2 - 2xx + x^2)s - B(2x - 2x)e^{-xt} = 0$$

és így a (14) tényleg a két integráció állandóit, A -t és B -t tartalmazó, az (1)-et kielégítő teljes megoldás].

A (14) mozgás értelmezése a (8)-éhoz analog; A -t és B -t itt egyszerűség kedvéért reálisaknak tekintjük.

Ugyanis $t = -\infty$ -kor az $s = +\infty$ [miről könnyű számítás győz meg, Math. repertorium 39. §-ának 2. pontja]; az idő folytonos növekedésével az s fogy és zérus értéket ér el, ha az idő:

$$t_0 = -\frac{A}{B}.$$

A mozgás forduló pontot mutat, ha a (14)-ből származó

$$s' = [(B - xA) - xBt]e^{-xt}$$

kifejezés szerint az idő

$$t = \frac{B - xA}{xB}.$$

Itt mind a t_0 , mind a t , *reális*.

Végre, a t ezentúli folytonos növekedésével a $+\infty$ felé az s és az s' a zérus felé közeledik.

E mozgás e szerint semmiféle periodust nem mutat, hanem csak egy átmenetelt és egy forduló pontot; azután a mozgó pont mindinkább fogyó sebességgel (lengés nélkül) közeledik a mozgás centrumához (az egyensúlyi helyzethez).

Ez a mozgás is *aperiodusosan csillapított mozgás*.

Az olvasó keresse fel ezen esetre nézve a forduló pont helyzetét és az átmenetel sebességét.

97. §. *A csillapított egyszerű harmonikus mozgás jellemző sajátosságainak megvizsgálása.*

A csillapított harmonikus mozgás differenciálegyenlete a megelőző §. (1) egyenlete és I. pontja szerint:

$$s'' + 2xs' + \omega^2s = 0; \quad \text{hol} \quad x^2 < \omega^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

teljes megoldása [u. o. (7)]:

$$s = Ae^{-xt} \cos(t\sqrt{\omega^2 - x^2} + 2\pi\delta). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

1. *A mozgás kifejezésének egyszerűsítése.*

Ha T -vel jeleljük azt az időközt, melynek lefolyása után a (2)-ben lévő cosinus értékre és előjelre nézve ugyanaz lesz, akkor ezt a T -t meghatározza a (2)-ből a jellemző feltétel:

$$(t+T)\sqrt{\omega^2 - x^2} + 2\pi\delta = t\sqrt{\omega^2 - x^2} + 2\pi\delta + 2\pi; \quad .$$

ebből:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \kappa^2}} \quad (3)$$

és így a (2)-ből:

$$s = Ae^{-\kappa t} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta \right) \quad (4)$$

A mozgó pont oly időpillanatban megyen át az s -ek kezdőpontján (az O egyensúlyi helyzetén, a mozgás centrumán), mikor a (4) cosinusának argumentuma az $\frac{1}{2}\pi$ -nek páratlan egész számú sokszorosával egyenlő.

Ezért a továbbiakra nézve az időszámítás kezdőpontját az O ponton keresztül történő egyik átmenetel pillanatába tesszük át; ezt elérjük, ha t helyébe t' -et a

$$2\pi \frac{t}{T} + 2\pi\delta = 2\pi \frac{t'}{T} - \frac{1}{2}\pi, \quad \text{vagy a} \quad t = t' - T\left(\frac{1}{4} + \delta\right) \quad (5)$$

egyenlet segítségével vezetjük be.

Rövidség kedvéért írva

$$Ae^{+\kappa T(\frac{1}{4} + \delta)} = a_0 \quad (6)$$

és azután a t' felső jelzését elhagyva, a (4)-ből nyerjük:

$$s = a_0 e^{-\kappa t} \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \quad (7)$$

mint a csillapított harmonikus mozgás legegyszerűbb kifejezése.

Ha a κ zérus volna, nem lenne csillapítás és ekkor a mozgás egyszerű harmonikus mozgássá fajulna, melynek

$$\text{az amplitudója } a_0 \text{ és (3) szerint a periódusa: } T_0 = \frac{2\pi}{\omega} \quad (8)$$

2. A mozgás periodusos volta.

A sebesség és gyorsulás kifejezései a (7)-ből könnyen képezhetők és tetemesen egyszerűsíthetők, ha a κ és $\frac{2\pi}{T}$ helyébe bevezetjük az ω és η állandókat (melyek közül csak az utóbbi új) a

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= \omega \sin(2\pi\eta) \\ \frac{2\pi}{T} &= \omega \cos(2\pi\eta) \end{aligned} \right\}, \quad \text{vagy az} \quad \left. \begin{aligned} \omega^2 &= \frac{4\pi^2}{T^2} + \kappa^2 \\ \operatorname{tg}(2\pi\eta) &= \frac{\kappa T}{2\pi} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

egyenletek segítségével.

Nyerjük a (7)-ből:

$$\left. \begin{aligned} v = s' &= \frac{ds}{dt} = +a_0 \omega e^{-\kappa t} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \eta \right) \\ \varphi = s'' &= \frac{d^2 s}{dt^2} = -a_0 \omega^2 e^{-\kappa t} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \eta \right) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

és általánosan:

$$\left. \begin{aligned} s^{(2n-1)} &= \frac{d^{2n-1}s}{dt^{2n-1}} = (-1)^{n-1} a_0 \omega^{2n-1} e^{-\lambda t} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + (2n-1)\eta \right) \\ s^{(2n)} &= \frac{d^{2n}s}{dt^{2n}} = (-1)^n a_0 \omega^{2n} e^{-\lambda t} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + 2n\eta \right) \end{aligned} \right\} (11)$$

A (11) értelmében a $2n$ -ed rendű sebesség zérus lesz [azaz, a $(2n-1)$ -ed rendű sebesség maximumot vagy minimumot mutat], ha a $2\pi \left(\frac{t}{T} + 2n\eta \right)$ argumentum az $\frac{1}{2}\pi$ -nek egész, pozitív vagy negatív, de *páros* számú sokszorosával egyenlő; ellenben a $(2n-1)$ -ed rendű sebesség zérus lesz [azaz a $(2n-2)$ -ed rendű sebesség maximumot vagy minimumot mutat] ha a $2\pi \left(\frac{t}{T} + (2n-1)\eta \right)$ argumentum az $\frac{1}{2}\pi$ -nek egész, pozitív vagy negatív, de *páratlan* számú sokszorosával egyenlő.

E szerint a t időknél egymásra következő azon értékei, melyeknél az $s^{(2n)}$, vagy az $s^{(2n-1)}$, s i. t. zérus értéket vesznek fel, mindig egy és ugyanazt az $\frac{1}{2}T$ közt mutatnak.

Elvvel be van bizonyítva, hogy a csillapított harmonikus mozgás az általánosabb értelemben vett átmenetekre vonatkozólag periodusos mozgásnak tekintendő. Ugyanis az időköz, mely az egyensúlyi helyzeten keresztül egymásra következő két átmenetel-, vagy a mely az egyensúlyi helyzettől számított, egymásra következő két legnagyobb eltávolodás- (elongáció-), vagy a mely a sebességnek egymásra következő maximuma és minimuma- (vagy minimuma és maximuma-) s i. t. között lefoly, mindig egy és ugyanaz, nevezetesen $\frac{1}{2}T$.

3. Az egymásra következő legnagyobb elongációk (amplitudók) viszonya állandó. A csillapítás mértéke; logaritmikus decrementuma.

Az $s=0$ -tól számított legnagyobb eltávolodások helyeit a forduló pontok adják meg; jellemző feltételük, hogy a sebesség zérus legyen, avagy, ha ν tetszőleges egész szám, hogy a (10) első egyenlete szerint álljon

$$2\pi \frac{t}{T} + 2\pi\eta = (2\nu-1)\frac{1}{2}\pi,$$

azaz

$$2\pi \frac{t}{T} = (2\nu-1)\frac{1}{2}\pi - 2\pi\eta; \quad t = (\nu-1)\frac{1}{2}T - (\eta - \frac{1}{4})T. \quad (12)$$

A ν -edik legnagyobb kitérésnek, a_ν -nek értékét nyerjük, ha a (7)-be a t értékét a (12)-ből helyettesítjük; leszén:

$$a_\nu = (-1)^{\nu-1} a_0 e^{-\frac{1}{2}\lambda T(\nu-1)} e^{-\lambda T(\frac{1}{4}-\eta)} \cos(2\pi\eta) \quad (13)$$

Az egymás után következő legnagyobb elongációk viszonya (eltekintve az előjeltől) a (13)-ból:

$$a_\nu : a_{\nu+1} = e^{+\frac{1}{2}\lambda T} = k; \quad (14)$$

ez állandó érték, k , melyet joggal a csillapítás viszonyának neveznek, mivel ez valóban a mozgás fogyásának, csillapításának mértéke.

Ennek természetes logaritmusa λ -vel jeelve

$$\lg_n k = \frac{1}{2} \lambda T = \lambda; \quad (15)$$

ezt a csillapítás logaritmikus decrementumának (fogyásának) nevezik.

4. A periódus és az amplitudók (legnagyobb elongációk) függése a csillapítástól. Az egyensúlyi helyzettől a forduló pontig és a forduló ponttól az egyensúlyi helyzetig terjedő időközök nem egyenlők.

a. A (15) és a (8) értelmében a (9)-ből:

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T_0^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} + \frac{4\lambda^2}{T^2}, \text{ avagy: } T^2 = \frac{\pi^2 + \lambda^2}{\pi^2} T_0^2 . . . (16)$$

$$\operatorname{tg}(2\pi\eta) = \frac{\lambda}{\pi}, \text{ avagy: } \eta = \frac{1}{2\pi} \arctg\left(\frac{\lambda}{\pi}\right) (17)$$

A (16) második egyenlete kifejezi a T periódusnak a λ -tól (a csillapítástól) való függését.

A (13) egyenletben előtüntetett legnagyobb kitérés képzésére nézve áll a (15) és (17) szerint:

$$\lambda T\left(\frac{1}{4} - \eta\right) = 2\lambda\left(\frac{1}{4} - \eta\right) = 2\lambda \cdot \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{2}\pi - 2\pi\eta\right),$$

továbbá

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\pi - 2\pi\eta\right) = \cotg(2\pi\eta) = \frac{\pi}{\lambda}$$

és így:

$$\lambda T\left(\frac{1}{4} - \eta\right) = \frac{\lambda}{\pi} \arctg\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) (18)$$

Továbbá a (17) első egyenletéből:

$$\cos(2\pi\eta) = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} (19)$$

E szerint a (13) kifejezése:

$$\left. \begin{aligned} a_v &= (-1)^{v-1} a_0 \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctg\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)} e^{-(v-1)\lambda} \\ \text{vagy a (14) és a (15)-ből } k\text{-t vezetve be:} \\ a_v &= (-1)^{v-1} a_0 \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} k^{-\frac{1}{\pi} \arctg\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)} k^{-(v-1)} \end{aligned} \right\} . . . (20)$$

b. Az első legnagyobb kitérés az a_1 , erre nézve a (20)-ba $v=1$ teendő.

Jeelve v_0 -al a sebességet $t=0$ -kor azaz, mikor a pont az egyensúlyi helyzeten megyen át, a (8)-nak és a (9) második egyenletének tekintetbe vételével a (10) első egyenletéből lesz:

$$v_0 = a_0 \omega \cos(2\pi\eta) = \frac{2\pi a_0}{T} = \frac{2\pi a_0}{T_0} \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} (21)$$

és így a (20) első egyenletéből

$$a_v = (-1)^{v-1} \frac{v_0 T_0}{2\pi} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)} e^{-(v-1)\lambda} \quad (22)$$

c. Azon t , időre nézve, mely közben a pont az egyensúlyi helyzetből ($t=0$ -tól) a legnagyobb elongáció helyzetébe (a forduló pontba) jut, a (10) első egyenlete szerint:

$$2\pi\left(\frac{t}{T} + \eta\right) = \frac{1}{2}\pi, \quad \text{azaz} \quad t = \frac{1}{4}T - \eta T;$$

ellenben az a t_* idő, mely alatt a forduló ponttól ismét az egyensúlyi helyzetbe jut:

$$t_* = \frac{1}{2}T - t = \frac{1}{2}T - \left(\frac{1}{4}T - \eta T\right) = \frac{1}{4}T + \eta T;$$

mivel még $t_* + t_* = \frac{1}{2}T$, a (17) tekintetbe vételével nyerjük:

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{1}{4}T \left[1 - \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)\right] \\ t_* &= \frac{1}{4}T \left[1 + \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)\right] \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

5. Az eredmények általánosítása tetszőleges rendű sebességekre nézve.

A sebesség eléri maximális értékeit, a v_v -ket, ha a (10) második egyenlete szerint

$$2\pi \frac{t}{T} + 4\pi\eta = v\pi,$$

azaz

$$2\pi\left(\frac{t}{T} + \eta\right) = v\pi - 2\pi\eta; \quad \text{avagy} \quad t = \frac{1}{2}vT - 2\eta T \quad (24)$$

és így (10) első egyenletéből

$$v_v = (-1)^v a_0 \omega e^{-\frac{1}{2}v\lambda T} e^{+2\eta v T} \cos 2\pi\eta,$$

azaz, a (9), (15), (17) és (21) segítségével:

$$v_v = (-1)^v v_0 e^{+\frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\lambda}{\pi}\right) \frac{\lambda}{\pi}} e^{-v\lambda}, \quad (25)$$

mely egyenlet szerint a sebesség ezen egymásra következő maximális abszolút értékei ugyanazon $e^{-\lambda} = k$ viszony szerint fogynak, mint az amplitúdók (a legnagyobb elongációk).

Ugyanez áll bármily rendű gyorsulás legnagyobb értékeire nézve is.

Azt a t időt, mely alatt a sebesség a zérustól (a forduló ponttól) a v_v -ig növekszik, nyerjük, ha a (24) formula t idejéből a (12) formula t idejét levonjuk; marad $t' = \frac{1}{4}T - \eta T$; az a t'' idő pedig, mely alatt a sebesség a v_v -tól a zérusig fogy lesz $t' = \frac{1}{2}T - t'$, azaz a (17) szerint

$$\left. \begin{aligned} t' &= \frac{1}{4} T \left[1 - \frac{2}{\pi} \arctg \left(\frac{\lambda}{\pi} \right) \right] \\ t'' &= \frac{1}{4} T \left[1 + \frac{2}{\pi} \arctg \left(\frac{\lambda}{\pi} \right) \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (26)$$

A vizsgálatot a gyorsulásokra nézve hasonló irányban folytathatjuk; az eredmények az eddig találtakkal analog sajátosságokat mutatnak; a számítások kivételét az olvasónak nagyon ajánlhatjuk.

Jegyzet. Ha a csillapítás csekély, a jelen §. kifejezései közelítő formulákká alakíthatók át és ha λ nagyon kicsiny, elegendő csak első hatványait megtartani; magát az egyszerűsítést az olvasó, saját céljaihoz képest, könnyen fogja elvégezhetni.

98. §. *A pont egyenesben mozog, gyorsulása az egyenes egy szilárd pontja (a centrum) felé van fordítva és ezen ponttól való távolság négyzetével fordítva arányos. (Esés nagy magasságból).*

A mozgás differenciálegyenlete itt:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = - \frac{C^2}{s^2} \dots \dots \dots (1)$$

és C^2 a távolság egységében fellépő gyorsulás mértéke.

Szorozva az (1)-et $2ds$ -el, a 92. §. (2) egyenlete szerint:

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{2C^2}{s} + H \dots \dots \dots (1a)$$

hol H az (első) integráció állandója.

A sebesség a szilárd, $s=0$ pontban végtelen nagy.

Ha s_0 egy bizonyos távolság és v_0 a hozzá tartozó sebesség, akkor:

$$v_0^2 = \left(\frac{ds}{dt} \right)_0^2 = \frac{2C^2}{s_0} + H$$

miből:

$$v^2 - v_0^2 = 2C \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s_0} \right) \dots \dots \dots (2)$$

A H a kezdő állapot v_0 és s_0 értékeiből:

$$H = v_0^2 - \frac{2C^2}{s_0} \dots \dots \dots (3)$$

A H lehet pozitív, zérus, negatív; e szerint három esetet különböztetünk meg.

1. Ha a H pozitív: $H = +h^2$, és

$$v^2 = \frac{2C^2}{s} + h^2 \dots \dots \dots (4)$$

Az egyenlet jobb oldala pozitív tagokból állván, v^2 sehol sem lehet zérus, legkisebb értéke $s = \infty$ -kor lép fel és ez a h^2 -vel egyenlő. Itt fordulópont nincs.

A (4) egyenlet négyzetgyöke írható:

$$-\frac{sd s}{\sqrt{2C^2 s + h^2 s^2}} = dt,^*$$

A baloldali az integráció céljából következőleg bontandó szét:

$$-\frac{1}{2h^2} \left\{ \frac{(2C^2 + 2h^2 s) ds}{\sqrt{2C^2 s + h^2 s^2}} - \frac{2C^2 ds}{\sqrt{2C^2 s + h^2 s^2}} \right\} = dt;$$

és így [Math. repertorium 107. §-ának 30. formulája]

$$t_{s=0} - t = -\frac{C^2}{h^3} \lg \left\{ 1 + \frac{h^2}{C^2} s + \frac{1}{C^2} \sqrt{h^2 s (2C^2 + h^2 s)} \right\} + \frac{1}{h^2} \sqrt{2C^2 s + h^2 s^2} \quad (5)$$

az az időköz, mely alatt a pont az útát $s=s$ -től $s=0$ -ig befutja.

A további kifejtést az olvasóra bizzuk.

2. Ha a H zérus: $H=0$, akkor az (1a) szerint:

$$v^2 = \frac{2C^2}{s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

és a sebesség $s=\infty$ -kor zérus lesz; ott a forduló pont.

Továbbá a (6)-ból:

$$ds \sqrt{s} = -C \sqrt{2} dt,$$

úgy, hogy

$$t_{s=0} - t = + \frac{\sqrt{2}}{3C} s^{\frac{3}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

az idő, mely alatt a pont az $s=s$ tetszőleges helyzettől az s -ek kezdő-pontjáiig számított hosszszat, az s -t befutja.

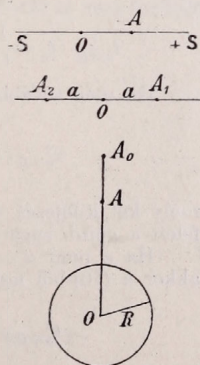
3. Ha a H negatív: $H=-h^2$ és ekkor az (1a)-ból:

$$v^2 = \frac{2C^2}{s} - h^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

A forduló pontra nézve áll: $2C^2 - h^2 s_{v=0} = 0$,
miből, $s_{v=0}$ -t ezentúl a -val jelevél, $a = 2C^2 : h^2$
és így a (8)-ból:

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = 2C^2 \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{a} \right) \quad . \quad . \quad . \quad (8a)$$

[A probléma ezen esete valószínűsíthető, ha valamely, a távolság négyzetével fordítva arányosan vonzó gömb középpontjától a távolságban, az A_0 -ban bocsátunk el egy addig nyugvó pontot, mely azután ezen középpont felé esik (48. ábra); de a mozgás csak addig felel meg a (8a)-nak, míg a pont a gömb felszínére érkezik].



48. ábra.

* A *negatív* előjel jelenti, hogy az O -felé mozgás közben (48. ábra) az s fogy a t növekedése mellett.

A (8a) írható:

$$-\frac{sds}{\sqrt{as-s^2}} = C \sqrt{\frac{2}{a}} dt^*$$

Analog szétbontást alkalmazva, mint 1. alatt, ez az egyenlet

$$+\frac{1}{2} \cdot \frac{(a-2s)ds}{\sqrt{as-s^2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{ads}{\sqrt{as-s^2}} = C \sqrt{\frac{2}{a}} dt,$$

és belőle [Math. repertorium 107. §-ának 31. formulája]

$$t-t_a = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{1}{2}} a \left\{ \sqrt{as-s^2} + \frac{1}{2} a [\pi - \arccos \frac{a-2s}{a}] \right\} \quad . . . (9)$$

Ez az az idő, mely alatt a pont az $s=a$ kezdő távolságtól (mozgása kiinduló pontjától) a tetszőleges $s=s$ távolságig esik.

Ha teszszük $s=0$, a (9)-ből:

$$t_{s=0} - t_a = \frac{\pi}{C} \left(\frac{1}{2} a \right)^{\frac{3}{2}} (9a)$$

azon idő, mely alatt a pont a távolságtól az O -ig esik; az (8a) szerint a pont sebessége az O -ban végtelen nagy; azért az O tulsó oldalára fog átmenni és ott is ugyanily időköz után a távolságot elérni; ott azután megfordul, O felé esik vissza s i. t.

A pont mozgása e szerint itt *periodusos* (szakaszos); a periodus tartama a (9a) négyszeresével egyenlő és a -val való kapcsolata a KEPLER-féle 3. törvénnyel analog (123. §. 228. l.); de az összefüggés az s és a t között nem oly egyszerű, mint az egyszerű rezgés- (vagy lengés-) szerű mozgásoknál, 91—94. §§.

Ha R a fentemlített gömb sugara (48. ábra), akkor a felületére érkezés sebessége és ideje (8a)-ból és (9)-ből:

$$\left. \begin{aligned} v_{s=R}^2 &= 2C^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a} \right) \\ t_{s=R} - t_a &= \frac{1}{C} \sqrt{\frac{1}{2}} a \left\{ \sqrt{aR-R^2} + \frac{1}{2} a [\pi - \arccos \frac{a-2R}{a}] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Ha még továbbá volna: $a=2R$, akkor (10)-ből:

$$v_{s=R}^2 = \frac{C^2}{R}; \quad t_{s=R} - t_{s=2R} = \frac{1}{C} R^{\frac{3}{2}} (1 + \frac{1}{2} \pi), \quad . . . (10a)$$

mely két kifejezés érvényes, ha a pont kezdő helyzete a gömb felszíne felett a gömb sugarának magasságában van.

Ha a pont $a=\infty$ végtelen távolságból (magasságból) esik a gömbre, akkor a (10)-ből lesz:

$$v_{s=R}^2 = 2 \frac{C^2}{R}; \quad t_{s=R} - t_{s=\infty} = \text{végtelen nagy} \quad . . . (10b)$$

* A negatív előjel jelenti, hogy t növekedésével az s fogy (esés a centrum felé).

A C^2 állandóra nézve megjegyzendő, hogy az R sugarú gömb felületén a gyorsulás az (1)-ből:

$$\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)_{s=R} = -\frac{C^2}{R^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Jegyzet. Földünket első közelítésében gömbnek tekintve, az erre vonatkozó adatok középértékben, illetve 45° földrajzi szélesség alatt [v. ö. a math. repertorium II. tábláját, 174. l.]:

$$R=6370000 \text{ meter}; \quad \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)_{s=R} = -g = -9.806 \frac{\text{meter}}{(\text{másodperc})^2},$$

miből (11) szerint:

$$C^2 = 39790 \times 10^{10} \frac{\text{meter}^2}{(\text{másodperc})^2}$$

Ezen viszonyok további fejtegetése a kezdőnek ajánlható; így például a következő kérdéseké is: 1. Mekkora sebességgel érkeznek oly meteorit a föld felületére, melynek a sebessége végtelen távolságban zérus? 2. Mily sebességgel kellene egy ágyúgolyót függőlegesen fölfelé a föld felszínéről ellőni, hogy az a hold távolságáig jusson, melynek középtávolsága a föld középpontjától 60 fűdsugar ?

99. §. *Valamely pont oly gyorsulás alatt kénytelen egyenesben mozogni, mely gyorsulás a vonalon kívül fekvő szilárd pont (centrum) felé van irányítva és a távolság valamely hatványával arányos.*

Legyen (49. ábra) C a szilárd pont, OA az egyenes, melyen a pont mozogni tartozik, $CP=p$ annak távolsága C -től. A gyorsulás értéke:

$$\varphi = Kr^n; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ez mindig C -felé tart (φ vonzó), ha K negatív és C -től el van fordítva (φ taszító), ha K pozitív.

A φ öszszetevője az s mentén (49. ábra):

$$\varphi \frac{s}{r} = Ksr^{n-1} = Ks(p^2 + s^2)^{\frac{1}{2}(n-1)}.$$

A mozgás egyenlete

$$\frac{d^2s}{dt^2} = Ks(p^2 + s^2)^{\frac{1}{2}(n-1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

1. A sebesség általános egyenlete.

Szorozva (2)-öt $2ds$ -el, a 92. §. (2) egyenlete szerint:

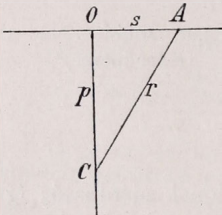
$$d\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right] = K(p^2 + s^2)^{\frac{1}{2}(n-1)} d(s^2),$$

vagy integrálva :

$$v^2 - v_{s=0}^2 = \frac{2K}{n+1} [(p^2 + s^2)^{\frac{1}{2}(n+1)} - p^{(n+1)}] \quad (3)$$

Az egyenlet ily általánosságban tovább nem integrálható.

Az $n=1$ -nek megfelelő eset átmegy a 91., 92. és a 95. §§-okban tárgyalt két esetben, a szerint, a mint K negatív vagy pozitív.

Az $n=-1$ -nek megfelelő esetben a (3) formula nem használható, hanem a (2)-ből lesz :


$$d(v^2) = K \frac{d(s^2)}{p^2 + s^2},$$

vagy integrálva :

49. ábra.

$$v^2 - v_{s=0}^2 = K \lg(1 + \frac{s^2}{p^2}) \quad (3a)$$

2. Az s távolság egyenlete, mikor az $s : p$ viszony kicsiny.

Ha az $OA=s$ távolság a p -hez képest kicsiny, azaz, ha a mozgás csak O közelében történhetik, akkor a (3) egyenlet közelítésben integrálható.

Ez egyenletet írjuk :

$$v^2 - v_{s=0}^2 = \frac{2K}{n+1} p^{n+1} \left\{ \left(1 + \frac{s^2}{p^2} \right)^{\frac{1}{2}(n+1)} - 1 \right\}.$$

Kifejtve a zárójeles kifejezést *Newton* binomiális tétele szerint [Math. repertorium 20. §.] és rövidítve ott, marad :

$$v^2 - v_{s=0}^2 = \frac{2K}{n+1} p^{n+1} \left\{ + \frac{1}{2}(n+1) \frac{s^2}{p^2} + \frac{1}{2}(n+1) \cdot \frac{1}{2}(n-1) \cdot \frac{1}{2} \frac{s^4}{p^4} + \dots \right\}$$

Elhanyagolva az $(s^2 : p^2)$ kicsiny értékű viszony magasabb hatványait az elsővel szemben, marad :

$$v^2 = K p^{n-1} s^2 + v_{s=0}^2 \quad (4)$$

A további számítás a K előjelétől függ.

a) *Vonzó gyorsulásnál* K negatív, és értéke $K = -C^2$, továbbá vezessünk be C^2 és p helyébe ω^2 és c^2 állandókat a

$$\left. \begin{aligned} K p^{n-1} &= -C^2 p^{n-1} = -\omega^2; \\ v_{s=0}^2 &= +\omega^2 c^2; \end{aligned} \right\}$$

egyenletek segítségével, úgy hogy (4)-ből :

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \omega^2(c^2 - s^2), \quad \dots \quad (4a)$$

mely egyenlet a 92. §. 1. pontja mozgásával (123. l.) megegyezik; e szerint itt az O körül egyszerű periodusos mozgás származik, melynek periodusa:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{C} p^{-\frac{1}{2}(n-1)} \quad \dots \quad (5)$$

b) *Taszító gyorsulásnál* K pozitív, értéke $K = +C^2$, továbbá vezetünk be itt is a C^2 és p helyébe ω^2 és c^2 állandókat a

$$\left. \begin{aligned} Kp^{n-1} &= +C^2 p^{n-1} = +\omega^2; \\ v_{s=0}^2 &= +\omega^2 c^2; \end{aligned} \right\}$$

egyenletek segítségével; e szerint (4)-ből:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \omega^2(c^2 + s^2) \quad \dots \quad (4b)$$

mely egyenlet a 95. §. (3) egyenletével egyezik meg; ezért a mozgás természete is ugyanaz lesz, mint az ott talált mozgásé.

3. *A sebesség és a távolság egyenlete, ha a p távolság zérus; egyes esetek.*

Ha a gyorsulás szilárd pontja C , magában az OA egyenesnek O pontjában fekszik (vele egybeesik), akkor $p=0$ és a (3)-ból:

$$v_{s=0}^2 - v^2 = \frac{2K}{n+1} s^{n+1} \quad \dots \quad (4a)$$

Az egyenlet még ebben az egyszerűsített alakban sem integrálható mindig.

a) *Vonzó gyorsulásnál* $K = -C^2$ és a sebesség egyenlete:

$$v_{s=0}^2 - v^2 = \frac{2C^2}{n+1} a^{n+1} \quad \dots \quad (6)$$

Az $s=\infty$ távolságra nézve a bal oldal is végtelen nagy lesz, a mi annyit mond, hogy a pont végtelen távolból növekedő sebességgel mozog az O felé és ezen helyzetben végtelen nagy sebességgel bír.

Ha ellenben a mozgás a távolságban *forduló* ponttal bír, akkor (6)-ból

$$v_{s=0}^2 = \frac{2C^2}{n+1} s^{n+1}$$

és így a (6)-ból általánosságban:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{2C^2}{n+1} (a^{n+1} - s^{n+1}) \quad \dots \quad (6a)$$

Ez az egyenlet $n=1$ és $n=-2$ esetekben integrálható (92. §. 1. pontja, és 98. §.)

Továbbá, ha n negatív és kisebb a -2 -nél, akkor téve: $n = -r$, a (6a) írható:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -\frac{2C^2}{r-1} \left(\frac{1}{a^{r-1}} - \frac{1}{s^{r-1}}\right) \quad (6aa)$$

Az egyenlet nem integrálható általánosságban; de ha a forduló pont az O -tól végtelen távolságban van, akkor $a = \infty$ és az egyenlet írható:

$$s^{\frac{1}{2}(r-1)} ds = C \sqrt{\frac{2}{r-1}} dt$$

melyből:

$$t - t_{s=0} = \frac{\sqrt{2}}{C} \cdot \frac{\sqrt{r-1}}{r+1} s^{\frac{1}{2}(r+1)} \quad (7)$$

Ez azon időköz, mely alatt a pont az O kezdetből kiindulólág, az s távolságig jutott.

b) Taszító gyorsulásnál $K = +C^2$ és a sebesség egyenlete (4_a)-ből:

$$v^2 = r_{s=0}^2 + \frac{2C^2}{n+1} s^{n+1} \quad (6b)$$

Itt a pont az $s = \infty$ -ből fogyó sebességgel mozog az O felé.

Az egyenlet nem integrálható általánosságban.

De ha a mozgás forduló pontja O -ban van, akkor a (6b)-ből:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{2C^2}{n+1} s^{n+1}, \quad s^{-\frac{1}{2}(n+1)} ds = C \sqrt{\frac{2}{n+1}} dt,$$

és ebből

$$t_{s=0} - t = \frac{\sqrt{2}}{C} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{n-1} s^{-\frac{1}{2}(n+1)}, \quad (8)$$

mely idő alatt a pont az $s = s$ -ből kiindulólág, az O kezdőpontig terjedő s utat futja be.

4. A kivételes eset, hol $n = -1$.

Ha $p = 0$ és a a forduló pont távolsága, a (3a)-t megelőző egyenletből:

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = K \lg \frac{s^2}{a^2} \quad (3_4)$$

Az egyenlet bal része absolute positiv lévén, jobb oldalának is ugyanannak kell lennie, e szerint, ha $K = -C^2$, akkor egyszersmind $s^2 < a^2$; ellenben ha $K = +C^2$, akkor $s^2 > a^2$.

a) Vonzó gyorsulásnál $K = -C^2$ és (3₄) írható:

$$\frac{ds}{dt} = C \sqrt{2} \sqrt{\lg \frac{a}{s}} \quad (9a)$$

Itt a mozgás periodusos lesz, mert forduló pontok $s = a$ -ban vannak (az O két oldalán) és onnan a sebesség az O felé mindig növekszik, O -ban végtelen nagy lesz; de e mozgás nem egyszerű harmonikus mozgás.

Az egyenlet általánosságban nem integrálható, de a periodus kiszámítható.

Erre nézve tételek:

$$\sqrt{\lg \frac{a}{s}} = x;$$

ebből:

$$\frac{a}{s} = e^{x^2}; \quad s = a e^{-x^2}; \quad ds = 2a e^{-x^2} x dx;$$

$$C \sqrt{2} dt = ds \left(\lg \frac{a}{s} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{ds}{x} = 2a e^{-x^2} dx.$$

A periódus negyedrésze:

$$\frac{1}{4} T = \int_{s=a}^{s=0} dt = \frac{a}{C} \sqrt{2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Az itt fellépő Laplace-féle integrál értéke *

$$* \text{ A Laplace-féle határozott integrál: } 2U = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx, \text{ vagy: } 2U = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy$$

két alakja teljesen egyenértékű, mert az integráció változójának jelölése közömbös.

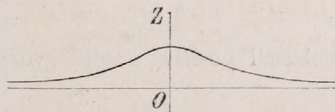
Áll szorzás útján:

$$4U^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy, \quad \dots \quad (I)$$

mely kifejezés eleme:

$$e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

egy $dx dy$ alapú, $z = e^{-(x^2+y^2)}$ magasságú oszlop térfogata gyanánt tekinthető.



50. ábra.

E szerint $4U^2$ oly forgási alak térfogata, mely egyrészt az XY koordináta-sík, másrészt oly forgási felület által van határolva, melynek meridián görbéje (nemző görbéje) a $z = e^{-(x^2+y^2)}$ egyenletnek felel meg (50. ábra); ennek csúcsa $z_0 = e$ magasságban van az O felett a Z tengelyen, míg felület a Z tengelytől kezdve végtelen távolságra terjed és folytonosan és végtelenül közeledik az XY síkhoz.

Az I. egyenletnek polár-coordinátákban való kifejezése céljából írjuk:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

és az (XY) sík-, azaz itt $(R\Phi)$ sík területi eleme:

$$r d\varphi \cdot dr.$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi};$$

és így a periodus:

$$T = 2^{\frac{3}{2}} \frac{a}{C} \sqrt{\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

b) Taszító gyorsulásnál $K = +C^2$ és a (3₄)-ből:

$$\frac{ds}{dt} = C \sqrt{2} \sqrt{\lg \frac{s}{a}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9b)$$

A mozgás itt nem lehet periodusos, mert $s^2 > a^2$; a pont a megfordulás után a végtelen távolság felé halad.

Ha itt tesszük:

$$\sqrt{\lg \frac{s}{a}} = x; \quad \frac{s}{a} = e^{x^2}; \quad ds = a e^{x^2} 2x dx;$$

leszen a (9b)-ből:

$$dt = \frac{a}{C} \sqrt{2} e^{x^2} dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Az egyenlet nem integrálható tovább; a $t_{s=\infty} - t_{s=a}$ időköz végtelen nagy.

100. §. *Valamely pont egyenes vonalú mozgást kénytelen végezni oly gyorsulás alatt, melynek iránya mindig a pályán kívül fekvő szilárd ponton megyen át és a távolság tetszőleges függvénye.*

Legyen (49. ábra): C a szilárd pont OA a mozgás pályája és a C felé tartó gyorsulás

$$\varphi = K f(r), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

hol K a vonzó gyorsulásnál pozitív, taszító gyorsulásnál negatív és

E szerint egy elemi oszlop térfogata:

$$z r dr d\varphi = e^{-r^2} r dr d\varphi$$

Ha ezeket az elemi térfogatokat $\varphi=0$ és $\varphi=2\pi$ továbbá $r=0$ és $r=\infty$ határok között összegezzük, nyerjük a nevezett forgási alak térfogatát, azaz az (I) értékét:

$$4 U^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

Amde:

$$4 U^2 = 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_0^{\infty} = \pi$$

és így végre:

$$U = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (III)$$

$f(r)$ a távolság tetszőleges függvénye; a többi jelölések a 99. §-éivel egyezők.

A pályamenti összetevője a gyorsulásnak:

$$\varphi \cos(r, s) = K f(r) \frac{s}{(p^2 + s^2)^{\frac{3}{2}}};$$

azaz, a mozgás egyenlete:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = K \frac{s}{(p^2 + s^2)^{\frac{3}{2}}} f(p^2 + s^2)^{\frac{1}{2}} \dots \dots \dots (2)$$

A (2) egyenletnek kissé más alakot adhatunk, ha a következő megfontolásból indulunk ki.

Ugyanis:

$$r^2 = p^2 + s^2; \quad r dr = s ds; \quad \frac{dr}{ds} = \frac{s}{(p^2 + s^2)^{\frac{1}{2}}} \dots \dots (3)$$

Legyen most $F(r)$ oly függvénye az r -nek, melynek összszefüggése az $f(r)$ -rel:

$$f(r) = \frac{dF(r)}{dr} \dots \dots \dots (4)$$

Helyetteszve (3)-at és (4)-et a (2)-be, leszén belőle:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = K \frac{d}{ds} [F(r)] \dots \dots \dots (5)$$

A 92. §. (2) egyenlete szerint ered:

$$d\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right] = 2K d[F(r)]$$

vagy:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2K [F(r_2) - F(r_1)] \dots \dots \dots (6)$$

Ez a *sebesség egyenlete*, mely szerint a sebesség négyzetének változása a pontnak $_1$ és $_2$ indexű helyei között csakis az ezen helyzetekhez tartozó $r_1 = (p^2 + s_1^2)^{\frac{1}{2}}$ és $r_2 = (p^2 + s_2^2)^{\frac{1}{2}}$ távolságoktól, illetve az s_1 és s_2 -től függ.

Jegyzet. A mozgás egyenlete kicsiny távolságokra nézve.

A (6) egyenlet általánosságban nem integrálható tovább.

De a midőn a pont mozgása csak az O kezdőpont közelében történik, azaz, ha az s mindig kicsiny marad a p -hez képest, akkor az integráció elvégezhető.

A (3) egyenletben az r NEWTON binomális tétele szerint kifejezhető:

$$r = p \left(1 + \frac{s^2}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} = p \left(1 + \frac{1}{2} \frac{s^2}{p^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{s^4}{p^4} + \dots\right)$$

101. §. *Feladatok a pont egyenes vonalú mozgására.**

Hogy a kezdőknek mozgási problémák önálló megvizsgálására és eredményeinek értelmezésére alkalmat nyújtsunk, a következőkben az egyenesvonalú pontmozgásra ötven feladatot adunk; ezek mindegyike a 90–100. §§-ban tárgyalt példáknál követett eljárások valamelyike szerint fejthető meg.

(A pont *dinamikájában* szintén számos mozgási feladatot fogunk adni.)

1. A pont az $s=a+bt+ct^2+dt^3+et^4$ egyenlet által jellemzett mozgást végezze; a, b, c, d, e állandók.

Mi a feltétele annak, hogy a mozgás forduló ponttal bír vagy sem? [A $v=0$ -ból a 90. §. szerint a $t_{v=0}$ képeztessek, ha ennek értékei reálisak, forduló pontok léteznek; ha imagináriusak nem]. A.

2. Milyen a pont mozgása, ha annak egyenlete $s=a \cos^2(\omega t + \varepsilon)$? a, ω, ε állandók.

A mozgás nem egyszerűen periodusos, periodusa $(2\pi:\omega)$, de az s mindig pozitív. Az egyenlet még írható: $s=\frac{1}{2}a(1+\cos 2(\omega t + \varepsilon))$, ennek értelmezése. Milyen a mozgás differenciálegyenlete viszonyítva az egyszerűen periodusos mozgáshoz? A.

3. Valamely pont a föld nehézségéből származó g gyorsulás befolyása alatt $t=0$ időpillanatban v_0 sebességgel hajítottak függőlegesen *feléle*. A mozgás egyenlete: $s''=-g$. Bizonyítsassék be, hogy itt:

$$v=v_0-gt, \quad s=v_0t-\frac{1}{2}gt^2, \quad v_0^2-v^2=2gs;$$

továbbá, hogy az emelkedés ideje és az elért legnagyobb magasság:

$$T=\frac{v_0}{g}; \quad H=\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g},$$

s végre, hogy a pont ugyanazon v_0 sebességgel érkezik vissza a kiindulás pontjához. V.

4. Bizonyítsassék be, hogy a $t=0$ időpillanatban v_0 sebességgel függőlegesen *lefelé* hajított pontra nézve áll:

$$v=v_0+gt; \quad v=v_0t+\frac{1}{2}gt^2, \quad v^2-v_0^2=2gs. \quad V.$$

5. Valamely pont (kicsiny golyó) a hajlású AC lejtőn (51. ábra) surrolás nélkül gördül a föld vonzása által létesített gyorsulással *lefelé*. A gyorsulásnak itt érvényesülő összetevője $g \sin \alpha$; ezért a pont, mely $t=0$ időpillanatban $s=0$ -nál és $v=0$ -al kezdi a mozgását, $s=\frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha$ és $v=gt \sin \alpha$ egyenletek által kifejezett úthosszal és sebességgel bír. Bizonyítsassék be, hogy az $\overline{OA}=a$ sugarú kör bármely AC húrján A -ból kiindulólág legördülő pontnak a kör kerületéhez leérkezésének ideje:

* A feladatok után tett betűk azok szerzőjét jelentik; így V. általánosan elterjedt (vulgaris) feladatot jelent. F. a *Fuhrmann* (Aufgaben aus der analytischen Mechanik Leipzig 1871/3-; P. J. a *Jullien* pater (Problèmes de Mécanique rationnelle. Második kiadás, két kötet. Paris 1866-; S. G. a *Saint-Germain*, A. de, Exercices sur la Mécanique rationnelle. Második kiadás. Paris 1889-; T. a. S. a *Tait and Steele*, Dynamics of a particle. Ötödik kiadás. London 1882-; Vi. a *Villie*, Compositions d'Analyse et de Mécanique, Paris 1885-gyűjteményeiből merített, végre A (Autor) ezen könyv szerzőjétől származó feladatok.

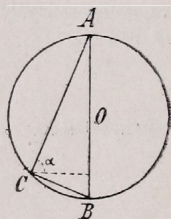
A [] zárójelek között a szerző a megfejtés általános menetét jelölte meg.

$$T=2\sqrt{\frac{a}{g}}. \quad \text{V.}$$

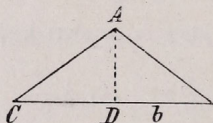
6. Valamely $2b$ szélességű tető hajlása olyképen választandó, hogy az esővíz a lehető legrövidebb idő alatt folyjon le (52. ábra). Az 5. feladat eredményei szerint a keresett hajlás 45° . F.

7. Adva van az MN görbe és az A pont (53. ábra); kerestetik az az AB lejtő, melyen a víz folyása A -ból az MN görbére a lehető legrövidebb idő alatt történik. Bizonyítsák be, hogy a keresett lejtő oly körnek AB húrja, melynek középpontja az A -ból bocsátott AD merőlegesen fekszik és mely kör egyszerre átmegy az A ponton és érinti az MN görbét; végre, hogy az AB' és az AB_1 lejtők befutására több időre van szükség, mint az AB befutására. T. a. S.

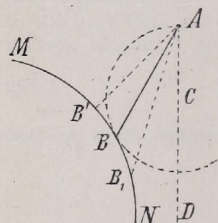
8. Bizonyítsák be, hogy ha a megelőző feladatban az MN kör, akkor az AB egyenes az MN kör azon húrjának folytatásában fekszik, mely származik, ha az A pontot az MN kör függőleges átmérője alsó vagy



51. ábra.



52. ábra.



53. ábra.

felső végpontjával kapcsoljuk össze, a szerint, a mint az A pont az MN körön kívül vagy belül fekszik. T. a. S.

9. Legyen a 7. feladatban MN egy függőlegesen fölfelé irányított tengelyű parabola és A annak gyújtópontja; bizonyítsák be, hogy a legrövidebb esésű lejtő a tengelynek a focus és a csúspont közötti része. T. a. S.

10. Találtsák 7. feladatban a legrövidebb esésű lejtő, midőn MN egy horizontális tengelyű parabola és A a focusa. T. a. S.

11. Egy verticálisban fekvő két ponthoz kerestessenek azok a pontok, melyekből a lejtőn való esés az adott két ponthoz egyenlő időben történik; bizonyítsák be, hogy ezen pontok geometriai helye oly forgás-felület, melynek meridiánja derékszögű hyperbola. T. a. S.

12. Egy verticálisban fekvő két pontból történik a lejtőn való esés egyenlő időben a tér egy harmadik pontja felé. Bizonyítsák be, hogy ezen harmadik pontok geometriai helye egyenoldalú forgás-hyperboloid, melynek két csúsa a nevezett két pont. T. a. S.

13. Ha az AB lejtőn (54. ábra) legördülő pont *állandó* ellenállást (surlódást) szenved, a következő viszonyok állanak; A surlódás mindenkor a mozgásával ellenkező irányban hat; ha α_0 a lejtő azon hajlásszöge, mely mellett az M pont a föld nehézségi gyorsulása és a surlódás befolyása alatt épen még nyugalomban marad, akkor $\vec{MQ} =$ a surlódás gyorsulása $= g \sin \alpha_0$. Továbbá az MQ surlódás (különben egyenlő körülmények között) egyenesen arányos a működő gyorsulásnak az AB lejtőre merőle-

ges összetevőjével, úgy hogy α hajlásnál $\mu g \cos \alpha$ a surlódás értéke és $s' = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha$ a mozgás egyenlete, mely megvizsgálandó. T. a. S.

14. A pont gyorsulása valamely más ponttól való távolságával egyenesen arányos, ezen utóbbi pont az összekapcsoló egyenesen állandó c sebességgel halad; milyen az első pont mozgása? [A relativ mozgásról a 81. §-ban említett tételt alkalmazva, mind a két ponthoz $-c$ sebességet adva, a második pont nyugalomba jő és az elsőnek relativ mozgása az $s_1'' = Ks_1$, $s_1' = s' - c$; $s_1 = s + ct + \text{constans}$ egyenletekből adódik, hol s_1 a relativ, s az abszolút mozgásra vonatkozik.] P. J.

15. Két pont két különböző egyenesen $\frac{1}{2}c_1$ és $\frac{1}{2}c_2$ állandó gyorsulással mozog; milyen nagy a legrövidebb távolságuk és mikor következik ez be? (Mikor $r = 0$). P. J.

16. Valamely pont gyorsulása fordítva arányos egy másik szilárd ponttól (centrumtól) való távolság gyökével; mozgásának differenciálegyenlete $s' = K \sqrt{s}$; milyen a r sebesség és az s eltávolodás kifejezése? [Az egyenlet kétszeri integrációja a 92. és 95. §§. sémái szerint lehetséges a szerint, a mint a gyorsulás vonzó, $K = -C^2$; vagy taszító, $K = +C^2$]. A.

17. Ha a 16. feladatban vonzó gyorsulásnál $s = a$ a forduló pont: bizonyítsák be, hogy a fix pontban (centrumban) a sebesség $r_{s=0} = 2Ca^{\frac{1}{2}}$ és a mozgás periodusa $T = (16a^{\frac{3}{2}} : 3C)$. T. a. S.

18. Valamely pont gyorsulása fordítva arányos egy másik szilárd ponttól való távolság harmadik hatványával; milyen a mozgás differenciálegyenlete, a r sebesség és az s eltávolodás kifejezése. [Itt is alkalmazhatók a $K = -C^2$ és a $K = +C^2$ esetekben a 92. és 95. §§. eljárásai]. A.

19. Bizonyítsák be, ha a 18. feladatban vonzó gyorsulásnál $s = a$ a forduló pont, hogy a mozgás periodusa $4C^{-1}a^2$. T. a. S.

20. Ha a 18. feladatban a gyorsulás taszító, akkor a mozgás nem periodusos és a pont a centrumot nem mindig érheti el; ha a forduló pont $s = a$ véges távolságban fekszik, akkor vizsgáltsák meg a mozgás a forduló pont előtt és az után. A.

21. Valamely pont egymástól $2a$ távolságban lévő két fix centrum felé szenved a megfelelő távolságok négyzetével fordítva arányos $-C_1^2 s_1^{-2}$ és $-C_2^2 s_2^{-2}$ vonzó gyorsulást. Maga a mozgó pont a két centrumot egybekapcsoló egyenesen marad és áll:

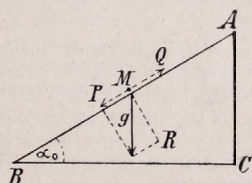
$s_1 - s_2 = 2a$. Ha a mozgó pont a két centrum között van, akkor az s_1 és az s_2 és a gyorsulások ellentett irányúak és bizonyos helyzetben az eredő gyorsulás zérus; ez a helyzet az úgynevezett neutrális pont, hol fekszik ez? [A $C_1^2 s_1^2 = C_2^2 s_2^2$; $s_1 + s_2 = 2a$ feltételi egyenletekből nyerhető]. A.

22. Milyenek a mozgás differenciálegyenletei a 21. feladatból ha $C_1 = C_2$, mikor a pont a két centrumon kívül és mikor azokon belül mozog? Meddig lehet ezeket az egyenleteket integrálni? A.

23. Ha a 21. feladatban $C_1 \leq C_2$ és a mozgó pont a két centrum között, azoktól a_1 és a_2 távolságban van, bizonyítsák be, hogy ezen helyzetben a neutrális helyzet elérése céljából a pontnak oly v_0 sebességet kell tulajdonítani, hogy álljon:

$$v_0^2 = (a_2 C_1 - a_1 C_2)^2 : a_1 a_2 (a_1 + a_2). \quad \text{T. a. S.}$$

24. A két centrum a közötté lévő mozgó pontot egybekapcsoló vonaluk mentén a távolság első hatványával arányos gyorsulással mozgattja; ha $2a$ a két centrum egymástól való távolsága és ennek felező pontja az s -ek kezdőpontja, akkor az eredő gyorsulás egyenlete:



54. ábra.

$$s'' = -C_1^2(a+s) + C_2^2(a-s) = -(C_1^2 + C_2^2)s + (C_2^2 - C_1^2)a,$$

miből a pont periodusos mozgása és ennek $T = (2\pi : \sqrt{C_1^2 + C_2^2})$ periodusa következik. A.

25. Két fix centrumból származó gyorsulás legyen $K_1 s_1^{n_1}$ és $K_2 s_2^{n_2}$, hol n_1 és n_2 pozitív vagy negatív egész számok, s_1 és s_2 a mozgó pont távolsái a két centrumtól és $K_1 = \pm C_1^2$, $K_2 = \pm C_2^2$, a szerint, a mint az egyes gyorsulások vonzóak vagy taszítóak. Kerestessék ezen gyorsulások neutrális pontja, mely a centrumok között fekszik, ha a gyorsulások egyenműek, és a centrumokon kívül, ha gyorsulások különneűek; az utóbbi esetben két neutrális pont van. A.

26. Vizsgáltsák meg, mily feltételek mellett van a 25. feladatban az eredő gyorsulás mindig a neutrális pont felé fordítva és mikor van mindig tőle elfordítva. Ha az eredő gyorsulás mindig a neutrális helyzet (pont) felé tart és a mozgó pont csak kicsiny távolságokban mozoghat a neutrális helyzet körül: bizonyítsák be, hogy a mozgás periodusos és fejeztessék ki a periodus tartama az egy, illetve a két neutrális helyzet esetében. A.

27. A pont eltávolodásának kifejezése $s = a \cos^2(\omega t)$ legyen; jellemeztessék ezen periodusos mozgás, a periodus $T = (\pi : \omega)$. A.

28. A pont gyorsulásának kifejezése $s' = a \cos^2(\omega t)$, hol a és ω állandók, és s a mozgó pont távolsága az egyenesben fekvő szilárd ponttól. Milyen a mozgás? [Az egyenlet jobb oldalába $\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\omega t))$ irandó és az integráció a 92. §. sémája szerint hajtandó végre. A mozgás egy egyszerűen periodusos és egy egyenletesen gyorsuló mozgás összege]. A.

29. A pont eltávolodásának kifejezése legyen $s = a \cos^2(\omega t) + b \sin^2(\omega t)$; jellemeztessék és értelmeztessék ezen periodusos mozgás eltávolodása s , sebessége v és gyorsulása φ . A.

30. A pont gyorsulása legyen $s'' = a \cos^2(\omega t) + b \sin^2(\omega t)$, milyen a mozgás? [A goniometria függvények a 28. feladat értelmében $(2\omega t)$ függvényei által helyettesítendőek, a mozgás típusa ugyanaz, mint 28-ban]. A.

31. A pont gyorsulása legyen $s'' = a \cos^n(\omega t) + b \sin^n(\omega t)$, hol n pozitív. Bizonyítsák be, hogy a mozgás, ha $n = 2\nu + 1$, azaz páratlan egész szám, egyes, egyszerűen periodusos mozgások összege, melyeknek periodusai rendre $(2\pi : \omega)$, $(2\pi : 3\omega)$, $(2\pi : 5\omega)$, ... $(2\pi : (2\nu + 1)\omega)$; és melyekhez még egy egyenletes sebességű mozgás is járul; ellenben, ha $n = 2\nu$, azaz páros egész szám, szintén egyes, egyszerűen periodusos mozgások összege, melyek periodusai rendre $(2\pi : 2\omega)$, $(2\pi : 4\omega)$, $(2\pi : 6\omega)$, ... $(2\pi : 2\nu\omega)$, de ezeken kívül hozzájárul egy egyenletesen gyorsuló mozgás. A.

[Jegyzet. A $\cos^n(\omega t)$ és $\sin^n(\omega t)$ hatványmenynyiségeknek az (ωt) többszöröseinek sinusai és cosinusai szerinti kifejtésére nézve a Math. repertorium 5. §-ának sémái érvényesek].

32. Valamely egyenletes, vonalas a sugarú gyűrű minden eleme a mozgó pontra oly vonzó gyorsulást fejt ki, mely az ívelem hosszával egyenesen, az ívelemnek a mozgó ponttól való távolsága négyzetével fordítva arányos. Milyen a pont sebessége, midőn az a gyűrű tengelyében mozog; milyen periodusos mozgásokat végez az, midőn ezen tengely mentén a gyűrű középpontjától számított csak kicsiny távolságokban mozoghat? A.

33. Három szilárd pont, mely egyenoldalú háromszög csúcsát képezi, egy mozgó pontra oly egyenlő vonzó gyorsulást fejt ki, mely a csúcsoktól számított r távolságtól függ csak, az r mentében fekszik és $C^2 f(r)$ által fejeztetik ki. A pont csak a háromszög síkjára merőleges, középpontján átmenő tengelye mentén mozoghat; milyen a sebesség egyenlete;

milyen a periodusos mozgás, ha a pont a háromszög középpontjától csak kicsiny távolságokban mozoghat? A.

34. Miképen módosul a megelőző feladat, ha négy-, öt-, és általános-ságban véve n szögű szabályos sokszög csúcsai gyakorolnának egyenlő vonzó $O^2f(r)$ gyorsulást a mozgó pontra, és ez csak a tengelyben mozoghat? A.

35. Valamely egyenletes, vonalas a sugarú gyűrű minden eleme a mozgó pontra oly *taszító* gyorsulást fejt ki, mely az ívelem hosszával egyenesen, az ívelemnek a mozgó ponttól való távolsága négyzetével fordítva arányos. Milyen periodusos mozgásokat végez a pont, midőn az a gyűrű síkjában, de középpontjától csak kicsiny távolságokban mozog? T. a. S.

36. Egy vonalas gyűrű minden dS eleme $Kf(r)dS$ egyenlő vonzó vagy taszító gyorsulást gyakorol a gyűrű síkjában mozgó pontra; a neutrális helyzet a gyűrű középpontja a mozgás ettől csak kis távolságokban történik; mikor lesz a mozgás periodusos és milyen a periodus? A.

37. Egy egyenoldalú háromszög három csúcsa egyenlő $Kf(r)$ vonzó vagy taszító gyorsulást gyakorol a pontra, mely a háromszög síkjában mozoghat; a háromszög középpontja a neutrális helyzet, továbbá a pont a háromszöget felező egyenesben, csak kis távolságokban mozoghat a középponttól; mikor lesz a mozgás periodusos és milyen a periodus? A.

38. Egy derékszögű egyenközény négy csúcsa egyenlő $Kf(r)$ vonzó vagy taszító gyorsulást fejt ki az egyenközény síkjában mozgó pontra; a neutrális helyzet az egyenközény középpontja, a mozgás csak kis távolságokban történhetik ezen középponttól és pedig:

α) a diagonális mentén,

β) a hosszabb oldalhoz párhuzamosan,

γ) a rövidebb oldalhoz párhuzamosan.

Mikor lesz az α), β), γ) esetekben a mozgás periodusos, mekkora a periodus? A.

39. Valamely pontra ható gyorsulás egyenesen arányos ezen pontnak egy fix ponttól való távolsága n -edik hatványával; kerestessék az n úgy, hogy a sebesség, melylyel a mozgó pont a végtelen távolságból a centrumtól a távolságra érkezik, ugyanaz legyen, mint az, melyet nyer, midőn a távolságból $\frac{1}{2}a$ távolságnyra jut. T. a. S.

40. Valamely pontra ható gyorsulás egy az egyenesvonalú pályában fekvő centrumtól számított távolság négyzetével fordítva arányos; a forduló pont a távolságban van; bizonyítsassék be, hogy az idő, mely alatt a pont e távolság első $\frac{1}{2}a$ felén keresztül esik, úgy viszonylik ahhoz az időhöz, mely alatt a pont e távolság második $\frac{1}{2}a$ felén keresztül esik, mint $\pi + 2$ a $\pi - 2$ -höz. T. a. S.

41. Valamely pont egyenesben mozog egy fix pont felé úgy, hogy a forduló ponttól számított esés ideje (tartama) fordítva arányos a fix ponttól való távolság négyzetével; milyen a gyorsulás törvénye? T. a. S.

42. Valamely pont egyenesben mozog egy centrum felé; a a forduló pont távolsága, s a mozgó pont távolsága a centrumtól, a sebesség

legyen $\sqrt{\frac{a}{s} - 1}$; milyen a gyorsulás? T. a. S.

43. Valamely pont gyorsulása a centrumtól való távolsága $\frac{2}{3}$ hatványával fordítva arányos; mily nagy az esés tartama (érkezés ideje) az a távolságú forduló ponttól a fix pontig? T. a. S.

44. A mozgó pont gyorsulása fordítva arányos a $(b+s)$ összeg harmadik hatványával, hol b egy állandó, s ellenben a mozgó pontnak a centrumtól való távolsága, milyen a mozgás? A.

45. Miképen módosul a megelőző feladat, ha a gyorsulás a $(b-s)^{-3}$ menynyiséggel arányos? A.

46. A mozgó pontra egy fix centrumból ható gyorsulás legyen $s'' = K(a + bt)^{-2}$, milyen a mozgás az s -ek vonala mentén? A.

47. Milyen lesz a mozgás, ha a megelőző feladatban a gyorsulás értéke volna $s'' = K(a + bt)^{-n}$, n alatt tetszőleges pozitív vagy negatív, egész vagy törtszámot K, a, b alatt állandókat értve? A.

48. Milyen az idő és a sebesség összefüggése, ha a megelőző feladatban az $n=1$ kivételes eset lép fel? A.

49. Milyen a sebesség és a centrumból számított s távolság között az összefüggés, ha a gyorsulás kifejezése: $s'' = K(a + bt^2)^{-1}$, hol K, a, b állandók. A.

50. A mozgó pont sebessége $[a + b \cos(\omega t)]^{-1}$ menynységgel arányos; milyen a φ gyorsulás és az s eltávolodás? A.

Általános megjegyzés. A kezdőnek nagyon ajánlandó, a mozgás viszonyait oly formán rajzban előtűntetni, hogy az s -ek az abszcissák, ellenben a sebességek, a gyorsulások s. i. t. az ordináták legyenek; az így származó görbék a mozgás áttekinthető képét adják, mely a probléma értelmezését sokszor nagyon könnyíti.

2. Példák és eljárások a pont görbevonali mozgására.

102. §. *Általános megjegyzések.* Egyenes vonali, parabolás, sinus-, láncvonal-, hyperbolás mozgás.

A síkbeli görbevonali mozgást teljesen írhatjuk le, ha a mozgó pont öszszrendezőit mint az idő explicit függvényeit ismerjük. Ezekből a sebesség és gyorsulás határozható meg. De más két meghatározó része a mozgásnak vagy más két összefüggés is lehet adva, melyekből a többi jellemzők meghatározandók.

A pálya egyenletét rendszeren az időnek a koordináták egyenleteiből való kiküszöbölése által nyerjük.

A görbevonali mozgás problémáinak tárgyalási módja különböző a szerint, a mint a mozgást meghatározó összefüggések különbözőképen vannak adva.

Rendszeren az XY öszszrendezői síkot szokás a mozgás síkjául választani; ekkor a térbeli mozgásnak z, v_z, φ_z jellemzői zérus értékűek.

1. Egyenletes egyenes vonali mozgás.

Legyenek a mozgás adott egyenletei:

$$x = a_1 + b_1 t; \quad y = a_2 + b_2 t. \quad \dots \quad (1)$$

Ezekből:

$$\begin{aligned} v_x &= b_1; & v_y &= b_2; \\ \varphi_x &= 0; & \varphi_y &= 0. \end{aligned}$$

E szerint a mozgó pont x és y koordinátái az idővel arányosan növekszenek; a pont eredő sebessége és gyorsulása:

$$\left. \begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \\ \varphi &= \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

A pont sebessége nagyság és irány szerint *állandó*, a mozgás *egyenletes és egyenesrónali*.

Az a_1, a_2, b_1, b_2 állandók kinematikai jelentése önként következik, (v. ö. a 90. §. 1. pontját).

A *pálya egyenletét* nyerjük ha x és y egyenleteiből a t -t kiküszöböljük; nyerjük az (1)-ből:

$$y = x \frac{b_2}{b_1} + \frac{1}{b_1} (a_2 b_1 - a_1 b_2) \dots \dots \dots (3)$$

Ez oly *egyenes* egyenlete, melynek az X tengellyel képzett szögének tangense $(b_2 : b_1)$ és mely a pozitív y -ok tengelyét $[(a_2 b_1 - a_1 b_2) : b_1]$ távolságban metszi.

2. Parabolás mozgás.

Legyen:

$$\left. \begin{aligned} x &= a_1 + b_1 t + c_1 t^2 \\ y &= a_2 + b_2 t \end{aligned} \right\}; \dots \dots \dots (4)$$

azaz az x coordináta állandó sebességgel, az y állandó gyorsulással növekszik.

Itt:

$$\begin{aligned} v_x &= b_1 + 2c_1 t, & v_y &= b_2 \\ \varphi_x &= 2c_1, & \varphi_y &= 0 \end{aligned}$$

Ezek szerint:

$$\left. \begin{aligned} v &= \sqrt{b_2^2 + (b_1 + 2c_1 t)^2} \\ \varphi &= 2c_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

A pont sebessége itt az idő függvénye, ellenben a gyorsulás állandó értékű és az Y tengelyhez párhuzamos.

A *pálya egyenletét* a (4)-ből a t kiküszöbölése, és az y szerinti rendezés után nyerjük:

$$y^2 + \frac{b_1 b_2 - 2a_2 c_1}{c_1} y + \frac{a_1 b_2^2 - a_2 b_1 b_2 + a_2^2 c_1}{c_1} = \frac{b_2^2}{c_1} x \dots \dots \dots (6)$$

(A másodfokú görbék általános:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

egyenletének discriminánsa: $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, mely *ellipsist*, *parabolát* vagy *hyperbolát* indikál a szerint, a mint értéke *positív*, *zérus* vagy *negatív* [Math. repertorium 63. §.].

Ez a (6) egyenlet *parabolát* jelent, az egyenlet írható:

$$\left(y + \frac{b_1 b_2 - 2a_2 c_1}{2c_1}\right)^2 = \left(x + \frac{b_1^2 - 4a_2 c_1}{4c_1}\right) \frac{b_2^2}{c_1} \dots \dots \dots (6a)$$

Ez oly parabola csúcsponti egyenlete, melynek tengelye az X tengelyhez párhuzamos; a góczhúrra nézve áll:

$$2p = \frac{b_2^2}{c_1} \dots \dots \dots (7)$$

míg a csúcspon x_0, y_0 koordinátái:

$$x_0 = -\frac{b_1^2 - 4a_2c_1}{4c_1}, \quad y_0 = -\frac{b_1b_2 - 2a_2c_1}{2c_1}.$$

Jegyzet. Ha a (4)-ben az a_1, b_1, a_2 állandók zérus értékűek, a (6a)-ból lesz:

$$y^2 = \frac{b_2^2}{c_1} x \dots \dots \dots (6b)$$

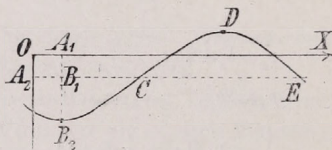
3. Sinusoid-mozgás.

Legyenek a koordináták adott egyenletei:

$$\left. \begin{aligned} x &= a_1 + b_1 t \\ y &= a_2 + b_2 \cos(\omega t) \end{aligned} \right\}; \dots \dots \dots (8)$$

miből:

$$v_x = b_1; \quad v_y = -b_2 \omega \sin(\omega t), \quad \varphi_x = 0; \quad \varphi_y = -b_2 \omega^2 \cos(\omega t)$$



55. ábra.

azaz:

$$\left. \begin{aligned} v &= \sqrt{b_1^2 + b_2^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)} \\ \varphi &= \varphi_y = -\omega^2 (y - a_2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

A mozgás componense az Y tengely mentén *periodusos* mozgás, míg az X menti összetevője egyenletes mozgás. A *sebesség periodusos* függvény; értéke b_1 és $\sqrt{b_1^2 + \omega^2 b_2^2}$ értékek között ingadozik.

A periodusos tartamát itt is T -vel jelezve, a (8)-ból:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \dots \dots \dots (10)$$

Az a_1, b_1, a_2, b_2 állandók a kezdő állapotból határozódnak meg; így:

$$\left. \begin{aligned} x_{t=0} &= a_1; & v_{t=0} &= b_1; \\ y_{t=0} &= a_2 + b_2; & \varphi_{t=0} &= -\omega^2 b_2. \end{aligned} \right.$$

A pont *pályáját* a t időnek a (8) egyenletekből való eliminációjából nyerjük:

$$y = a_2 + b_2 \cos \left[\frac{\omega}{b_1} (x - a_1) \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Ez egy ú. n. *cosinus-görbe* (vagy *sinus-görbe* is), melynek alakját az 55. ábra adja.

Itt:

$$OA_1 = a_1, \quad OA_2 = a_2; \quad A_1B_2 = A_1B_1 + B_1B_2 = a_2 + b_2, \quad CE = \pi \frac{b_1}{\omega}.$$

A pont $t=0$ időben B_2 kezdő helyzetben van.

Ha b_1 pozitív, a pont a *positiv* x -ek mentén halad tovább.

A *normális* és *tangenciális* gyorsulások az általános $\varphi_t = \frac{d^2s}{dt^2}$ és $\varphi_n = \frac{v^2}{\rho}$ kifejezésekből [46. §. (5), 49. l.] következnek; tekintve hogy itt a (9) szerint $v = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)}$, és [a Math. repertorium 55. §-ának (6) formulája szerint] $\rho = \pm \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}} : \frac{d^2y}{dx^2}$, nyerjük a (11) segítségével:

$$\rho = \pm \frac{v^3}{b_1 b_2 \omega^2 \cos(\omega t)}.$$

Ezek alapján az 55. ábra tekintetbe vételével:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_t &= + \left\{ b_2 \omega^2 \cos(\omega t) \right\} \frac{b_2 \omega \sin(\omega t)}{v} \\ \varphi_n &= - \left\{ b_2 \omega^2 \cos(\omega t) \right\} \cdot \frac{b_1}{v} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Ellenőrzés gyanánt nyerjük mint a (9)-ben:

$$\varphi = (\varphi_t^2 + \varphi_n^2)^{\frac{1}{2}} = -b_2 \omega^2 \cos(\omega t)$$

A φ_t zérus az B_2 , C , D , $E \dots$ pontokban; ellenben a φ_n zérus a C , E helyeken s i. t.

Jegyzet. A mozgás differenciálegyenletei itt: $x''=0$; $y'=-\omega^2(y-a_2)$.

Integrációjuk azonnal történhetik, a menynyiben az első egy egyenletes mozgást ad, a második pedig $y=y_1+a_2$ helyettesítés által az $y_1''+\omega^2 y_1=0$ egyenletre redukálódik, melynek megoldása egyszerű harmonikus mozgás [92., 93. §§.]

A mozgás további vizsgálatát az olvasóra bizzuk.

4. *Mozgás lánczgörbén.* Legyen a gyorsulás φ_x componense *zérus*, míg φ_y az y ordinátával egyenesen arányos; a mozgás egyenletei:

$$x' = 0, \quad y'' = +\omega^2 y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Az elsőből:

$$x = b_1, \quad x = a_1 + b_1 t;$$

a másodikból (a 95. §. eljárása szerint):

$$2y = \omega(a_2 e^{\omega t} - b_2 e^{-\omega t}) \quad 2y = a_2 e^{\omega t} + b_2 e^{-\omega t}.$$

Az integrációnak a_1 , a_2 , b_1 , b_2 állandói a kezdő állapottól függenek.

Az x és y egyenleteinek egyesítéséből a pálya egyenlete:

$$2y = a_2 e^{\frac{\omega}{b_1}(x-a_1)} + b_2 e^{-\frac{\omega}{b_1}(x-a_1)} \quad (14)$$

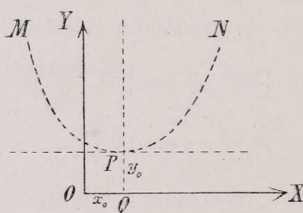
Az egyenlet *láncvonalat* képvisel; könnyen hozhatjuk e kifejezést a nevezett görbe közönséges egyenlete alakjába, ha az x -ek kezdőpontját úgy eltőljük, hogy legyen:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + x, \\ \text{és } x_0 &\text{ állandóra nézve az:} \\ a &= a_2 e^{\frac{\omega}{b_1}(x_0-a_1)} = b_2 e^{-\frac{\omega}{b_1}(x_0-a_1)} = a \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

feltételi egyenlet álljon.

Ekkor (14)-ből:

$$2y = a \left(e^{\frac{\omega}{b_1}x} + e^{-\frac{\omega}{b_1}x} \right) \quad (16)$$



56. ábra.

Ha: $a = (b_1 \cdot \omega)$, akkor az egyenlet *közönséges* láncgörbét képvisel [Math. repertorium, 65. §., 76. lap, 3. formula], oly görbét, melynek alakját az egyenletes vastagságú és anyagú fonál vagy láncz a föld nehézségének hatása alatt veszi fel, ha két vége szilárd.

Ellenkező esetben a (16) *megnyújtott* vagy a *rövidített* láncgörbét képvisel.

A láncvonal csúcspontja P (56. ábra), ennek összszerendezői $\overline{OQ} = x_0$ és $QP = a = y_0$ azaz, (15)-ből:

$$x_0 = a_1 + \frac{b_1}{2\omega} \lg \left(\frac{b_2}{a_2} \right); \quad y_0 = \sqrt{a_2 b_2} \quad (17)$$

A további kifejtést az olvasóra bízunk.

5. *Hyperbolás mozgás.* Oly esetet tárgyalunk, hol nem az összszerendezők, vagy a gyorsulások advák, hanem a mozgó pont pályája és a gyorsulás iránya.

A pálya legyen *hyperbola* és a gyorsulás mindig a Y tengelyhez párhuzamos; keressük a mozgást.

A hyperbola közönséges egyenlete [Math. repertorium 64. §., 74. lap (20)]:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad (17a)$$

továbbá, itt $\varphi_x = 0$ miből

$$r_x = \frac{dx}{dt} = \text{constans} \dots \dots \dots (18)$$

Ezen két összefüggést alkalmas módon egyesítjük, hogy a φ_y gyorsulást mint az összszerendezők függvényét nyerjük.

All:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}} \frac{dx}{dt}; \dots \dots (18a)$$

továbbá, mivel itt $\varphi_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 0$, a (18a)-ból:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \left[-\frac{bx^2}{a(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{b}{a(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = -\frac{ab}{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

és így a (17a) és (18) tekintetbe vételével ered:

$$\varphi = \varphi_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{b^4}{a^3} \cdot \frac{r_x^2}{y^3} \dots \dots \dots (19)$$

A gyorsulás e szerint az Y tengelytől való y távolság harmadik hatványával fordítva arányos és e tengely felé van fordítva.

Az x és y explicite fejezhető ki az idő által a (18) és (17a) segítségével:

$$x = a_1 + b_1 t; \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{a_1^2 - a^2 + 2a_1 b_1 t + b_1^2 t^2} \dots \dots (20)$$

A (18) és (18a)-ból:

$$v = \frac{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}}{a^2 y} \frac{dx}{dt} \dots \dots \dots (21)$$

A mozgás további értelmezését az olvasóra bizzuk.

103. §. Ellipsises mozgás. A pálya középpontja a mozgás centruma. Derékszögű és polárösszszerezők.

1. Adva legyen az x_1 és az y_1 összszerendező a következő egyenletek által:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 + b_1 \cos(\omega t), & y_1 &= a_2 + b_2 \sin(\omega t); \\ r_x &= -\omega b_1 \sin(\omega t), & r_y &= +\omega b_2 \cos(\omega t) \\ \varphi_x &= -\omega^2 b_1 \cos(\omega t), & \varphi_y &= -\omega^2 b_2 \sin(\omega t) \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

$$\text{és} \quad v = \omega [b_1^2 + (b_2^2 - b_1^2) \cos^2(\omega t)]^{\frac{1}{2}}; \quad \varphi = -\omega^2 [b_2^2 + (b_1^2 - b_2^2) \cos^2(\omega t)]^{\frac{1}{2}} \quad (1a)$$

Az összszerendezők, a sebességek és a gyorsulások itt az időnek szakaszos (periodusos) függvényei; az első (a vetületi mozgások) egyszerűen harmonikus (rezgésszerű) jellegűek; a sebesség az ωb_1 és ωb_2 , a gyorsulás az $\omega^2 b_1$ és $\omega^2 b_2$ egymáshoz tartozó határértékek között ingadozik.

Az (1) első párjából:

$$\cos(\omega t) = \frac{x_1 - a_1}{b_1}; \quad \sin(\omega t) = \frac{y_1 - a_2}{b_2},$$

ebből a pálya egyenlete:

$$\left(\frac{x_1 - a_1}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - a_2}{b_2}\right)^2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Ez oly *ellipszis* egyenlete, melynek b_1 és b_2 féltengelyei az összszerendezői X és Y tengelyekhez párhuzamosak és melynek középpontja az XY síkban a_1 és a_2 összszerendezőkkel bír.

A középpontból a pálya (x_1, y_1) pontjához húzott r vezérsugár:

$$r = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (y_1 - a_2)^2} = \sqrt{b_2^2 + (b_1^2 - b_2^2) \cos^2(\omega t)} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Ebből (1a) szerint:

$$\varphi = -\omega^2 r, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

ezenkívül, mivel (1) szerint $\varphi_x = -\omega^2(x_1 - a_1)$, $\varphi_y = -\omega^2(y_1 - b_1)$, továbbá, ha (x, r) és (y, r) az r egyenes és az összszerendezői tengelyek által képezett szögek, áll: $x_1 - a_1 = r \cos(x, r)$, $y_1 - b_1 = r \sin(x, r)$, úgy hogy:

$$\varphi_x = -\omega^2 r \cos(x, r), \quad \varphi_y = -\omega^2 r \sin(y, r) \quad . \quad . \quad . \quad (4a)$$

és így:

$$\varphi_x : \varphi_y = \cos(x, r) : \cos(y, r)$$

A φ e szerint az r vezérsugár mentén fekszik, de az r -el *ellentett* irányú, azaz: *a gyorsulás mindig a pálya geometriai középpontja felé van irányítva*; (a mozgás e szerint *centrális mozgás*, 72. §.)

Ha az XY rendszer kezdőpontját az ellipszis *középpontjába* fektetjük (a tengelyek az előbbi rendszerével párhuzamosak maradván) és írjuk

$$x_1 - a_1 = x; \quad y_1 - b_1 = y,$$

az (1)ből:

$$\varphi_x = -\omega^2 x; \quad \varphi_y = -\omega^2 y. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4b)$$

2. *Polár-összszerendezők* segítségével fejezvé ki az ellipsises pálya elemeit, származik:

$$x_1 - a_1 = x = r \cos \vartheta; \quad y_1 - b_1 = y = r \sin \vartheta \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Továbbá a (3) és (1) szerint:

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= [b_2^2 + (b_1^2 - b_2^2) \cos^2(\omega t)]; \\ \tan \vartheta &= \frac{b_2}{b_1} \tan(\omega t) \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

A két egyenlet egyesítéséből:

$$r^2 = \frac{b_1^2 b_2^2}{b_2^2 \cos^2 \vartheta + b_1^2 \sin^2 \vartheta} = b_1^2 \cos^2(\omega t) + b_2^2 \sin^2(\omega t) \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Egyszerű számítások a:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega \frac{b_2^2 \cos^2 \vartheta + b_1^2 \sin^2 \vartheta}{b_1 b_2} = \omega \frac{b_1 b_2}{b_1^2 \cos^2(\omega t) + b_2^2 \sin^2(\omega t)} = \frac{\omega b_1 b_2}{r^2} \\ \frac{dr}{dt} &= \omega \frac{1}{2} \frac{b_2^2 - b_1^2}{b_1 b_2} r \sin 2\vartheta = \omega \frac{1}{2} \frac{b_2^2 - b_1^2}{r} \sin(2\omega t) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

quotienseket, és velök a sebesség vezérsugári és a forgató componenseit [34. §. (3)] adják.

Vége a (7)-ből és a (8) első egyenletéből származó szorzat:

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = \omega b_1 b_2 = c \quad \dots \quad (9)$$

mely a tárgyalt mozgás jellemző állandója (mint minden centrális mozgásnál, 73. §.), ugyanis a felületi sebesség kétszerese.

A mozgás további vizsgálata a kezdőnek ajánlható.

104. §. *Üldöző és futó görbe. Mozgás az üldöző és futó görbén. Három eset megkülönböztetése.*

Ha valamely mozgó pont folytonosan törekszik egy másik, szintén mozgó pont felé, és ezt akként követi, hogy mozgásának sebessége mindig ezen másik pont felé van fordítva, akkor az első pont az úgynevezett *üldöző görbét* írja le.

Számos ily természetű mozgás létezik. Így például a tengeri rablók hajója mindenkor az általa üldözött hajó *felé* veszi az irányát; hasonlóan a kutya, mely ura után szalad, mindig egyenesen urának tart (innen a *kutyagörbe* elnevezés). A feladatot PIERRE BOUGUER [1698—1758] (Mémoires de l'Académie Française 1732) vizsgálta meg először, ki egyszersmind az átkelő görbe problémáját is oldotta meg (v. ö. a köv. §-ot, 165. l.).

Egészen analog és ugyanazon problémához tartozik a *futó görbe*. Ez az a pálya, melyet valamely mozgó pont leír, midőn egy másik, szintén mozgó ponttól *távolni* törekszik és mozgásának iránya mindig a két pontot egybekapcsoló egyenes folytatásában fekszik.

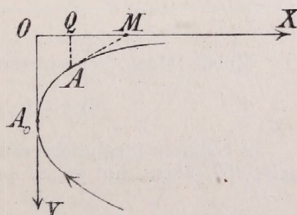
Itt ezen görbéknek csak azon osztályát tárgyaljuk, melynél a két pont sebessége *állandó* és az üldözöttnek a pályája *egyenes vonal*.

I. A mozgás általános tárgyalása.

1. A pálya differenciál-egyenletének felállítása. Jelelje u az üldöző, v az üldözött pont állandó sebességét; az üldözött pont *egyenesben* mozog.

Fektessük az összszrendezők pozitív X tengelyét az üldözött pont sebességének irányába és az Y tengelyt az üldöző görbe azon érintőjébe, mely az u sebességre merőleges (57. ábra)

Az üldözött pont \vec{OX} irányban mozog, és mivel az üldözött pont



57. ábra.

M helye az üldöző görbe megfelelő A pontjához húzott érintő folytatásában van, az A_0 és O , valamint az A és M egymáshoz tartozó pontpárok (helyzetei az üldözött és az üldöző pontnak). Az $\overline{A_0O} = a$ állandó. Az üldöző pont A_0 -tól A -ig ugyanazon idő alatt mozog, mely alatt az üldözött pont O -tól M -ig.

Rövidség kedvéért legyen:

$$v: u = \varepsilon; \quad A_0A \text{ ív} = s; \quad \dots \dots \dots (1)$$

Az ábra szerint:

$$s: v = \overrightarrow{OM}: u, \text{ vagy: } \overrightarrow{OM} = \varepsilon s.$$

Az A coordinátái $OQ = x$, $QA = y$; továbbá:

$$\varepsilon s = \overrightarrow{OM} = x + y \operatorname{tg}(MAQ) \quad \dots \dots \dots (2)$$

Mivel A pont környékén növekvő x mellett az y fogy, az $(MAQ) \neq$ hegyes szög és:

$$\operatorname{tg}(MAQ) = \cotg(AMQ) = -1: \frac{dy}{dx} = -\frac{dx}{dy},$$

és a (2)-ből:

$$\varepsilon s = x - y \frac{dx}{dy} \quad \dots \dots \dots (3)$$

2. *A pálya egyenlete.* A további számításnál előnyös az y -t független változó gyanánt tekinteni.

A (3) egyenlet integrációja czéljából kapcsoljuk ezt össze az ívelem közönséges kifejezésével, mely itt, mivel az s növekedése mellett az y fogy,

$$ds = -dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \quad \dots \dots \dots (4)$$

Differentiálva (3)-at az y szerint, és tekintetbe véve (4)-et, marad:

$$\varepsilon dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = y \frac{d^2x}{dy^2} dy.$$

Rövidség kedvéért téve:

$$\frac{dx}{dy} = \eta, \quad \frac{d^2x}{dy^2} dy = d\eta, \quad \dots \dots \dots (5)$$

származik:

$$\varepsilon \frac{dy}{y} = \frac{d\eta}{\sqrt{1 + \eta^2}} \quad \dots \dots \dots (6)$$

Ebből [Math. repertorium 104. §-ának (30a) formulája]:

$$\varepsilon \lg y = \lg(\eta + \sqrt{1 + \eta^2}) + \text{constans} \quad \dots \dots \dots (6a)$$

A constans meghatározása czéljából alkalmazzuk az egyenletet A_0 helyzetre (57. ábra), hol $y = a$, $\eta = 0$; ekkor $\varepsilon \lg a = \text{constans}$; e szerint:

$$\lg \left(\frac{y}{a}\right)^\varepsilon = \lg(\eta + \sqrt{1 + \eta^2}) \quad \dots \dots \dots (7)$$

vagy:

$$\left(\frac{y}{a}\right)^\varepsilon - \eta = \sqrt{1 + \eta^2} \quad . \quad . \quad . \quad (7a)$$

Négyzetre emelve és rendezve (7a)-t, nyerjük:

$$2\eta = 2 \frac{dx}{dy} = \left(\frac{y}{a}\right)^\varepsilon - \left(\frac{a}{y}\right)^\varepsilon; \quad . \quad . \quad . \quad (7b)$$

ebből:

$$2(x + \text{constans}) = \frac{1}{a^\varepsilon} \cdot \frac{y^{\varepsilon+1}}{\varepsilon+1} + \frac{a^\varepsilon}{(\varepsilon-1)y^{\varepsilon-1}}.$$

Mivel A_0 -ban $y=a$ és $x=0$, a constans kiküszöbölése után:

$$2\left(x + \frac{a^\varepsilon}{\varepsilon-1}\right) = \frac{y^{\varepsilon+1}}{(\varepsilon+1)a^\varepsilon} + \frac{a^\varepsilon}{(\varepsilon-1)y^{\varepsilon-1}} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Ez az egyenlet képviseli az üldöző pont pályáját; a kifejezés érvényes az $\varepsilon=(v:u)$ sebességi viszony valamenynyi értékére nézve, de az $\varepsilon=1$ eset kivétel, melyre nézve a (8) nem alkalmazható. (V. ö. ezen §. II. részének 3. pontját).

3. A két pont távolsága és a befutott ívrész hossza.

A mozgó két pontnak egymástól való távolsága $r=\overline{AM}$ (57. ábra); erre nézve áll:

$$r^2 = \overline{AM}^2 = \overline{QM}^2 + \overline{QA}^2 = \left(y \frac{dx}{dy}\right)^2 + y^2;$$

miből:

$$r = \pm y \left\{ 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Tekintettel (7b)-re, a (9)-ből:

$$r = \pm \frac{y}{2} \left\{ \left(\frac{y}{a}\right)^\varepsilon + \left(\frac{a}{y}\right)^\varepsilon \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Az előjelek közül mindig az választandó, mely az r távolságot mint pozitív mennyiséget adja; az y előjele pozitív az X tengely alatt fekvő görbe részre, negatív az X fölött lévő részre nézve (58. ábra).

Az $A_0A=s$ ív hossza is rögtön adódik. Ugyanis (4) és (7b) szerint:

$$ds = -dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = -\frac{dy}{2} \left\{ \left(\frac{y}{a}\right)^\varepsilon + \left(\frac{a}{y}\right)^\varepsilon \right\}; \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

ebből:

$$s = \text{állandó} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{y^{\varepsilon+1}}{(\varepsilon+1)a^\varepsilon} + \frac{y^{(-\varepsilon+1)}a^\varepsilon}{(-\varepsilon+1)} \right\},$$

avagy mivel $y=a$ számára $s=0$:

$$2\left(s + \frac{a}{\varepsilon^2-1}\right) = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{y^{\varepsilon+1}}{(\varepsilon+1)a^\varepsilon} + \frac{a^\varepsilon}{(\varepsilon-1)y^{\varepsilon-1}} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (11a)$$

Az idő-re nézve, mely az A_0 -tól A -ig való mozgás közben elmúlt, áll: $t-t_0 = \frac{s}{u}$, hol u állandó és s az épen a (11a)-ban talált ívhosszsz.

II. Az egyes esetek tárgyalása.

1. Első főeset. Az üldöző pont sebessége nagyobb mint az üldözötté; $u > v$, azaz $\varepsilon < 1$.

Ekkor $\varepsilon^2 - 1$ és $\varepsilon - 1$ negatív mennyiségek és a (8) írható:

$$2 \left(x - \frac{a\varepsilon}{1-\varepsilon^2} \right) = \frac{y^{1+\varepsilon}}{(1+\varepsilon)a^\varepsilon} - \frac{a^\varepsilon y^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon} \dots (8a)$$

Az üldöző pont eléri az üldözöttet, ha x valamely véges értéke mellett az y zérus (58. ábra).

Ha $y=0$ feltételt bevezetjük a (8a)-ba, a jobb oldal zérus és a baloldaltól:

$$x_{y=0} = \frac{a\varepsilon}{1-\varepsilon^2}; \dots (12)$$

ez lesz az A_0 ordinátája talppontjától számított azon távolság (58. ábra), melyben a görbe az X tengelyt érintőleg eléri. Az ezen utólérésig elmúlt idő T a (12)-ből:

$$T = \frac{1}{u} \frac{a\varepsilon}{1-\varepsilon^2}; \dots (13)$$

e szerint az A_0B ív hossza (58. ábra):

$$vT = \frac{a\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} \dots (13a)$$

A B pontban azonban a görbének csak egyik ága végződik; ennek az X tengely fölötti része, $B'A_0B_0$, a problémához tartozó futó görbe.

Az (12)-ben a B számára talált $x = \frac{a\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$ abszcissához azonban nem csak az $y=0$ érték, hanem más érték is tartozik.

Ugyanis, a (8a) bal részébe a B -re érvényes $x = [a\varepsilon : (1-\varepsilon^2)]$ feltételt vezetve be, nyerjük ez egyenlet jobb oldalából:

$$y = \pm a \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2\varepsilon}}$$

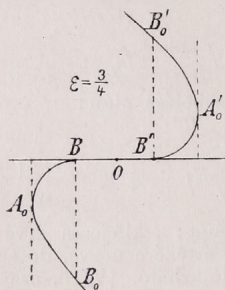
A $+$ előjelű érték vonatkozik az üldöző görbének az A_0 ponton alóli ága B_0 pontjára, a $-$ előjelű érték, a futó görbének megfelelő B'_0 pontjára (58. ábra).

De ez a két hely nem az utólérés helye.

A mozgó pontok egymástól való távolsa, ezen esetben a (10)-ből írható:

$$r = \pm \frac{1}{2} \left\{ \frac{y^{1+\varepsilon}}{a^\varepsilon} + \frac{y^{1-\varepsilon}}{a^{-\varepsilon}} \right\} \dots (10a)$$

és ez, mint fent is találtuk, $y=0$ esetben zérus lesz.



58. ábra.

2. Második főeset. Az üldöző pont sebessége kisebb mint az üldözött-é: $u < v$, azaz $\varepsilon > 1$.

Ezen esetben az üldöző pont soha sem érheti el az üldözöttet, és a görbe, mint azt az (8) egyenlet utolsó tagja mutatja, asymptotice közeledik az X tengelyhez (59. ábra). Az r távolság a (10)-ből:

$$r = \pm \frac{1}{2} \left\{ \frac{y^{\varepsilon+1}}{a^\varepsilon} + \frac{y^{-(\varepsilon-1)}}{a^{-\varepsilon}} \right\}, \quad \dots \quad (10b)$$

mely az y semmiféle értékére nézve sem lehet zérus, de lekisebb értékének feltétele:

$$\frac{dr}{dy} = 0; \quad \text{vagy:} \quad \frac{1}{2} \left\{ \frac{\varepsilon+1}{a^\varepsilon} y^\varepsilon - \frac{\varepsilon-1}{a^{-\varepsilon}} y^{-\varepsilon} \right\} = 0;$$

ebből:

$$y_{\min}^\varepsilon = a^\varepsilon \sqrt{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}}.$$

Helyetteszve ezt (10b)-be, nyerjük:

$$r_{\min} = \frac{a\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \cdot \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \right)^{\frac{1}{2\varepsilon}} \quad \dots \quad (10bb)$$

mint a legkisebb távolság, melyet a mozgás közben a két pont helyzete megenged.

3. A kivételes eset: Az üldöző és az üldözött pont sebességei egyenlők; $\varepsilon = 1$.

Kiindulunk a (7b) egyenletből, mely $\varepsilon=1$ esetre:

$$2dr = dy \left(\frac{y}{a} - \frac{a}{y} \right), \quad \text{vagy:} \quad 2(x + \text{constans}) = \frac{y^2}{2a} - a \lg y;$$

ebből, mivel A_0 -ban $x=0$ és $y=a$,

$$\left(x + \frac{a}{4} \right) = \frac{y^2}{4a} - \frac{a}{2} \lg \frac{y}{a} = \frac{y^2}{4a} + \frac{a}{2} \lg \frac{a}{y} \quad \dots \quad (14)$$

Ezen kivételes esetben a pálya nem algebrai, hanem *transcendens* görbe.

Fogyó y mellett az x növekszik, végre, ha $y=0$, akkor $x=\infty$; a görbe asymptotice közeledik az X tengelyhez (60. ábra).

A két pont távolsága a (10) egyenlet szerint, az üldöző görbénél:

$$r = \frac{y^2}{2a} + \frac{a}{2} \quad \dots \quad (10c)$$

Az r a kezdő helyzetben, $y=a$ -nál (57. ábra): $r=a$; ettől fogva ez folytonosan fogy és ha $y=0$, akkor $r=\frac{1}{2}a$; ebben az egymástól való állandó távolban mozognak a pontok az O -tól végtelen távolban az X tengelyen.

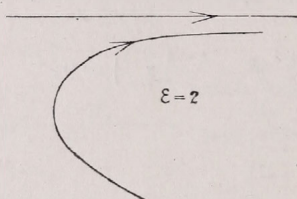
Az s íre nézve tegyük a (11)-be $\varepsilon=1$ -et, ez adja

$$2(s + \text{állandó}) = -\frac{y^2}{2a} - a \lg y,$$

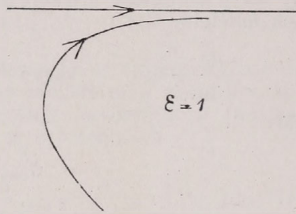
avagy, mivel $y=a$ -kor $s=0$,

$$\left(s - \frac{a}{4}\right) = -\frac{y^2}{4a} + \frac{a}{2} \lg \frac{a}{y} \dots \dots \dots (11c)$$

Valamennyi esetben a megfelelő *futó görbék* az üldöző görbéknek *tükörképei* az egyenes vonalú pályára nézve, de az egyenesre mérőleges tengely körül 180 foknyira vannak elforgatva (v. ö. az 58. ábrát).



59. ábra.



60. ábra.

Jegyzet. Azok az üldöző és futó görbék, melyek keletkeznek, ha az előírt pályán mozgó pont sebessége nem állandó vagy midőn pályája nem egyenes vonalú, vagy, ha mind a két feltétel egyidejűleg áll fenn, tetemesen bonyolultabbak az itt tárgyaltaknál; de vizsgálatuk az olvasónak hasznos és tanulságos gyakorlat igen ajánlható.

105. §. *Átkelő görbe.* Hajó átkelése egyenletes folyó egyik partjáról a másikra.

1. Az átkelő görbe egyszerű esete.

A pont sebessége állandó értékű két u és v sebesség eredője legyen.

Az egyik sebesség u mindenkor azon állandó fekvésű hely felé legyen fordítva, melyet a mozgó pont elérni törekszik, a másik sebességnek, v -nek iránya állandó.

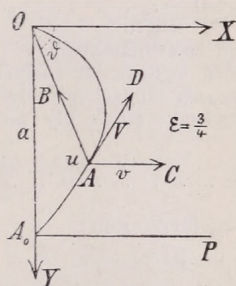
A probléma ily fogalmazásában valamely hajó folyón való átkelésének legegyszerűbb esete. Ugyanis (61. ábra) legyen OX és A_0P a folyó két párhuzamos partja; A_0 a hajó kiinduló pontja, O a tulsó partnak az A_0 -al szemközt fekvő pontja, mely felé a hajó törekszik; u a hajónak a folyóvízhez viszonyított sebessége, melylyel a hajó, pályája minden pontjában, O felé törekszik, v a folyóvíz sebessége, a mely a partokhoz párhuzamos irányú és a melylyel a víz a hajót magával sodorja.

A tetszőleges, A helyzetben a mozgó pontnak (hajónak) $\vec{AD}=V$ sebessége összetevődik az O felé fordított $\vec{AB}=u$ és az X -hez párhuzamos $\vec{AC}=v$ sebességekből; a V eredő sebesség a pálya \vec{AD} érintőjében fekszik.

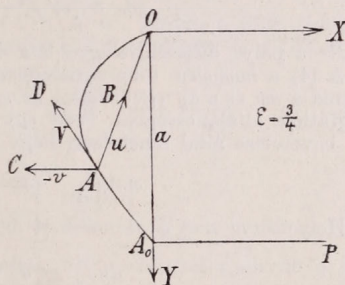
2. Az átkelő görbe, származtatva az üldöző görbéből.

Tulajdonítsunk a 104. §-ban és az 57. ábrában felvett A és M pontok mindegyikének az ott felvett sebességekhez még az X tengely mentén, $-v$ sebességet: ez által ezek *relatív mozgása nem változik* (81. §.), ellenben az *üldözött* pont sebessége $v-v=0$ lesz, az *üldöző* pedig *összetevődik* az $\vec{AB}=u$, és az $\vec{AC}=-v$ sebességből (62. ábra).

Ha egyszerűség kedvéért az egymáshoz tartozó A_0 és O helyzeteket (57. és 62. ábrák) kezdő helyzetnek tekintjük, akkor az O -ban lévő s előbb üldözött pont *ott nyugalomban* lesz, és az A pontnak az O -hoz relatív mozgásának pályája A_0AO görbe (62. ábra), melynek lényeges tulajdonsága az, hogy a pálya érintője \vec{AD} a nevezett u és v sebességek V eredője mentén fekszik.



61. ábra.



62. ábra.

E szerint ezen pálya lényeges tulajdonságai megegyeznek a hajó átkelésének problémájával; az egyetlen különbség abban áll, hogy az elsőben $+v$, a másodikban $-v$ sebesség járul hozzá az u sebességhez. Ez a körülmény csak a pálya *fekvését* befolyásolja; mert az átkelés problémájának fent adott formulázásánál a pálya a *pozitív X-ek* oldalán fekszik, ellenben az *üldöző* mozgásnak relatív mozgássá változtatásánál a pálya a *negatív X-ek* oldalán fekszik.

Ha a folyóvíz $-v$ sebességű volna, a 62. ábra volna az átkelő görbe.

E problémát szintén BOUGUER (Mémoires de l'Académie Française, 1731) vizsgálta meg, ki az üldöző görbe problémájának megfigyeltése alkalmával (v. ö. a megelőző §. bekezdését) a két probléma összefüggését is ismerte fel.

I. A pálya egyenletének meghatározása céljából felhasználjuk azt a tulajdonságát, hogy érintője az u és v eredője mentén fekszik.

Legyenek (61. ábra) x és y az A pont *derékszögű*-, ellenben $\vec{OA}=r$ és $(XOA) = \vartheta$ annak *polarösszrendezői*, hol $\cos \vartheta = (x : r)$; $\sin \vartheta = (y : r)$.

1. *A pálya derékszögű koordinátáiban.*

Jeleljék V_x és V_y az O pont sebességi összetevőit, ezek az ábra szerint:

$$V_x = v - u \cos \vartheta; \quad V_y = -u \sin \vartheta \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Az A -ban a pályához húzott érintő tangense $= (dy : dx)$; ez, a probléma értelmében a $(V_x : V_y)$ viszonynyal egyenlő, azaz:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u \sin \vartheta}{v - u \cos \vartheta} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Rövidség kedvéért, mint a megelőző §-ban, írjuk

$$v : u = \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

és derékszögű koordinátákat vezetve be, a (2)-ből:

$$y dx + [\varepsilon \sqrt{x^2 + y^2} - x] dy = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Ez a pálya differenciálegyenlete derékszögű koordinátákban.

A (4) a *homogén* differenciálegyenletek közé tartozik (a melyeknél ugyanis a dx és a dy együtthatói az x és y *homogén* függvényei); ilyenek integrációja általánosságban véve egy új változónak, z -nek oly módon való bevezetése által lehetséges, hogy álljon:

$$x = yz, \quad dx = z dy + y dz \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Helyettesítve x -et és dx -et, a (4)-ből némi rövidítés után:

$$\frac{dy}{y} + \frac{dz}{\varepsilon \sqrt{1+z^2}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Ebből, ha C az integráció állandója, a megelőző §. (6) mintájával:

$$\varepsilon \lg y + \lg(z + \sqrt{1+z^2}) = C,$$

vagy, mivel $z = (x : y)$,

$$\lg(y^{\varepsilon-1}) + \lg(x + \sqrt{x^2 + y^2}) = C \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Mivel (61. ábra) A_0 -ban $y = a$, $x = 0$, a (7)-ből: $C = \lg a^\varepsilon$, és így:

$$\lg\left(\frac{y^{\varepsilon-1}}{a^\varepsilon}\right) + \lg(x + \sqrt{x^2 + y^2}) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Ebből csekély számítások után:

$$x = \frac{1}{2} y \left\{ \left(\frac{a}{y}\right)^\varepsilon - \left(\frac{a}{y}\right)^{-\varepsilon} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Ez a pálya egyenlete derékszögű koordinátákban; ez érvényes az ε minden értékére nézve.

2. *Az r távolság értéke.*

Az $\vec{OA} = r$ távolságra nézve áll: $r^2 = x^2 + y^2$, vagy (9)-ből, némi összevonás után:

$$r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{2} y \left\{ \left(\frac{a}{y} \right)^{\varepsilon} + \left(\frac{a}{y} \right)^{-\varepsilon} \right\}, \quad \dots \quad (10)$$

ez pedig ugyanaz az érték, a melyet a futó és üldöző pont egymástól való távolságára nézve a 104. §. (10) formulájában találtunk, ezért az ott az r -re nézve talált eredmények itt is érvényesek.

3. A pálya egyenlete polárkoordinátákban.

A pálya egyenletét polárkoordinátákban is fejezhetni ki, $x = r \cos \vartheta$ -át és $y = r \sin \vartheta$ -át írva (9)-be; ez által lesz:

$$2r \cos \vartheta = a^{\varepsilon} r^{1-\varepsilon} \sin^{1-\varepsilon} \vartheta - a^{-\varepsilon} r^{1+\varepsilon} \sin^{1+\varepsilon} \vartheta.$$

Az egyenletből $\left(\frac{a}{r \sin \vartheta} \right)$ viszonyt képezve:

$$\left(\frac{a}{r \sin \vartheta} \right)^{\varepsilon} = \cotg \vartheta \pm \sqrt{1 + \cotg^2 \vartheta}.$$

Mivel a baloldali rész *positiv* (v. ö. a 61. ábrát), a jobb oldalon a második tag is csak *positiv* lehet; ezért a kettős előjelei közül itt csak a *felső* maradhat meg és így:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{r \sin \vartheta}{a} \right)^{\varepsilon} &= \frac{\sin \vartheta}{1 + \cos \vartheta} \\ \left(\frac{r \sin \vartheta}{a} \right)^{\varepsilon} &= \frac{1 - \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

A 63. ábra tünteti elő azt az esetet, hol $v = 2u$, hol e szerint a víz a hajót elragadja és az átkelés lehetetlen.

4. Kivételes eset.

A pálya egyenlete, a (9) vagy a (11), az ε bármily értéke mellett is, *algebrai*; de ez egyenlet a *kivételes* esetben hol $\varepsilon = 1$, lényegesen egyszerűsödik; akkor (11)-ből:

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{a}{1 + \cos \vartheta} \\ y^2 &= -2a \left(x - \frac{1}{2}a \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

ellenben (9)-ből:

Az $\varepsilon = 1$ esetben a (12) szerint [Math. repertorium 64. §. (14)] pálya *parabola*; ennek gyújtópja az elérendő O pontban van, gőczhúrja $2a$ hosszúságú és csúspontjától számított tengelye a *negatív* X -ek mentén fekszik (64. ábra).

Ezen esetben a hajó (végtelen idő múlva, v. ö. a köv. II. rész 3. pontját) eléri a túlsó partot, de nem a kívánt O pontban, hanem, a folyam árama folytán az O -tól $\frac{1}{2}a$ távolban lévő O_1 pontban.

II. Az átkelés ideje.

1. Az idő és a koordináták összefüggése.

Legyen t a tetszőleges $A_0 A$ ív (61. ábra) befutására szükséges idő. Ennek számítása céljából az (1) második egyenletéből indulhatunk ki és y -t tekinthetjük független változónak; mivel $V_y = \frac{dy}{dt}$ és $\sin \vartheta = \frac{y}{r}$, az (1)-ből:

$$\frac{dy}{dt} = -u \frac{y}{r}, \quad \text{vagy} \quad \frac{r}{y} dy = -u dt;$$

miből (10) segítségével:

$$(a^\varepsilon y^{-\varepsilon} + a^{-\varepsilon} y^\varepsilon) dy = -2u dt, \quad \dots \quad (13)$$

azaz:

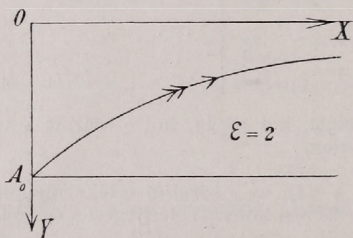
$$\frac{a^\varepsilon y^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon} + \frac{a^{-\varepsilon} y^{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon} = -2ut + \text{constans}.$$

A t számításának kezdőpontja az a pillanat, melyben a hajó A_0 -ból indul ki; ámde A_0 -ra nézve $y=a$ és $t=0$; miáltal a constans $=2a:(1-\varepsilon^2)$, és így nyerjük:

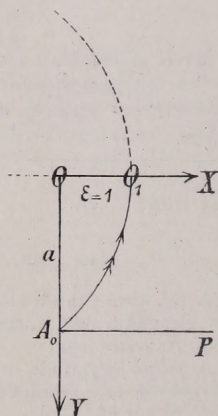
$$t = \frac{a}{u} \cdot \frac{1}{1-\varepsilon^2} - \frac{y}{2u} \left(\frac{a^\varepsilon y^{-\varepsilon}}{1-\varepsilon} + \frac{a^{-\varepsilon} y^\varepsilon}{1+\varepsilon} \right), \quad \dots \quad (14a)$$

a tetszőleges A_0A ív (61. ábra) befutására szükségese időt, mint y függvényét.

A kifejezés érvényes az $\varepsilon \leq 1$ esetekre; $\varepsilon < 1$ alkalmával ezen (14a) alak alkalmazható, ellenben $\varepsilon > 1$ esetekre a kifejezést írjuk:



63. ábra.



64. ábra.

$$t = \frac{y}{2u} \left(\frac{a^\varepsilon y^{-\varepsilon}}{\varepsilon-1} - \frac{a^{-\varepsilon} y^\varepsilon}{\varepsilon+1} \right) - \frac{a}{u} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2-1} \quad \dots \quad (14b)$$

2. Átkelés csak az $\varepsilon < 1$ esetekben lehetséges [mint ezt a (9) egyenlet mutatja], mert ekkor egyszerre állhat $x=0$, $y=0$.

Jelelje T az A_0A_0 egész pálya befutására szükséges időt (61. ábra); akkor $y=0$ és $t=T$ egymáshoz tartozók. A (14a)-ból ezen esetben lesz:

$$T = \frac{a}{u} \cdot \frac{1}{1-\varepsilon^2} \quad \dots \quad (15)$$

Ha T_0 az átkelés ideje nyugró víz esetében, ez volna:

$$T_0 = \frac{a}{u}.$$

Viszonyuk:

$$T = T_0 \cdot \frac{1}{1-\varepsilon^2} \quad \dots \quad (16)$$

3. *Kivétel eset.* Ha $\varepsilon = 1$, a t számára nyert (14a) kifejezés nem használható, mert két tagja végtelen nagy lesz. Ekkor a (13) egyenletből kell kiindulni, benne $\varepsilon=1$ -et írva, nyerjük:

$$a \frac{dy}{y} + \frac{y dy}{a} = -2u dt.$$

Ebből, mivel az A_0 kezdő pont számára $y=a$, $t=0$:

$$t = \frac{a}{2u} \lg \left(\frac{a}{y} \right) + \frac{a^2 - y^2}{4au}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Az átkelés az $y=0$ -nak felelne meg; de akkor $t=\infty$, és így a hajó folyton közeledik a másik partnak O_1 pontjához (64. ábra), de sohasem képes azt elérni. Tényleges átkelés itt nincs.

106. §. *Egymásra merőleges, egyenlő vagy különböző periodusú két egyszerű harmonikus mozgás összetevése.* LISSAJOUS görbái.

1. A mozgás egymásra merőleges két gyorsulás befolyása alatt megyen végbe, melyek kifejezései:

$$x'' = -\omega_1^2 x; \quad y' = -\omega_2^2 y; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

e szerint a gyorsulás összetevői a megfelelő összszrendezőkkel egyenesen arányosak és a koordináták kezdőpontja felé vannak fordítva, de az arányosság tényezői különbözők.

A 92. §. (1) (5a) formulái alapján az (1)-ből nyerjük:

$$\left. \begin{aligned} x &= a_1 \cos(\omega_1 t + 2\pi\delta_1) \\ y &= a_2 \cos(\omega_2 t + 2\pi\delta_2) \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

E szerint a mozgás olyan, hogy derékszögű vetületei egyszerű harmonikus mozgások, de ezek periodusai, $T_1 = (2\pi : \omega_1)$ és $T_2 = (2\pi : \omega_2)$ melyek általánosságban különbözők.

2. Toljuk el az időszámítás kezdetét úgy, hogy:

$$\omega_1 t + 2\pi\delta_1 = \omega_1 t, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

legyen, melynek tekintetbe vételével:

$$\omega_2 t + 2\pi\delta_2 = \omega_2 t + 2\pi\left(\delta_2 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\delta_1\right) = \omega_2 t + \varepsilon, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

hol ε állandó. A (3) és (4) alapján (2)-ből:

$$\left. \begin{aligned} x &= a_1 \cos(\omega_1 t) \\ y &= a_2 \cos(\omega_2 t + \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2a)$$

A pálya számítása céljából a t , idő a (2a) egyenletekből kiküszöbölendő; de ez általánosságban vége nagy nehézséggel jár. A szár-

mazó görbék LISSAJOUS-féle görbéknek neveztetnek és az akustikában és a fényelméletben nagy fontosságúak.

A következőkben a legegyszerűbb eseteket említjük fel.

I. Ha a két periodus egymással egyenlő, akkor $\omega_2 = \omega_1 = \omega$ és a (2a)-ból nyerjük, elhagyva a t jelzőjét:

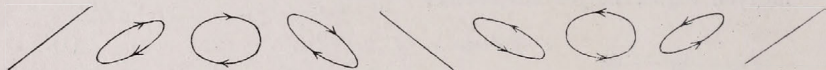
$$\left. \begin{aligned} x &= a_1 \cos(\omega t); \\ y &= a_2 \cos(\omega t + \varepsilon); \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

miből a $\cos(\omega t)$ -t és $\sin(\omega t)$ -t az x -el kifejezve és y -ba helyettesítve:

$$y = a_2 (\cos \varepsilon) \frac{x}{a_1} - a_2 (\sin \varepsilon) \sqrt{1 - \frac{x^2}{a_1^2}},$$

vagy rendezve:

$$\frac{x^2}{a_1^2} - 2 \frac{xy}{a_1 a_2} \cos \varepsilon + \frac{y^2}{a_2^2} = \sin^2 \varepsilon \dots \dots \dots (5a)$$



65. ábra.

Ez oly *ellipszis* egyenlete, melynek középpontja az összkrendezők kezdőpontjával esik egybe. A 65. ábra ily ellipsziseket tüntet elő, melyeknél az ε rendre a következő értékű: 0, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, π , $\frac{5}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{7}{2}\pi$, 2π .

Ha $\varepsilon = 0$ vagy π a π -nek páros vagy páratlan számú sokszorosával, akkor (5a)-ból:

$$\frac{x}{a_1} \mp \frac{y}{a_2} = 0, \dots \dots \dots (5b)$$

mely az összkrendezők kezdőpontján átmenő egyenes egyenlete (v. ö. a 65. ábra 1, 5 és 9 vonalát).

Ellenben, ha ε az $\frac{1}{2}\pi$ -nek páratlan számú sokszorosa, akkor az (5a) egyenlet lesz:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1; \dots \dots \dots (5c)$$

oly ellipszis, melynek tengelyei az összkrendezők tengelyeibe esnek (v. ö. a 63. ábra 3. és 7. görbéjét).

Ha $a_1 = a_2$, ez a pálya *körre* fajul.

Jegyzet. Ezen I. pontban tárgyalt mozgás megegyezik a 103. §-ban (de ott más szempontból) megvizsgált mozgással.

Ia. Ha a két összkreteeendő harmonikus mozgás periodusa csak igen közelítőleg, de nem szigorúan egyenlő, akkor rövid időre nagy közelítéssel az ábra valamely görbéje érvényesnek tekinthető, de ez alakját lassan és folytonosan a szomszédos görbe alakjává változtatja és így a pálya egymásután felveszi a felrajzolt görbék alakjait. A mozgás az alakoknak egész sorozatát azon T időköz alatt írja le, mely közben az egyik harmonikus mozgás egygyel több vagy kevesebb egész periodust vé-

gez, mint a másik, azaz melyre nézve áll $T = rT_1 = (r \mp 1)T_2$ avagy: $T = r \frac{2\pi}{\omega_1} = (r \mp 1) \frac{2\pi}{\omega_2}$, hol a felső vagy az alsó előjel érvényes a szerint, a mint az első mozgás periodusa valamivel kisebb vagy nagyobb a másodikénál.

Ilyenmő mozgás könnyen létesíthető, ha egy kör- vagy körgyűrű- vagy négyzet- (esetleg négyzetgyűrű-) keresztmetszetű rúd vagy pálcza (mely legjobban erős fémből készült) egyik végét szilárdan megfogjuk vagy megerősítjük, míg a másik, szabad végét puha kalapács ütésével vagy más alkalmas módon egyensúlyi helyzetéből kimozdítjuk és azután magára hagyjuk. A szabad vég csiszolt gömbalakú lévén, ennek mozgása alkalmas világítás mellett igen észrevehetően tünteti elő a tárgyalt görbékét. Ha a keresztmetszet szigorúan kör vagy négyzet volna, az alakok csak egyike lépne fel; de a keresztmetszetben fellépő kis egyenetlenség vagy a pálcza anyagának kis heterogeneitása elegendő arra, hogy az ω állandót egymásra merőleges két irány szerint kissé különbözőkké tegye és az alakok felrajzolt sorozatát létesítse. Az alakok méretei a levegő ellenállása és a súrlódás folytán mindig kisebbek lesznek.

Másnemű módjaival ezen görbék létesítésének a mechanika és az akusztika rendelkezik (v. ö. az ezen §. végén lévő *Jegyzet*).

II. Ha az egyik periodus a másiknak kétszerese, akkor $\omega_2 = 2\omega_1 = 2\omega$; a (2a)-ból elhagyva a t jelzőjét, leszen:

$$\left. \begin{aligned} x &= a_1 \cos(\omega t) \\ y &= a_2 \cos(2\omega t + \varepsilon) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Mivel:

$$\cos(2\omega t) = 2 \cos^2(\omega t) - 1; \quad \sin(2\omega t) = 2 \cos(\omega t) \sqrt{1 - \cos^2(\omega t)},$$

nyerjük a (6)-ból:

$$y = a_2 \left(\cos^2 \varepsilon \left(\frac{2x^2}{a_1^2} - 1 \right) - 2a_2 \sin \varepsilon \frac{x}{a_1} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a_1^2}} \right),$$

vagy:

$$4a_2^2 \frac{x^2}{a_1^2} \left(1 - \frac{x^2}{a_1^2} \right) \sin^2 \varepsilon = y^2 - 2a_2 y \left(\frac{2x^2}{a_1^2} - 1 \right) \cos \varepsilon + a_2^2 \left(\frac{2x^2}{a_1^2} - 1 \right)^2 \cos^2 \varepsilon, \quad (6a)$$

mely egyenlet általánosságban *negyedrendű* görbét képvisel.

A 66. ábra előtünteti a (6a) egyenlet által képviselt görbék azon eseteit, melyek rendre megfelelnek az $\varepsilon = 0, \frac{1}{8}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{8}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{8}\pi, \frac{3}{4}\pi, \pi, \frac{9}{8}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{11}{8}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{13}{8}\pi, \frac{7}{4}\pi, \frac{15}{8}\pi, 2\pi$ értékeknek.

Ha $\varepsilon = 0$ vagy a π -nek egész számú sokszorososa, akkor a (6a)-ból:

$$y = \pm \left(2 \frac{a_2}{a_1^2} x^2 - a_2 \right); \dots \dots \dots (6b)$$

ez egy *parabola* egyenlete, melyet a 66. ábra 1-ső, 9-ik és 17-ik görbéje tüntet elő.

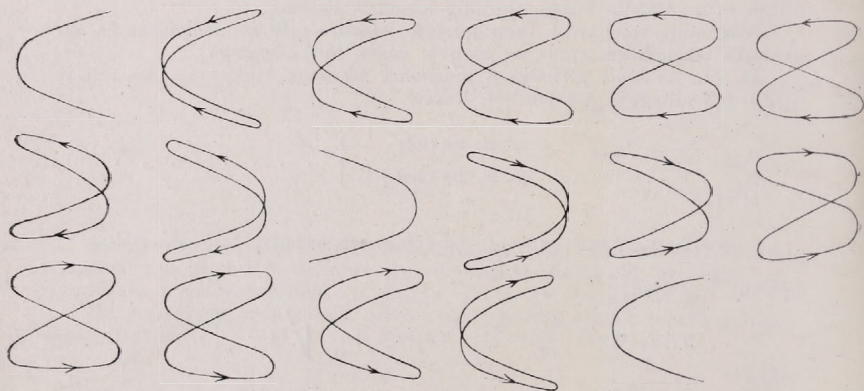
Ha $\varepsilon = \frac{1}{2}\pi$, a (6)-ból marad:

$$a_1^2 y^2 = 4a_2^2 x^2 (a_1^2 - x^2) \dots \dots \dots (6c)$$

mely egyenletnek az ábra 5. és 13. görbéje felel meg.

II a. Ha az ω_2 nem szigorúan, hanem csak közelítőleg egyenlő $2\omega_1$ -el, akkor a származó görbe rövid időre igen közelítőleg a fent rajzolt görbék egyikének tekinthető, de alakja lassan és folytatódólagosan átmenyen a felrajzolt alakok egyikéből a következőbe és a mozgás leírja az egész alak-cyclust oly T időközben, melyre nézve áll $T = \nu T_1 = (2\nu \mp 1) T_2$, vagy: $T = \nu \frac{2\pi}{\omega_1} = (2\nu \mp 1) \frac{2\pi}{\omega_2}$, hol a felső vagy az alsó előjel érvényes, a szerint, a mint az első harmonikus mozgás periodusának fele valamivel kisebb vagy valamivel nagyobb a második mozgás periodusánál.

Ily mozgást fém-pálcza által létesíthetni, melynek keresztmetszete oly derékszögű egyenközény, hogy oldalainak viszonya $\sqrt{2}:1$; itt is egy kis egyenetlenség a pálcza anyagában vagy a keresztmetszet méreteinek csekély eltérése ezen viszonytól azt eredményezi, hogy a pálcza vége nem egyikét a felrajzolt alakoknak írja le, hanem ezek egész sorozatán végig megy.



66. ábra.

III. Midőn a két periodus viszonya más, mint az I. és II. pontokban, a fellépő görbék bonyolódottabbak lesznek; de ezek közelebbi megvizsgálása inkább a hangtan és a fényelmélet megfelelő fejezeteibe tartozik, hol a görbék mesterséges előtűntetésének módosatait is ki fogjuk fejteni.

A kezdőnek ajánlandó, hogy az $\omega_2 = 3\omega_1$, $\omega_2 = 4\omega_1$ s i. t. esetek egyenleteit képezze, és a megfelelő pályák egyenleteit is, melyeket mindig felírhatni, mivel $\cos(\omega t)$ és $\sin(\omega t)$ hatványai által a $\cos(n\omega_1 t)$ és $\sin(n\omega_1 t)$ mindig kifejezhetők [Math. repertorium 5. §-ának (5) és (6) formulái] és így az idő a $(2a)$ egyenletek ezen eseteiben kiküszöbölhető.

Az általános tárgyalás speciális esetei, hol ε a π -nek vagy pedig a $\frac{1}{2}\pi$ egész számú sokszorosai, külön taglalandók.

Jegyzet. Ilyenmő görbék részletes tárgyalására és graphikai előtűntetésére nézve v. ö.:

F. Melde, Die Lehre von den Schwingungscurven, 11 rajztáblával, Leipzig 1864. és Dr Jedlik Anyos: Két egymásra merőleges irányú vagy egymásközt párhuzamos rezgési mozgásnak egy harmadik haladó mozgással való összetételéből eredett utak szabatos leírási módja. (A magyar

orvosok és természettudósok 1874. évi Győrött tartott nagygyűlésének évkönyve) és: Két vagy három rezgésszerű és egy haladó mozgás összetételéből eredő mozgás útjának leírására szolgáló készülék és annak használati módja (A m. orv. és tertt. 1876. évi Máramaros-Szigethi nagygyűlésnek évkönyve).

107. §. ROBERVAL módszere a görbék érintőinek a sebesség componenseiből való szerkesztésére.

A mozgásnak, illetve a sebességnek két vagy több alkalmasan választott összetevőre való szétbontását ROBERVAL (1602—1675) igen elmés módon felhasználta a mozgás pályájához húzott érintők szerkesztésére.

Ugyanis, ha a görbe egyenlete, e szerint alakja és parameterei advák, akkor egyszersmind a sebesség összetevői (vagy legalább egymáshoz való viszonyaik) is ismeretesek és ezekből az eredő sebesség (vagy legalább ennek iránya) szerkeszthető, melynek iránya mindenkor a pálya érintőjébe esik.

ROBERVAL maga tizenhárom görbére alkalmazta eljárását.

Néhány egyszerű példa ezen módszer illusztrációjára fog szolgálni.

1. A pont pályája *ellipszis* (*parabola* vagy *hyperbola*).

Az első görbe jellemző egyenlete (67. ábra)

$$\overline{F_1A} + \overline{F_2A} = r_1 + r_2 = \text{constans},$$

vagy:

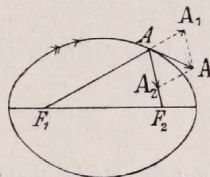
$$\frac{dr_1}{dt} = - \frac{dr_2}{dt} \quad \dots \quad (1)$$

E szerint a sebesség két összetevője a két vezérsugár mentén egyenlő értékű, de az egyik a növekedő r_1 , a másik a fogyó r_2 mentén fekszik; legyen $\overline{AA_1}$ és $\overline{AA_2}$ a nevezett egyenlő két sebességi componens (67. ábra)

Mivel ezek az összetevők az ismeretlen \overline{AA} eredő sebesség componensei az $\overline{AA_1}$, illetve az $\overline{AA_2}$ irány mentén, húzzunk az A_1 és az A_2 pontokból párhuzamosakat az r_1 és az r_2 irányaihoz, melyek, $\overline{AA_1}$ és $\overline{AA_2}$ egyenlők lévén, egymást A pontban metszik. Az így talált \overline{AA} a keresett eredő sebesség, melynek iránya egyszersmind a görbéhez húzott érintőnek is az iránya.

Ez az érintő, mint a szerkesztés adja, az r_1 folytatása- (positív iránya) és az r_2 által bezárt szöget felezi, a mi egyébként a geometria elemeiből ismeretes.

A szerkesztés még az ellipszis határesetére, a *parabolára* nézve is érvényes; ott az egyik gyújtópont, például F_1 végtelen távolságban van, és így az r_1 az F_1F_2 tengelyhez párhuzamos; e szerint itt az érintő felezi a parabola vezérsugara és tengelye által képezett szöget.



67. ábra.

3. A *közös cyclois* keletkezik, ha valamely kör egyenesen gördül; kerületének minden pontja ez alatt cycloist ír le (69. ábra [melynek érintői A_0 - és B_0 -ban merőlegesek A_0B_0 -ra] és Math. repertorium, 77. l. (16) formulák).

Ennélfogva az ábrának megfelelő időpillanatban az A pont mozgása nem egyéb, mint a körnek elemi (végtelen kicsiny) gördülése az O érintkező pont körül, azaz, az A pont az \overline{OA} húrra merőleges irányban halad, és így a cycloishoz az A pontban húzott \overline{AA} érintő merőleges \overline{OA} -ra.

ROBERVAL eljárását alkalmazva, bontsuk szét ezen, az \overline{AA} mentén fekvő sebességet az A_0B_0 -hoz párhuzamos $\overline{AA_1}$ és a körhöz az A pontban húzott érintő mentén fekvő $\overline{AA_2}$ összetevőkre. Ámde áll:

$$(\mathbf{A_2AC}) \angle = \frac{1}{2}\pi: \quad (\mathbf{AAO}) \angle = \frac{1}{2}\pi;$$

levonva a közös $(\mathbf{AA_1A_1}) \angle$ és $(\mathbf{A_1AC}) \angle$ szögeket, áll:

$$(\mathbf{A_2AA}) \angle = (\mathbf{CAO}) \angle. \quad \dots \quad (11)$$

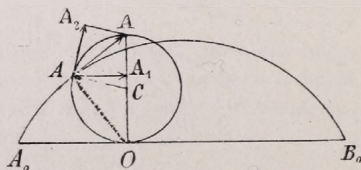
Ámde mivel az $\triangle ACO$ egyenszerű háromszögben a C melletti külső szög egyenlő az A és O melletti (egyenlő) belső szögek összegével és épen így az $\triangle ACA$ egyenszerű háromszögben a C melletti külső szög egyenlő az A és A melletti (egyenlő) belső szögek összegével:

$$(\mathbf{CAO}) \angle = \frac{1}{2}(\mathbf{ACA}) \angle = \frac{1}{2}[\pi - (\mathbf{ACO}) \angle] = \frac{1}{2}[\pi - 2(\mathbf{AA_1A_1}) \angle] = \frac{1}{2}\pi - (\mathbf{AA_1A_1}) \angle;$$

ebből és a (11)-ből:

$$(\mathbf{CAO}) \angle = (\mathbf{AA_1A_1}) \angle \text{ és } (\mathbf{A_2AA}) \angle = (\mathbf{A_1AA}) \angle, \quad \dots \quad (12)$$

azaz, \overline{AA} felezi az $(\mathbf{A_1AA_2})$ szöget.



69. ábra.

Ezért áll: $\overline{AA_1}$ és $\overline{AA_2}$ egyenlő értékű két összetevő; az egyik a kör középpontjának az A_0B_0 -hez párhuzamos mozgásából (transzlációból), a másik a körnek C körüli forgásából származik; a két mozgás eredője egyenértékű a tényleges mozgással.

4. *Conchoist* oly egyenesnek pontjai írnak le, melynek iránya mindig átmegy a sík egy szilárd O pontján, míg ezen egyenesnek másik, B pontja mindig kénytelen egy BN egyenesben maradni (70. ábra és Math. repertorium 65. §., 75. l. 9. formulák).

Ha A az \overline{OA} egyenes egy pontja, akkor az \overline{AB} távolság a mozgás közben változatlan és az A pont leírja az $AMM_1M_2 \dots$ görbét, a conchoist.

Az OM vonal jobb oldalán fekvő része a rajznak ezen görbe geo-

metriai szerkesztését tünteti elő; ugyanis az $NN' \dots N'''$ az ON sugárral, az $MM' \dots M'''$ az OM sugárral leírt két kör és a feltétel szerint:

$$\overline{BA} = \overline{NM} = \overline{N_1M_1} = \overline{N_2M_2} = \dots,$$

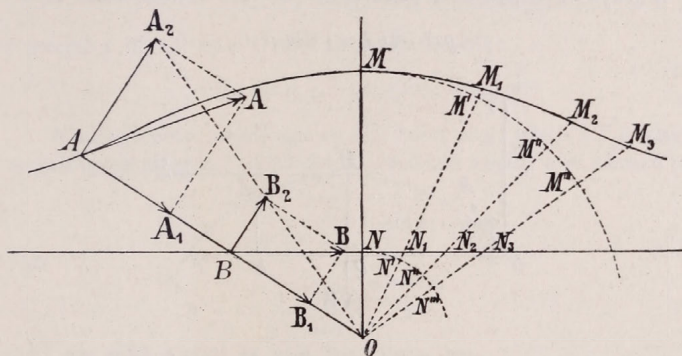
miből a görbe alakja önként következik.

Tekintsünk most a pálya leírása közben végezett egy elemi elmozdulást: ezt vezérsugári és forgató componensre bontjuk.

A B pont sebessége mindig a $BNN_1 \dots$ egyenesben fekszik; legyen \overline{BB} ezen sebesség; ennek vezérsugári és forgató összetevője $\overline{BB_1}$ és $\overline{BB_2}$.

Az A pont sebességét nem ismerjük, de B -éből nyerhetjük. Ugyanis:

a) Az \overline{AB} távolság változatlan lévén: az A pont vezérsugári sebessége mindig egyenlő a B -ével, ezért a sebesség ezen componensét, az $\overline{AA_1}$ -t úgy kell az OA vezérsugárra felvinni, hogy álljon $\overline{AA_1} = \overline{BB_1}$.



70. ábra.

β) A vezérsugár elemi forgása az O körül a $\overline{BB_2}$ által van meghatározva; az A pont sebességének forgató összetevője, az $\overline{AA_2}$, oly viszonyban áll az ismeretes $\overline{BB_2}$ összetevőhöz, mint az \overline{AO} a \overline{BO} -hoz, avagy, az A_2 pont az A pontban az OA -ra emelt merőlegesnek és az OB_2 vonal meghosszabbításának metszőhelye.

Az A pont vezérsugári és forgási sebessége ekként ismeretes lévén, eredő sebessége a kiegészített $\overline{AA_1AA_2}$ derékszögű egyenközény átlója, az \overline{AA} , melynek iránya a görbéhez az A pontban húzott érintő keresett iránya.

108. §. A ballistikus probléma légüres térben.

1. Általános tárgyalás. A pálya egyenlete és fekvése.

A mozgó pontra ható gyorsulás függvényesen lefelé irányítva és állandó g értékű legyen.

Az x -ek tengelye vízszintes, az y -oké függvényesen felfelé van irányítva. A mozgó pont koordinátái x_1, y_1 ; gyorsulás összetevői itt:

$$x_1'' = 0; \quad y_1'' = -g \quad \dots \quad (1)$$

Ily mozgás parabolás pályával bír (102. §. 2. példája, 154. l.), a coordináták kifejezése az (1)-ből:

$$x = a_1 + b_1 t; \quad y_1 = a_2 + b_2 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Vonatkoztatassuk a mozgást oly x, y öszszrendezőkre, melyek kezdő-pontja a mozgó pont kezdő helyzetébe, azaz a $t=0$ -kor elfoglalt helyzetébe esik, melyek tengelyei az előbbiekhöz párhuzamosak.

Írjunk:

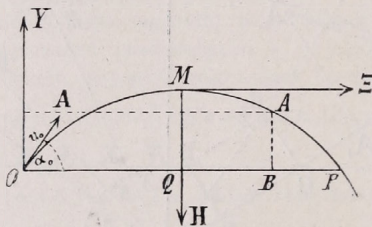
$$x_1 - a_1 = x = b_1 t, \quad y_1 - a_2 = y = b_2 t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (2)$$

A sebesség:

$$v = \left\{ b_1^2 + (b_2 - g t)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ b_1^2 + (b_2 - g \frac{x}{b_1})^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

A pálya egyenlete itt a t -nek a (2)-ből való kiküszöbölése útján:

$$g x^2 - 2 b_1 b_2 x + 2 b_1^2 y = 0 \quad (3)$$



71. ábra.

A parabola csúcsponthi egyenlete írható [Math. repertorium 64. §. (13)]:

$$\xi^2 = 2 p \eta, \quad (4)$$

ha a ξ -k és az η -k tengelye az x -ek és az y -ok tengelyeivel párhuzamosak, míg az η -ek tengelye függőlegesen lefelé van irányítva és a parabola tengelyével esik egybe (71. ábra).

Ha x_0 és y_0 az M csúcsponthi coordinátái az XY rendszerre nézve, akkor (71. ábra) az A coordinátái:

$$x = x_0 + \xi; \quad y = y_0 - \eta \quad (5)$$

Ezeket a (3)-ba téve, némi rendezés után ered:

$$\xi^2 + 2 \left(x_0 - \frac{b_1 b_2}{g} \right) \xi - 2 \frac{b_1^2}{g} \eta + x_0^2 - 2 \frac{b_1 b_2}{g} x_0 + 2 \frac{b_1^2}{g} y_0 = 0$$

A megegyezés a (4) egyenlettel bekövetkezik, ha teszszük:

$$p = \frac{b_1^2}{g}; \quad x_0 = \frac{b_1 b_2}{g}; \quad y_0 = \frac{1}{2} \frac{b_2^2}{g}, \quad (6)$$

miáltal a parabola parametere és csúcsponthiának helyzete adva van.

Az $x_0 = \overline{OQ}$ egyszersmind azon húr fél hossza, mely a mozgás kezdő-pontján, O -n megyen át, míg az $y_0 = \overline{QM}$ a pálya legnagyobb magassága ezen húr felett.

2. *A kezdő sebesség és kezdő irány bevezetése. Az emelkedés ideje. A hajtás távolsága és magassága.*

Jelelje v_0 a sebességet a $t=0$ kezdőpillanatban (az elhajítás vagy a kilőtt lövet kezdő sebességét), α_0 ennek a pozitív X tengelylyel képezett szögét.

Akkor a (2) egyenletekből:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = b_1; \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} = b_2$$

azaz (71. ábra):

$$b_1 = v_0 \cos \alpha_0; \quad b_2 = v_0 \sin \alpha_0; \quad (7)$$

e szerint a (2)-ből és a (7)-ből az öszszrendezők:

$$x = v_0 t \cos \alpha_0; \quad y = v_0 t \sin \alpha_0 - \frac{1}{2} g t^2 \quad (8)$$

A mozgó pont magassága az OP felett az y ; jelelje $\frac{1}{2} T$ a legnagyobb magasságnak megfelelő időpontot, az *emelkedés idejét*; erre nézve a (8)-ból:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{\frac{1}{2}T} = 0 = v_0 \sin \alpha_0 - g \frac{1}{2} T,$$

vagy:

$$\frac{1}{2} T = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g}, \quad (9)$$

mely idő alatt a pont az \overline{OM} ívet futotta be.

Ezen időt a (8) egyenletekbe helyettesítve, nyerjük az M legmagasabb pont $\overline{OQ} = \frac{1}{2} L$ és $\overline{QM} = H$ öszszrendezőit, hol $L = \overline{OP} =$ a *hajítás távolsága* és H a *hajítás (az emelkedés) magassága*.

Ezek értékei:

$$\frac{1}{2} L = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin (2 \alpha_0)}{g}; \quad H = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{g} \quad (10)$$

A (7)-ből és (6)-ból nyerjük $x_0 = \frac{1}{2} L$, $y_0 = H$.

Ha a hajítás távolsága, L és a kezdő sebesség, v_0 adva van, az α_0 hajítás szögét a (10) első egyenletéből nyerjük:

$$\sin (2 \alpha_0) = \frac{gL}{v_0^2} \quad (10a)$$

Ámde, mivel $\sin (2 \alpha_0) = \sin (\pi - 2 \alpha_0)$, a (10a) egyenletnek nemcsak az α_0 , hanem a $\frac{1}{2} \pi - \alpha_0$ által is felelhetünk meg; e szerint adott kezdő-sebesség mellett oly hajítási szögek, melyek öszszege $\frac{1}{2} \pi$, egyenlő hajtási távolságnak. A parabolák azonban különbözők lesznek (72. ábra); parametereik a (6) és (7) szerint:

$$p = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha_0}{g} \quad \text{és} \quad p = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{g}$$

(a két parameter számtani közepe $\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}$, azaz a függőlegesen fölfelé v_0 sebességgel hajtott pont legnagyobb magassága); továbbá a csúcspont magassága e két esetben:

$$H = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \sin^2 \alpha_0 \quad \text{és} \quad H = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \cos^2 \alpha_0,$$

az emelkedés ideje pedig:

$$\frac{1}{2} T = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g} \quad \text{és} \quad \frac{1}{2} T = \frac{v_0 \cos \alpha_0}{g}$$

$$\text{A (8)-ből a} \quad v_x = v_0 \cos \alpha_0, \quad v_y = v_0 \sin \alpha_0 - gt$$

sebességi összetevők az eredő sebességet adják:

$$v = [v_0^2 - 2v_0 gt \sin \alpha_0 + g^2 t^2]^{\frac{1}{2}},$$

vagy (8) második egyenletének tekintetbe vételével:

$$v^2 = v_0^2 - 2gy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

hol a pályának az \overline{OP} fölött lévő pontjai bírnak *positiv* y -okkal.

Az O és P pontokban a sebesség értéke egyenlő v_0 -al.

3. A feltételek, hogy a pálya meghatározott ponton átmenjen.

A (8) egyenletekből az időt kiküszöbölve, a pálya egyenlete:

$$y = x \tan \alpha_0 - \frac{1}{2} \frac{gx^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Ha a pálya a tetszőleges A_1 ponton megyen át (73. ábra), azaz ha a hajtott vagy kilőtt testtel az A_1 pontot találni akarjuk, akkor ezen pont $OQ_1 = x_1$ és $\overline{Q_1 A_1} = y_1$ összszerendezői (a pont vízszintes távolsága O -tól és magassága az O ponton átmenő vízszintes sík felett) a (12)-nek felelnek meg és:

$$y_1 = x_1 \tan \alpha_0 - \frac{1}{2} \frac{gx_1^2}{v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Rendesen a megtalálandó (meglövendő) pont helyzete (két koordinátája) ismeretes és a kezdő sebesség adva van, keressük a hajtás α_0 szögét.

A (13)-ból azonnal nyerjük:

$$\tan \alpha_0 = \frac{v_0^2}{gx_1} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{gx_1^2} \left(\frac{v_0^2}{g} - 2y_1 \right) - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

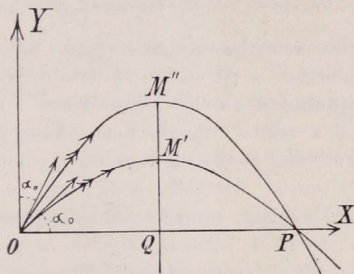
és így a hajtásnak két oly szöge létezik, melynél az A_1 pontot meg lehet találni (73. ábra).

Jegyzet. Ha a (14) gyökmenynyisége *imaginárius*, ez annak a jele, hogy *nem létezik* reális α_0 szög, melynél az adott v_0 sebesség mellett az A_1 pontot el lehetne érni; ekkor a v_0 -át addig kell növesztetni, míg a gyök alatt álló kifejezés zérus pozitív értékű lesz.

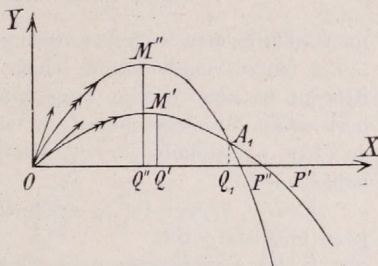
A sebesség (11) kifejezése az A_1 pontra vonatkozólag:

$$v_1^2 = v_0^2 - 2y_1g; \dots \dots \dots (15)$$

ez mutatja, hogy a v_1 sebesség, melylyel a lövet az A_1 -t találja, csak v_0 -tól és y_1 -tól függ és az α_0 hajítás-szög mindkét értékére nézve ugyanaz.



72. ábra.



73. ábra.

A t_1 idő, mely alatt a lövet O -tól A_1 -ig érkezik a (8) első egyenletéből:

$$t_1 = \frac{x_1}{v_0 \cos \alpha_0} \dots \dots \dots (16)$$

és ez a hajítás két α_0 szögére nézve a (14) szerint különböző lesz.

A szög, mely alatt a lövet a pályában fekvő tetszőleges A pontot találja (71. ábra), azaz melyet a pálya érintője az A -ban a vízszintessel képez, a (8) alapján az általános

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0 \sin \alpha_0 - gt}{v_0 \cos \alpha_0} = \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{gx}{v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_0) \dots \dots (17)$$

formulából nyerhető.

Szorozva az egyenletet ugyanis $\frac{1}{2}x$ -el és hozzáadva mindkét oldalhoz $\frac{1}{2}x \operatorname{tg} \alpha_0$ -at, a (12) szerint:

$$\frac{1}{2}x (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha_0) = y$$

miből

$$\frac{1}{2} (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha_0) = \frac{y}{x} \dots \dots \dots (18)$$

és jelenleg A_1 -ra nézve (73. ábra):

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{y_1}{x_1} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha_0, \dots \dots \dots (18a)$$

mely kifejezésben (14) szerint $\operatorname{tg} \alpha_0$ -nak és így $\operatorname{tg} \alpha_1$ -nek is két értéke van.

109. §. *Példák relativ mozgásra.*

1. Egyenletes v_1 sebességgel haladó hajó árboczáról egy test a hajóhoz viszonyított v_2 sebességgel α_2 szög alatt hajítatik el.

a. A v_2 a hajó sebességét tartalmazó verticális síkban fekszik; milyen a pont mozgása a hajóhoz képest?

A földhöz viszonyított (absolut) mozgását a 80. §. sémája adja meg, ugyanis v_0 az absolut (az állónak tekintett tengerhez viszonyított) kezdősebesség, α_0 ennek hajlásszöge; e sebesség vízszintes és függőleges componense:

$$v_1 + v_2 \cos \alpha_2 = v_0 \cos \alpha_0; \quad v_2 \sin \alpha_2 = v_0 \sin \alpha_0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

mi által [108. §.] a tengerhez viszonyított parabolás mozgás meg van adva.

A hajóra vonatkoztatott relativ mozgást a 80. és 81. §§. értelmében nyerjük, ha mind a hajó, mind a hajított test absolut sebességéhez $-v_1$ horizontális sebességet adunk; ez által a relativ mozgás nem változott, de a hajó nyugalomba jő míg, a hajított test kezdősebessége v_2 és ennek hajlásszöge α_2 .

Ezen v_2 és α_2 a 108. §. értelmében a relativ mozgás paraboláját teljesen meghatározzák.

b. Ha a v_2 sebesség nem fekszik a v_1 irányán átmenő függőleges síkban, hanem a v_2 -ön átmenő verticális sík az elsővel ε_2 szöget képez, akkor az absolut sebesség három összetevője a v_1 irány-, a függőlegesen fölfelé húzott merőleges- és ezen két irányra merőleges irány mentén

$$v_1 + v_2 \cos \alpha_2 \cos \varepsilon_2; \quad v_2 \sin \alpha_2; \quad v_2 \cos \alpha_2 \sin \varepsilon_2.$$

Ezen összetevők v_0 eredője α_0 szöget képez a vízszintessel; a v_0 -on átmenő függőleges sík pedig ε_0 szöget a v_1 átmenő verticális síkkal; e szerint:

$$\left. \begin{aligned} v_0 \cos \alpha_0 \cos \varepsilon_0 &= v_1 + v_2 \cos \alpha_2 \cos \varepsilon_2; & v_0 \sin \alpha_0 &= v_2 \sin \alpha_2; \\ v_0 \cos \alpha_0 \sin \varepsilon_0 &= v_2 \cos \alpha_2 \sin \varepsilon_2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

E szerint

$$\operatorname{tg} \varepsilon_0 = \frac{v_2 \cos \alpha_2 \sin \varepsilon_2}{v_1 + v_2 \cos \alpha_2 \cos \varepsilon_2}, \quad v_0^2 \cos^2 \alpha_0 = v_1^2 + v_2^2 \cos^2 \alpha_2 + 2v_1 v_2 \cos \alpha_2 \cos \varepsilon_2.$$

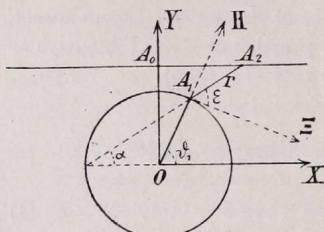
Evvel a v_0 absolut sebességnek α_0 és ε_0 két iránycosinusa ismeretes; az absolut mozgás pályája itt is parabola, melynek síkja ε_0 szöget képez a hajó mozgása irányán átfektetett verticális síkkal; ezen parabola jellemzői a 108. §. szerint v_0 -ból és α_0 -ból adódnak.

A hajóhoz viszonyított *relativ* mozgás kipuhatolására adjunk a hajó és az elhajított ponthoz $-v_1$ horizontális sebességet, miáltal a hajó nyugalomba jő, ellenben a hajított pont kezdősebessége az α_2 és ε_2 irány-szögekkel bíró v_2 leszén.

A relativ pálya itt oly parabola, melynek síkja ε_2 szöget képez a v_1 irányán átfektetett verticális síkkal; ezen parabolának további jellemzői a 108. §. szerint v_2 - és α_2 -ból folynak.

Legyen most $\omega_0 = -\omega_2$; ekkor az A_2 nyugalomba jó, míg az A_1 tovább forog O körül a_1 sugárral és $\omega_1 - \omega_2$ szögsebességgel; evvel A_1 -nek A_2 -höz viszonyított relativ mozgása meg van adva. Ha volna: $\omega_0 = -\omega_1$, akkor A_1 jönne nyugalomba és A_2 fөгogna a_2 sugárral és $\omega_2 - \omega_1$ szögsebességgel O körül; ez pedig A_2 -nek A_1 -hez viszonyított relativ mozgása.

A relativ mozgás periodusa mindkét esetben: $T = 2\pi : (\omega_1 - \omega_2)$.



75. ábra.

3. Egy A_1 pont állandó ω_1 szögsebességgel forog körben, egy másik, A_2 pont egyenes vonalú, egyenletes v_2 sebességű mozgást végez, milyen a relativ mozgás?

A probléma általánossága nem szenved csorbát, ha az összszerendezők kezdőpontját A_1 pályája középpontjába, X tengelyét pedig az A_2 mozgásához párhuzamosan fektetjük (75. ábra).

a. *Analitikai eljárás.* A rajz szerint e két pont koordinátái:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 \cos \vartheta_1, & y_1 &= a_1 \sin \vartheta_1, & \vartheta_1 &= \omega_1 t, \\ x_2 &= a_2 + v_2 t, & y_2 &= b_2, \end{aligned}$$

hol a_1 a kör sugara, a_2 és b_2 az A_2 pont kezdőhelyzetének összszerendezői.

A relativ koordináták pedig:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_2 - x_1 = a_2 + \frac{v_2}{\omega_1} \vartheta_1 - a_1 \cos \vartheta_1 \\ y &= y_2 - y_1 = b_2 - a_1 \sin \vartheta_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Ez pedig a *cycloisok* családjához tartozó görbe [Math. repertorium 65. §. 16. formulák, 77. l.], melynek egyenletét pl. a $\vartheta_1 = -(\vartheta + \frac{1}{2}\pi)$ és $\frac{v_2}{\omega_1} = a$ helyettesítés által az

$$\left. \begin{aligned} x &= a_2 - \frac{1}{2}\pi a - a\vartheta + a_1 \sin \vartheta \\ y &= b_2 + a_1 \cos \vartheta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2a)$$

alakra hozhatni. Ez egy a sugarú körnek az X tengelytől b_2 távolságban lévő egyenesen történő gördülése által létesített pályája az oly pontnak, mely ezen kör középpontjától a_1 távolságban van; a szilárd koordináták X tengelye az a sugarú kör O középpontján megyen át.

aa. Ha az A_2 mozgását egy oly ΞH mozgó rendszerhez akarnók viszonyítani, melynek Ξ tengelye az A_1 ponton át a körhöz húzott érintő, H tengelye pedig az OA_1 sugár folytatása (75. ábra), akkor a (2a)-ból és az ábrából

$$\left. \begin{aligned} r &= [(a_2 - \frac{1}{2}\pi a - a\vartheta + a_1 \sin \vartheta)^2 + (b_2 + a_1 \cos \vartheta)^2]^{\frac{1}{2}} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{b_2 + a_1 \cos \vartheta}{a_2 - \frac{1}{2}\pi a - a\vartheta + a_1 \sin \vartheta} \\ \varepsilon &= \frac{1}{2}\pi - \alpha = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\vartheta_1 = \pi + \vartheta. \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

b) *Geometriailag* egyszerűen úgy járunk el, hogy az A_1 és az A_2 pontokhoz $-r_2$ sebességet adunk; ez által A_2 nyugalomba jő, míg A_1 pont oly kör kerületi pontja mozgásával megegyező mozgást ír le, mely kör középpontja egyenletes $-r_2$ sebességgel halad az X tengely mentén és mely kör ezen közben egyenletes ω_1 szögsebességgel forog közép-pontja körül. E közben a kör pontjai cycloisokat írnak le.

110. §. *Példa a pont térbeli mozgására. Pont mozgása általánosabb és egyszerű csavargörbén.*

1. A mozgás differenciálegyenletei legyenek:

$$x_1'' = -A \cos(\omega t); \quad y_1'' = -B \sin(\omega t); \quad z_1'' = C \quad \dots (1)$$

melyekből egyszerű quadratura útján:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\omega^2} A \cos(\omega t) + A_1 t + A_0 \\ y_1 &= \frac{1}{\omega^2} B \sin(\omega t) + B_1 t + B_0 \\ z_1 &= \frac{1}{2} C t^2 + C_1 t + C_0 \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

Ez (mint alább kimutatjuk) ellipszises alapú oly csavargörbe, melynek tengelye a coordináta-tengelyek egyikével sem párhuzamos és menetei folytonosan és mindig gyorsabban távolodnak el egymástól, míg a görbe maga egyenletes, egyenes vonalú mozgással (transzlációval) halad a térben tovább.

Írjuk:

$$\left. \begin{aligned} x_1 - A_1 t - A_0 &= x, & y_1 - B_1 t - B_0 &= y; & z_1 - C_1 t - C_0 &= z; \\ \text{továbbá:} & & \frac{A}{\omega^2} &= a; & \frac{B}{\omega^2} &= b; & \frac{1}{2}C &= \frac{1}{2}c; \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

akkor:

$$x = a \cos(\omega t), \quad y = b \sin(\omega t), \quad z = \frac{1}{2} c t^2 \quad \dots (4)$$

míg az x, y, z coordináták kezdőpontja az $x_1 y_1 z_1$ -k rendszerére vonatkozólag $t=0$ időpillanatban A_0, B_0, C_0 összcsoportozásokkal bír és a tengelyek mentén A_1, B_1, C_1 állandó sebességi összetevőkkel halad tovább.

Ezen x, y, z rendszerben a pont oly csavargörbén mozog, melynek alapja a és b féltengelyű ellipszis [Math. repertorium 76. §.].

Ily mozgás létesül, ha pl. az a sík, melyben a 103. §. ellipszises mozgása történik, mindig vízszintesnek maradván, a föld nehézségének hatása alatt esik lefelé.

Ezen mozgásra nézve a (4)-ből nyerjük:

$$\begin{aligned} s'^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 = a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) + b^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) + c^2 t^2; \\ 2s's'' &= (a^2 - b^2) \omega^3 \sin(2\omega t) + 2c^2 t; \\ x''^2 + y''^2 + z''^2 &= a^2 \omega^4 \cos^2(\omega t) + b^2 \omega^4 \sin^2(\omega t) + c^2. \end{aligned}$$

E szerint [a Math. repertorium 71. §-ának (3a) formulája értelmében] a görbületi sugar :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\left\{ [a^2 \omega^4 \cos^2(\omega t) + b^2 \omega^4 \sin^2(\omega t) + c^2] [a^2 \omega^3 \sin^2(\omega t) + b^2 \omega^3 \cos^2(\omega t) + c^2 t^2] - \left[\frac{1}{2} (a^2 - b^2) \omega^3 \sin(2\omega t) + c^2 t \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{ a^2 \omega^3 \sin^2(\omega t) + b^2 \omega^3 \cos^2(\omega t) + c^2 t^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} \quad (5)$$

[iránycosinusait pedig a Math. repertorium 72. és 73. §§. formulái adják].

Továbbá [u. o. 70. §. (8)]:

$$\left. \begin{aligned} X &= +bc\omega \cos(\omega t) + bc\omega^2 t \sin(\omega t) \\ Y &= -ac\omega^2 t \cos(\omega t) + ac\omega \sin(\omega t) \\ Z &= +ab\omega^3 \sin^2(\omega t) + ab\omega^3 \cos^2(\omega t) \end{aligned} \right\}; \quad \dots \quad (6)$$

mely mennyiségekből [a Math. repertorium 74. §. (5) vagy (11) formulája szerint] a csavarodás mértéke $\tau = \frac{ds}{d\varepsilon}$ és [u. o. a 70. §. (9) formulái-ból] az osculáló sík normálisának iránycosinusai következnek.

A csavargörbe egyes menetei a pozitív z mentén mindinkább eltávolodnak egymástól.

Az említett geometriai viszonyoknak tényleges számítása az olvasónak nagyon ajánlható.

2. Vegyük most szemügyre azt az egyszerűbb mozgást, melyet valamely egyenletes ω szögsebességgel forgó kör pontjai végeznek, midőn a kör még saját tengelye mentén állandó c sebeséggel önmagához párhuzamosan halad tovább.

Ekkor áll:

$$x = a \cos(\omega t), \quad y = a \sin(\omega t), \quad z = ct \quad \dots \quad (7)$$

Ez egy egyszerű csavargörbe, melynek alapja az a sugarú kör, egy menetének magassága $(2\pi c) : \omega$.

Ezen esetben:

$$\begin{aligned} v^2 &= s'^2 = a^2 \omega^2 + c^2; & s'' &= 0; \\ x''^2 + y''^2 + z''^2 &= a^2 \omega^4; \end{aligned}$$

miből:

$$\rho = \frac{a^2 \omega^2 + c^2}{a\omega^2} \quad \dots \quad (8)$$

Továbbá:

$$X = +ac\omega^2 \sin(\omega t); \quad Y = -ac\omega^2 \cos(\omega t); \quad Z = a^2 \omega^3$$

$$R^2 = a^2 c^2 \omega^4 + a^4 \omega^6 = a^2 \omega^4 (a^2 \omega^2 + c^2).$$

E szerint [Math. repertorium, 70. §. (9)]:

$$\cos \varphi = + \frac{c \sin(\omega t)}{\sqrt{a^2 \omega^2 + c^2}}; \quad \cos \chi = - \frac{c \cos(\omega t)}{\sqrt{a^2 \omega^2 + c^2}}; \quad \cos \psi = + \frac{a \omega}{\sqrt{a^2 \omega^2 + c^2}} \quad (9)$$

az osculáló sík normálisának iránycosinusai.

Áll még [a Math. repertorium 72. §. (2) formulái értelmében]:

$$\begin{cases} \Xi = -a\omega^2(a^2\omega^2 + c^2) \cos(\omega t); & H = -a\omega^2(a^2\omega^2 + c^2) \sin(\omega t); & Z = 0; \\ P = a\omega^2(a^2\omega^2 + c^2); \end{cases} \quad (10)$$

miből:

$$\cos \lambda = -\cos(\omega t), \quad \cos \mu = -\sin(\omega t), \quad \cos \nu = 0, \quad \dots \quad (11)$$

a ρ görbületi sugár iránycosinusai folynak.

Ezenkívül [a Math. repertorium 74. §. (5) formulája szerint]:

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = a^2 c^2 \omega^6, \quad R' = 0,$$

marad:

$$\frac{ds}{d\varepsilon} = \tau = \frac{a^2 \omega^2 + c^2}{c \omega} \dots \dots \dots (12)$$

mint a csavarodás mértéke.

Az eredő gyorsulás itt $\varphi = -a\omega^2$; ez mindig a csavargörbe tengelye felé van fordítva, arra merőleges és állandó értékű.

Irva φ helyett $a\omega^2 = \kappa$, leszén a (8)-ból és a (12)-ből:

$$\text{a görbület} = \frac{1}{\rho} = \frac{\kappa}{\frac{\omega^2}{\tau^2} + c^2}; \quad \text{a csavarodás} = \frac{1}{\tau} = \frac{c \omega}{\frac{\omega^2}{\tau^2} + c^2} \dots \quad (13)$$

2a. Ha most az $a\omega^2 = \kappa$ gyorsulást véges értékűnek, az a sugarat pedig a zérus felé fogyónak és így az ω -át végtelen nagyra tekintjük, akkor a következő határértékekhez jutunk:

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)_{\omega=\infty} = \frac{\kappa}{c^2}; \quad \left(\frac{1}{\tau}\right)_{\omega=\infty} = \frac{\omega}{c} \dots \dots \dots (14)$$

Ezen eredmény alkalmazható azon esetre, midőn tetszőleges véges görbületű görbe a csavargörbe tengelye; akkor ezen tengely elemi (végtelen kicsiny hosszúságú) részére véges számú menet esik, és a csavargörbe oly gyorsulás által létesíthető, mely mindig merőleges a tengelyt képező görbére és feléje van fordítva, de a mely gyorsulás mindig véges értékű és (a pont mozgásának megfelelőleg) végtelen nagy szögsebességgel forog a tengely körül.

111. §. Feladatok a pont görbevonali mozgására.*

1. A pont koordinátái az időnek következő függvényei: $x = a_1 + b_1 t + c_1 t^2$; $y = a_2 + b_2 t + c_2 t^2$, milyen a pont pályája? Milyen e pálya, ha b_1 , milyen ha b_1 és b_2 zérus? Milyenek a mozgás többi jellemzői? Bizonyítsák be, hogy a pálya általánosságban parabola. A.

* V. ö. a 101. §. lábjegyzékét, 153. lap.

2. A pont összkrendezői $x=ct$, $y=a \cos^2(ot)$. Milyen a pálya, ennek görbületi sugara, a gyorsulás összkzetevői, a pálya inflexió-pontjai és a mozgás sajátságai. A.

3. A KOPERNICUS előtti időben, sőt még Tycho de Brahe korában a bolygókat a nap körül körben keringőknek és magát a napot a föld körül szintén körben keringőnek tekintették; a bolygóknak ezen fel fogás szerint leírt pályáját epicycloisnak nevezték, milyen ez az epicyclois? V.

4. Valamely pont parabolát ír le oly két gyorsulás befolyása alatt, melyek egyike a mozgó pontnak a parabola tengelyétől való távolságával egyenesen arányos, a másik ellenben ezen tengelyhez párhuzamos; milyen ezen utóbbi gyorsulás törvénye és milyen sajátságú a sebesség? P. J.

5. Valamely pont ellipsist ír le oly gyorsulás befolyása alatt, mely az ellipsis kis tengelyéhez párhuzamos; milyen ezen gyorsulás törvénye és milyen a mozgás maga? P. J.

6. Valamely pont hyperbolát ír le egyenletes (állandó értékű) sebességgel; mily értékű és fekvésű a gyorsulás minden időpillanatban? A.

7. A pont állandó sebességgel mozog ellipsisben; milyen a normális és a tangentialis gyorsulás, és milyen a középpontra vonatkoztatott vezérsugár és forgási összkzetevője a sebességnek és a gyorsulásnak? A.

8. Egy pont állandó sebességgel mozog körben; a polárösszkrendezők kezdőpontja a kör középpontján kívül fekszik; meghatározandó a radialis és a rotációs sebességi és gyorsulási összkzetevő. A.

9. A pont mint egy egyenesen gördülő kör kerületi pontja cycloist ír le; a kör gördülése egyenletes legyen; milyen a pont sebessége a pályában (v. ö. a 107. §. 3. pontját ROBERVAL eljárásával); milyen a normális és a tangentialis gyorsulás? A.

10. A pont oly gyorsulás befolyása alatt mozog, mely egy adott síkra merőleges és ezen siktól való távolság négyzetével egyenesen arányos; milyen a származó mozgás és annak pályája, taszító vagy vonzó gyorsulás esetében? A.

11. Valamely pont cycloist ír le a tengely felé irányított, erre merőleges gyorsulás befolyása alatt; ϑ a nemző (gördülő) körnek a cyclois csúcától számított, gördülő szöge; bebizonyítandó, hogy a gyorsulás törvénye $2 \sin \vartheta - \sin 2\vartheta$. P. J.

12. Valamely pont sebességi összkzetevői az X és az Y tengely mentén legyenek $v_x = a_1 + b_1 y$, $v_y = a_2 + b_2 x$; bizonyíttassék be, hogy a pálya kúpszelet. V.

13. Valamely pont gyorsulása mindig merőleges egy adott egyenesre és a pontnak ezen egyenestől való távolság harmadik hatványával fordított arányos és negatív értékű (azaz taszító).

A gyorsulás összkzetevői:

$$x''=0 \quad \text{és} \quad y''=-\frac{C^2}{y^3},$$

a kezdő állapotban az a, b összkrendezőjű pont v_0 sebessége α_0 szöget képez az x -ek tengelyével. Bizonyíttassék be, hogy a pálya másodrendű görbe, és pedig ellipsis, parabola vagy hyperbola, a szerint, a mint a $b^2 v_0^2 \sin^2 \alpha_0 - C^2$ különbség negatív, zérus vagy pozitív. T. a. S.

14. Valamely pont kúpszeletet ír le; a pont gyorsulása mindig merőleges a kúpszelet egy tengelyére; minőnek kell a gyorsulás törvényének lennie? [Ajánlandó a kúpszelet tengelyét az x -ek tengelyének választani és a csúcát kezdőpontnak véve, egyenletét írni: $y^2 = 2px + qx^2$]. T. a. S.

15. Valamely pont mozgása kezdetén az X tengelyen van; mozgása úgy történik, hogy y összkrendezője valamint a rendszer kezdőpontjából húzott vezérsugara és az X tengely által képezett szög az idővel arányosan

növekszik; milyen a mozgás pályája, a gyorsulás tangenciális és normális összetevője; a pálya és a mozgás többi jellemzői? S. G.

16. A légüres térben mozgó lövet meghatározott α_0 hajlásszöggel lesz kilöve; mily v_0 kezdősebességet kell a lövetnek tulajdonítani, hogy az x_1, y_1 összenszrendezőjű A_1 pontot érje el? [Önként adódik, hogy a feladat csak $\angle t g \alpha_0$ esetben lehet reális, v. ö. a 108. §. (13) formuláját]. V.

17. Mily magasságban fekszik a légüres térben mozgó elhajított pont parabolás pályájának gyújtópontja az elhajítás helyének vízszint felett? V.

18. Valamely verticális fal x_1, y_1 összenszrendezőjű pontját a lövettel merőlegesen akarjuk találni (azaz a parabola csúcspontjának az összenszrendezői legyenek x_1, y_1); bizonyíttassék be, hogy akkor a hajtás szögének tangense $= 2y_1 : x_1$, azaz, hogy egy kétszer oly magas fekvésű pontra kell célozni (a löfegyver csővének tengelyét irányítani). Milyen a kezdősebesség és a hajtás tartama? V.

19. Valamely pont ugyanazon kezdősebességgel, de különböző hajlásszögekkel hajtatik a légüres térbe; bizonyíttassék be, hogy az így származó valamenynyi parabolás pálya csúcspontjai oly *ellipszisen* fekszenek, melynek középpontja az elhajítás pontja fölött $\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{2g}$ magasságban van, nagyobb tengelye vízszintes és $\frac{v_0^2}{g}$ hosszú, kisebb tengelye függélyes és $\frac{v_0^2}{2g}$ hosszú; továbbá hogy ezen parabolák beburkolója (enveloppia) oly parabola, melynek tengelye függélyes, csúcspontja $\frac{v_0^2}{2g}$ magasságban fekszik az elhajítás pontja fölött és parametere $\frac{v_0^2}{g}$; végre, hogy az egyszerre

elhajított, ezen pályákban mozgó valamenynyi pont a t időpillanatban oly körben van, melynek sugara $v_0 t$, míg ennek középpontja $\frac{1}{2} g t^2$ távolságban fekszik az elhajítás helye alatt. F.

20. Valamely pont mindig állandó irányban, de különböző kezdősebességgel hajtatik ferdén felfelé; bizonyíttassék be, hogy a származó parabolás pályák csúcspontjai oly egyenesen fekszenek, mely a hajtás helyén megyen keresztül és melynek a vízszintessel képezett szöge tangense a hajtási szög tangensének felével egyenlő. F.

21. A légüres térben elhajított lövet t idő múlva találja az x_1, y_1 összenszrendezőjű pontot; mily kezdősebességgel és mily szög alatt kell a hajtásnak történnie? [V. ö. a 108. §. (16) formuláját]. V.

22. A légüres térben elhajított lövet x_1, y_1 pontban egy vízszintes síma, rugalmas síkot talál, melyről ugyanazon α szög alatt verődik vissza, a milyennel reá esik, csak hogy a nem tökéletes rugalmasságnál fogva, a visszapattanás sebessége a beesés sebességéhez ϑ viszonyban áll, ϑ az egységnek kisebb tört lévén; milyenek a pálya jellemzői a visszapattanás után? V.

23. A légüres térben elhajított löveg az kilövés helyének vízszintjét elérvén, onnan mint síma alaptól (kemény föld vagy sík víz) a 22. feladatban részletezett szabályok szerint visszapattan, felemelkedik, ismét eléri a vízszintet, újra visszapattan és ezt a folyamatot n -szer ismétli (*ricochette*-lövés, Gellerschuss); mily távolra ér a löveg; milyenek az egymásra következő visszapattanások után fellépő pályák, mikor történik az n -edik visszapattanás? V.

24. A megelőző feladat oly módosítása, hogy a visszazaverő sík nem vízszintes, hanem ϵ szöget képez a vízszintessel, de normális a kilőtt löveg pályája első része síkjában van. P. J.

25. Adva van valamely sík lap, melynek folytatása mint a 24. feladatban nem megyen át a hajtás kezdőpontján; a hajtás történik v_0

adott sebességgel; milyennek kell a hajtás szögének lennie, hogy a hajtott test nevezett sikot a lehető legrövidebb idő alatt érje el? T. a. S.

26. A hajtás kezdőpontján át a vízszintessel ε szöget képező sík megyen; mily hajtásszöggel kell a v_0 adott kezdősebességű löveget kilőni, hogy a sikot derékszög alatt találja? Bizonyítsák be, hogy az ε változtatása, de v_0 állandósága mellett a talált pontok egy ellipszisen fekszenek. T. a. S.

27. Egy gömbalakú töltött ürlövet pályája x_1, y_1 helyén, a légüres térben szétrobban; a robbanásnak oly hatása legyen, hogy általa a szétrobbant lövetnek minden része egy és ugyanazon értékű v_1 meghatározott sebességet nyer a lövetnek a robbanás pillanatában lévő v sebességéhez; a v_1 iránya a robbanás pillanatában a löveg középpontját és a lövegrészt összekötő sugár iránya és ezért minden egyes részre nézve különböző; bizonyítsák be, hogy az egyes részek parabolás pályáinak csúcspontjai meghosszszabbodott forgási ellipsoidon, gyújtópontjai gömbön és a részek maguk minden pillanatban gömbfelületen fekszenek. T. a. S.

28. A v_0 kezdő sebességgel hajtott pont az ε hajlásszögű síkon, mely a hajtás helyén megyen át, oly hajtásszöggel lett elhajtva, mely a síkon a legnagyobb távolságig érje el; legyen v_1 az érkezés sebessége; bizonyítsák be, hogy a midőn a kezdő sebesség és az érkezés sebessége irányainak metszőpontjából a hajtott síkra merőlegest bocsátunk, ezen merőleges hossza $v_0 v_1 : 2g$. T. a. S.

29. Adva van egymástól a távolságban lévő, végtelen kiterjedésű párhuzamos két sík; közöttük fekvő valamely pontból történjék egy pont elhajtása v_0 sebességgel, úgy, hogy a síkok normálisa és a v_0 iránya egy verticális síkban legyenek és hogy a pont a felső sikot találja, onnan a 22. feladat szabályai szerint visszapattan, az alsó sikot találja, ismét visszapattan és ezt addig folytatja, míg sebessége kisebbedése folytán a felső sikot már nem találja és visszafelé mozog, folytonos visszapattanások között. Milyenek a mozgás viszonyai? Milyenek a viszonyok, ha a visszapattanás sebessége a beesésével egyenlőnek vetetik? Milyen egyszerűsödés áll be, ha a két sík vízszintes? A.

30. Keressék azon parabolás pályák gyújtópontjainak geometriai helye, mely pályák adott két ponton mennek keresztül. T. a. S.

31. Két lövet egy és ugyanazon pontból lövetik ki α'_0 és α''_0 szögek alatt, és a lövegen (ágyún) átmenő vízszintes sikot ugyanazon A_1 pontban találja; ha t' és t'' a hajtás tartama a lövegtől az A_1 pontig, bizonyítsák be, hogy áll:

$$\sin(\alpha'_0 - \alpha''_0) : \sin(\alpha'_0 + \alpha''_0) = (t''^2 - t'^2) : (t''^2 + t'^2). \quad \text{T. a. S.}$$

32. Két lövet egy és ugyanazon pontból, egy időpillanatban, ugyanazon verticális síkban v'_0 és v''_0 sebességgel α'_0 és α''_0 szögek alatt lövetik ki; bizonyítsák be, hogy a két lövet pályájuk közös (metsző) pontját oly két időpillanatban érik el, melyek különbsége:

$$\pm \frac{2}{g} \cdot \frac{v'_0 v''_0 \sin(\alpha'_0 - \alpha''_0)}{v'_0 \cos \alpha'_0 + v''_0 \cos \alpha''_0}. \quad \text{T. a. S.}$$

33. Legyen v_1 és v_2 a lövet sebessége a gyújtóponton átmenő bármely húr két végpontjában, $v_0 \cos \alpha_0$ a sebességnek állandó vízszintes összetevője; bebizonyítandó, hogy áll $v_1^{-2} + v_2^{-2} = v_0^{-2} \sin^{-2} \alpha_0$. T. a. S.

34. A parabolás pálya három oly A_1, A_2, A_3 pontjára nézve, melyekhez tartozó pályaerintők az X tengellyel $\alpha + \beta, \alpha, \alpha - \beta$ szöget képeznek, legyenek v_1, v_2, v_3 a sebességek és t' és t az $A_1 A_2$ és az $A_2 A_3$ ívrészek befutására szolgáló időközök; bizonyítsák be, hogy áll:

$$v_1 t'' = v_3 t'; \quad \text{és} \quad v_1^{-1} + v_3^{-1} = v_2^{-1} \cdot 2 \cos \beta. \quad \text{T. a. S.}$$

35. Valamely pont $t=0$ időpillanatban $x=0$ és $y=0$ helyzetből v_0 kezdősebességgel és α_0 hajlásszöggel leszen felfelé hajtva; reá csak a függőlegesen lefelé irányított $\varphi_y = -ge^t$ gyorsulás hat, g és e állandók; bizonyítsák be, hogy az így keletkező mozgásra nézve áll:

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \cos \alpha_0; & y &= (v_0 \sin \alpha_0 + g) t + g(1 - e^t); \\ v_x &= v_0 \cos \alpha_0, & v_y &= (v_0 \sin \alpha_0 + g) - ge^t; \end{aligned}$$

a pálya egyenlete:

$$y = \frac{v_0 \sin \alpha_0 + g}{v_0 \cos \alpha_0} x + g \left(1 - e^{\frac{x}{v_0 \cos \alpha_0}} \right). \quad \text{F.}$$

36. Egy és ugyanazon pontjából valamely lejtőnek ugyanazon kezdősebességgel és ugyanazon verticális síkban két lövet leszen egymásra merőleges irányban kilöve; bizonyítsák be, hogy az elért két lőtávolság különbsége állandó. T. a. S.

37. Valamely pont $t=0$ időben $x=0$ és $y=0$ helyzetből v_0 kezdősebességgel és α_0 hajlásszöggel leszen felfelé hajtva; gyorsulásának összetevői legyenek $\varphi_x = A^2 x$, $\varphi_y = B^2 y$. Bizonyítsák be, hogy ezen mozgásra nézve áll:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{1}{2} v_0 \cos \alpha_0 (e^{At} + e^{-At}); & v_y &= \frac{1}{2} v_0 \sin \alpha_0 (e^{Bt} + e^{-Bt}) \\ x &= \frac{v_0 \cos \alpha_0}{2A} (e^{At} - e^{-At}); & y &= \frac{v_0 \sin \alpha_0}{2B} (e^{Bt} - e^{-Bt}). \end{aligned}$$

A pálya egyenlete:

$$y = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{2B} \left\{ C^{\frac{B}{A}} - C^{-\frac{B}{A}} \right\}, \quad C = \frac{Ax + (A^2 x^2 + v_0^2 \cos^2 \alpha_0)^{\frac{1}{2}}}{v_0 \cos \alpha_0}. \quad \text{F.}$$

38. Egy világító torony H magasságú fénye egy egyenes vonalban egyenletes sebességgel haladó hajó árboczának árnyékát veti a síknak tekintett tengerre; milyen az árbóczcsúcs árnyékának pályája a tengeren, ha a hajó pályája sebességének iránya nem megyen a torony tengelye talpontonján keresztül, és milyenek a többi viszonyai a mozgásnak; mily egyszerűsítés következik be, ha a hajó sebességi iránya ezen talpponton megyen keresztül? A.

39. Milyen a megelőző példában az árbóczcsúcs árnyékának pályája, ha a hajó körben mozog; milyen a két esetben az árnyéknak a hajóhoz viszonyított pályája? A.

40. Vizsgáltsák meg az üldöző görbe (104. §.), ha a futó pont egyszerű, egyenes vonalú harmonikus mozgást végez, míg az üldöző állandó sebességű pont a harmonikus mozgás középpontján átmenő és irányára merőleges vonalon kezdi meg mozgását oly időpillanatban, midőn az üldözött pont egyensúlyi helyzetén megyen keresztül. A.

41. Miképen módosul a megelőző feladat, ha az üldözött pont állandó sebességgel mozog körben, míg a többi feltételek változatlanok? A.

42. Milyen az átkelő görbe (105. §.), ha a folyam sebessége arányos a közelebbi parttól való távolsággal, míg a hajó-é állandó? A.

43. Bizonyítsák be, ha a megelőző feladatban a hajó mindig merőlegesen tart a másik partnak, hogy az átkelő görbe két félpárolból áll. T. a. S.

44. A föld és a Mars bolygó, továbbá a föld holdjának pályái egyszerűség kedvéért egy síkban fekvő köröknek tekintendők; milyen a hold szögsebessége a Marsra vonatkozólag? A.

45. Legyenek t időkor x, y a mozgó pont összfrendezői, vonatkoztatva két oly tengelyre, melyek egyike szilárd, másika az állandó ω szögsebességgel forog; bizonyítsák be, hogy a pont gyorsulásának a nevezett két tengely menti összsetevői rendre:

$$x' - 2\omega y' \operatorname{cosec}(\omega t); \quad y'' - \omega^2 y + 2\omega y' \cotg(\omega t). \quad \text{T. a. S.}$$

46. Két vonal közös metszőpontjuk körül ω_1 , illetve ω_2 szögsebességgel forog síkjában; ha t időkor x, y a mozgó pont összfrendezői ezen két vonalra mint tengelyre vonatkozólag, bizonyítsák be, hogy a pont gyorsulásának ezen tengelyek menti összsetevői rendre:

$$x'' - \omega_1^2 x - 2\omega_1 x' \cotg((\omega_2 - \omega_1)t) - 2\omega_2 y' \operatorname{cosec}((\omega_2 - \omega_1)t); \\ y'' - \omega_1^2 y - 2\omega_1 y' \operatorname{cosec}((\omega_2 - \omega_1)t) - 2\omega_2 y' \cotg((\omega_2 - \omega_1)t). \quad \text{T. a. S.}$$

47. Két pont állandó sebességgel mozog két nem egy síkban fekvő egyenesben; mikor lesz távolságuk a legkisebb? Bebizonyítandó, hogy relatív mozgásuk egyenes vonaltú pályán állandó sebességgel történik. T. a. S.

48. A mozgó pont három sebességi összsetevője: $v_x = a_1 yz$; $v_y = a_2 xz$; $v_z = a_3 xy$; milyenek a pálya (vetületeinek) egyenletei, mely idő alatt írja le a pont a pályának adott részét, midőn a pálya a kezdőponton megyen át? [Az integráció céljából az egyenletek rendre szoroztassanak $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{2}y$, $\frac{1}{2}z$ -vel]. F.

49. A mozgó pont gyorsulásának összsetevői legyenek: $\varphi_x = a$, $\varphi_y = b$, $\varphi_z = c$; bizonyítsák be, hogy a mozgás pályájának vetületei az összfrendezői síkokra parabolák és vizsgáltsák meg közelebből a térbeli pálya. V.

50. A mozgó pont koordinátái legyenek

$$x = a \cos(\omega t + \alpha), \quad y = b \cos(2\omega t + \beta), \quad z = c \cos(4\omega t + \gamma);$$

milyenek a térbeli pálya vetületei? (v. ö. a 106. §-ot). A.

51. Milyen mozgás az, melynél a pont derékszögű összfrendezői az időnek következő függvényei:

$$x = a \cos(\omega t) \cos \vartheta, \quad y = b \cos(\omega t) \sin \vartheta, \quad z = c \sin(\omega t),$$

hol $a, b, c, \omega, \vartheta$ állandók? Milyen egyszerűsítés következik be, mikor: $a = b = c$? A.

52. Valamely pont (hajó a tengeren) egyenletes sebességgel *loxodromát* ír le [Math. repertorium 76. §. 4. formulája], melynek egyenlete írható:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \eta = e^{\gamma \cotg \frac{1}{2} \alpha},$$

hol ϑ, η [az idézett helyen pedig $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\pi$ és u] polárkoordináták, α pedig az η értéke $\vartheta = 0$ -nál és λ az állandó szög, mely alatt a loxodroma a meridiánokat metszi. A sebesség összsetevői az $r = a$ sugarú gömbfelületen:

A sebesség négyzete itt egy *állandó* és egy *változó* tag összege; benne két egyelőre tetszőleges K és k állandó lép fel; de mivel a bal oldal *positív*, a jobboldali összeg csak *positív*, vagy *zérus* értékű lehet és ezért a k és a K értékei és előjelei mindig olyformán választhatók csak, hogy a jobb oldal is *positív* maradjon.

Ezért k és K egyidejűleg *nem lehet negatív*, hanem csak a következő három eset léphet fel: 1. K *positív* ezenkívül 1a) k *positív*, vagy 1b) k *negatív*. 2. K *negatív* és k *positív*.

Hogy a pálya alakjára, legalább általánosságban, lehessen következtetni, a v^2 -en kívül még a v_r^2 radiális sebesség négyzetet írjuk fel.

A centrális mozgásnál mindig áll [74. §. (5)]:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2},$$

melynek összehasonlítása a fentírt (5) egyenlettel adja:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = Kr^2 + c^2\left(k - \frac{1}{r^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Az *apsis-vonalakra* nézve [74. §. 4. pontja] a (6) *bal* oldala zérus; erre nézve $0 = Kr_m^2 + c^2kr_m^2 - c^2$ a feltétel, melyből:

$$r_m^2 = -\frac{c}{2K} \{kc \pm \sqrt{4K + k^2c^2}\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Az egyenlet *bal* oldala és ezért *jobb* oldala is okvetetlenül *positív*; ezért csak azokat az értékeket és előjeleket lehet tekintetbe venni, melyek ily eredményt adnak.

Jegyzet. Az esetet, midőn $K=0$, *kizárjuk*, mivel ekkor $R=0$ és egyenletes, egyenes vonalú mozgás keletkeznék. Ebből kitűnik, hogy (7) szerint r_m^2 soha nem lehet *zérus*.

1. Ha K *positív*, ez írható $K = +C^2$ és ha még a) k *positív*: a (7)-ből az *apsis-vonal* négyzete:

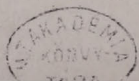
$$a) \quad r_m^2 = \frac{c}{2C^2} [-kc + \sqrt{k^2c^2 + 4C^2}] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7a)$$

b) ha k *negatív*, szintén:

$$b) \quad r_m^2 = \frac{c}{2C^2} [-kc + \sqrt{k^2c^2 + 4C^2}] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7b)$$

E szerint itt, *tasztó* gyorsulásnál a pályának csak *egy* *apsis-vonala* van.

2. Ha K *negatív*, ez írható $K = -C^2$, míg k csak *positív* lehet; akkor az r_m^2 -nek (7) kifejezése szintén alkalmazható és benne K helyébe $-C^2$ -t kell írni, miáltal:



$$r_m^2 = \frac{c}{2C^2} [kc \pm \sqrt{k^2 c^2 - 4C^2}] \dots \dots \dots (7c)$$

Itt *mindegyik* előjel mellett az egyenlet jobb oldala absolute *positiv*, de *különböző értékű*, ezért ezen esetben, midőn a gyorsulás vonzó, a pálya különböző hosszúságú *két* apsis-vonallal bír.

II. A pálya egyenletének képzése céljából a (4)-et írjuk:

$$\pm d\vartheta = \frac{udu}{\sqrt{ku^2 - u^4 + \frac{K}{c^2}}}$$

avagy:

$$\pm d\vartheta = \frac{udu}{\sqrt{\frac{K}{c^2} + \frac{k^2}{4} - (u^2 - \frac{k}{2})^2}} \dots \dots \dots (8)$$

A (8) négyzete adja:

$$u^2 \left(\frac{du}{d\vartheta} \right)^2 + (u^2 - \frac{k}{2})^2 = \frac{K}{c^2} + \frac{k^2}{4} \dots \dots \dots (9)$$

mely alakból észreveszszük, hogy, mivel a bal oldal *absolute positiv*, a K és a k^2 állandók *mindig* csak úgy választhatók, hogy a $\frac{K}{c^2} + \frac{k^2}{4}$ összeg *positiv* vagy *zérus* legyen.

Rövidség kedvéért tétessék:

$$\left. \begin{aligned} \frac{K}{c^2} + \frac{k^2}{4} &= H^2, \\ u^2 - \frac{1}{2}k &= -z; \quad 2udu = -dz, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

miáltal a (8) egyenletből:

$$\pm d\vartheta = -\frac{1}{2} \frac{dz}{\sqrt{H^2 - z^2}} \dots \dots \dots (8a)$$

Ennek integrálja:

$$\pm 2\vartheta = \arccos \left(\frac{z}{H} \right) + \text{constans.}$$

A *constans* csak *szög* lehet, jeleljük azt $\pm 2\alpha$ -val; ekkor:

$$\pm 2(\vartheta - \alpha) = \arccos \left(\frac{z}{H} \right), \text{ vagy:}$$

$$z = H \cos 2(\vartheta - \alpha) \dots \dots \dots (11)$$

Viszszahelyettesítve (10)-ből az u -t és u helyébe az r^{-1} -t, a (11)-ből:

$$u^2 = \frac{1}{r^2} = \frac{k}{2} - \sqrt{\frac{K}{c^2} + \frac{k^2}{4}} \cos 2(\vartheta - \alpha) \dots \dots \dots (12)$$

mint a *pálya* explicit egyenlete, melynek apsis-vonala vagy vonalai a $\vartheta = a$ irányú egyenesben fekszenek.

A (12) egyenletnek derékszögű koordinátákban való kifejezése céljából vezessünk be egy síkbeli rendszert, melynek kezdete a mozgás centruma, x tengelye pedig a polár-tengelylyel a szöget képezzen. Ekkor :

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos (\vartheta - \alpha) \\ y &= r \sin (\vartheta - \alpha) \end{aligned} \right\}; \quad x^2 + y^2 = r^2;$$

továbbá :

$$\cos 2 (\vartheta - \alpha) = \cos^2 (\vartheta - \alpha) - \sin^2 (\vartheta - \alpha) = \frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2}.$$

A (12) egyenlet e szerint írható :

$$\frac{1}{r^2} = \frac{k}{2} - \frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{K}{c^2} + \frac{k^2}{4}} (x^2 - y^2).$$

Szorozva mindkét részét $r^2 = x^2 + y^2$ -al és rendezve, származik :

$$\left(\frac{k}{2} - \sqrt{\frac{k^2}{4} + \frac{K}{c^2}} \right) x^2 + \left(\frac{k}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4} + \frac{K}{c^2}} \right) y^2 = 1 \quad (13)$$

Ez egy kúpmetszet középponti egyenlete, és pedig *ellipszisé* vagy *hyperboláé*, a szerint, a mint az x^2 és az y^2 együtthatói *egyenlő* vagy *ellentett* előjelűek.

A további vizsgálatra nézve ezen §. bekezdésében említett három esetet kell megkülönböztetnünk.

1. K *positív*, azaz $K = +C^2$, a *gyorsulás taszító*.

a) k *positív*. Ezenkor az x^2 *coefficiente negatív*, az y^2 *együtthatója pozitív* és a (13) alakja

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (14)$$

A pálya oly *hyperbola*, melynek középpontja a mozgás centruma ; ezenkívül a (13) szerint: $a^2 > b^2$.

b) k *negatív*. Ezenkor az x^2 *együtthatója negatív*, az y^2 *coefficiente pozitív*, de kisebb értékű mint az előbbi esetben. Ezen esetben is a pálya *hyperbola*, melynek középpontja ismét a mozgás centruma, továbbá $a^2 < b^2$; (76. ábra).

2. K *negatív*. Ekkor $K = -C^2$, a *gyorsulás vonzó*.

Itt k csak *positív* lehet [mert bebizonyítottuk a sebesség (5) egyenlete tárgyalásánál, hogy K és k nem lehet egyszerre negatív] és (13)-ban az x^2 és az y^2 *együtthatója pozitív*, a (13) egyenlete alakja

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (15)$$

A pálya oly *ellipsis*, melynek középpontja a mozgás centruma ; ezenkívül $a^2 > b^2$; (77. ábra).

Kimondjuk ezek alapján az eredményt: *Ha a centrális gyorsulás a távolsággal egyenesen arányos, és ezenkívül vonzó: akkor a pálya ellipsis, ellenben, ha a gyorsulás taszító: a pálya hyperbola; mindkét esetben a görbék középpontja a mozgás centrumában van.*

A határeset $K=0$; ekkor nincs gyorsulás, a pálya egyenes vonal.

III. Hátra volna még a pályák jellemző adatait, ugyanis a tengelyek nagyságát és azok fekvését a t_0 időpillanathoz tartozó kezdő állapotnak v_0 , r_0 és ϑ_0 jellemzői által kifejezni.

Először az integrációnak a (12)-ben fellépő k és a állandóit határozzuk meg.

A sebesség (5) egyenlete a kezdő állapotra vonatkozólag:

$$k = \frac{1}{c^2} (v_0^2 - Kr_0^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Helyettesítve ezen k -t a (12)-be, a kezdő állapotra nézve nyerjük:

$$\frac{1}{r_0^2} = \frac{v_0^2 - Kr_0^2}{2c^2} - \sqrt{\frac{K}{c^2} + \frac{(v_0^2 - Kr_0^2)^2}{4c^4}} \cos 2(\vartheta_0 - \alpha).$$

Ebből rövidítések után és mivel $\cos 2(\vartheta_0 - \alpha) = \cos 2(\alpha - \vartheta_0)$,

$$\pm (\vartheta_0 - \alpha) = + \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{r_0^2 (v_0^2 - Kr_0^2) - 2c^2}{r_0^2 \sqrt{4c^2 K - (v_0^2 - Kr_0^2)^2}} \right) \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Így (16) és (17) megadják a k -t és ez a -t a kezdő állapot jellemzői segítségével.

A pályák a és b féltengelyeire nézve a (13) egyenlet a:

$$\mp \frac{1}{a^2} = \frac{k}{2} - \sqrt{\frac{K}{c^2} + \frac{k^2}{4}}; \quad + \frac{1}{b^2} = \frac{k}{2} + \sqrt{\frac{K}{c^2} + \frac{k^2}{4}}; \quad (18)$$

értékeket adja, melyekbe csak a k (16) értéke helyetteszendő, hogy a^2 és b^2 a v_0^2 és r_0^2 által legyen kifejezve.

Az r_0 iránya és az a tengely által bezárt szög $\pm (\vartheta_0 - \alpha)$, melynek értékét (17) adja; végre a pálya síkja az r_0 egyenes és a v_0 sebesség által meghatározott sík (76. és 77. ábra és 73. §.).

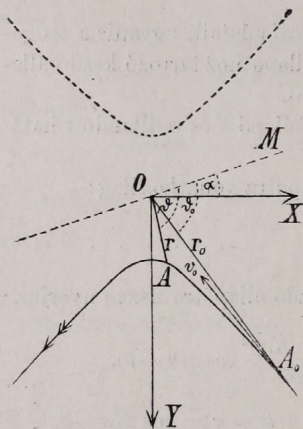
Evvel a pálya jellemzői mind v_0 , r_0 , ϑ_0 által vannak kifejezve.

Nevezetes, hogy a^2 és b^2 a (18) és (16) szerint csak v_0^2 és r_0^2 -től függenek, de függetlenek a kettő által bezárt szögtől és a kettő irányításától a térben.

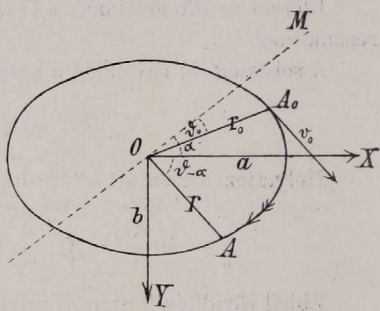
Az olvasó bizonyítsa be, hogy a (7a)-ban és (7b)-ben nyert apsis-

* A felső előjel taszító, az alsó vonzó gyorsulásnál érvényes.

vonal négyzete, r_m^2 , itt (positív K -nál) a (18) formula b^2 értékével egyenlő, míg a (7c)-ben talált r_m^2 két értéke itt (negatív K -nál) a (18) $+a^2$ és b^2 értékeivel egyenlő. [Erre nézve a (6)-ból az $(1:r_m^2)$ számítható ki].



76. ábra.



77. ábra.

113. §. Folytatás. A koordináták és az idő között fennálló összefüggés. Keringési idő.

Az $r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = c$ általános összefüggésből [73. §. (5)] és a megelőző §. (10) egyenletéből nyerjük: $d\vartheta = \frac{c}{r^2} dt$, vagy $d\vartheta = c(\frac{1}{2}k - z) dt$, melyet ugyanezen §. (8a) egyenletével egyesítve, keletkezik

$$\mp dt = \frac{1}{2c} \frac{dz}{(\frac{1}{2}k - z)\sqrt{H^2 - z^2}} \quad (1)$$

Továbbá, ha kiindulunk a megelőző §. (12) egyenletéből és benne az (1)-ből $r^{-2} = c^{-1} (d\vartheta : dt)$ -t írunk, valamint rövidség kedvéért teszünk:

$$\vartheta - \alpha = \frac{1}{2}\pi + \eta, \quad (2)$$

hol η az apsis-tól számított szög, leszen belőle:

$$dt = \frac{1}{c} \cdot \frac{d\vartheta}{\frac{1}{2}k - H \cos 2(\vartheta - \alpha)} = \frac{1}{c} \cdot \frac{d\eta}{(\frac{1}{2}k + H) \cos^2 \eta + (\frac{1}{2}k - H) \sin^2 \eta} \quad (3)$$

Az (1) kifejezi a z (azaz u , azaz r) és a t -t, a (3) pedig az η (azaz $\vartheta - \alpha$) és a t között fennálló összefüggéseket.

Az (1) és a (3) közelebbi vizsgálata mutatja, hogy ezen egyenle-

teknek integráljai lényegesen függenek a $H^2 - \frac{1}{4}k^2$, azaz a megelőző §. (10) formulája szerint a $K : c^2$ előjelétől, azaz attól, vajjon a gyorsulás taszító vagy vonzó.

I. Ha a gyorsulás *taszító*, akkor $K = +C^2$, továbbá $H^2 = \frac{C^2}{c^2} + \frac{k^2}{4}$ és így $H > \frac{1}{2}k$,

Ezen esetben csak *egy* apsis-vonal van; reá nézve a megelőző §. (12) egyenlete szerint $u^2 = \frac{1}{2}k + H$ és $2(\vartheta - \alpha) = \pi$, a mi a *legrövidebb* r távolságnak felel meg; ekkor egyszersmind $\eta = 0$ és $z = -H$.

Ha az időt a mozgó pontnak ezen apsisban lévő helyzetétől kezdjük számítani, akkor az (1) és (3) integráljai [Math. repertorium 108. §-ának (36) és 110. §-ának (41) formulái]:

$$\left. \begin{aligned} \mp t^* &= \frac{1}{2C} \lg \left\{ \frac{c(2H^2 - kz) + 2C\sqrt{H^2 - z^2}}{2Hc(\frac{1}{2}k - z)} \right\}; & z &= \frac{1}{2}k - \frac{1}{r^2} \\ t &= \frac{1}{2C} \lg \left\{ \frac{\sqrt{H + \frac{1}{2}k} + \operatorname{tg} \eta \sqrt{H - \frac{1}{2}k}}{\sqrt{H + \frac{1}{2}k} - \operatorname{tg} \eta \sqrt{H - \frac{1}{2}k}} \right\}; & \eta &= (\vartheta - \alpha) - \frac{1}{2}\pi. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

II. Ha a gyorsulás *vonzó*, akkor $K = -C^2$, továbbá $H^2 = -\frac{C^2}{c^2} + \frac{k^2}{4}$ és így $H < \frac{1}{2}k$.

Ezen esetben *két* apsis-vonal létezik, melyekben a megelőző §. (12) egyenlete szerint $u^2 = \frac{1}{2}k \pm H$, és $2(\vartheta - \alpha) = \pi$, vagy $= 2\pi$, mi az r *legkisebb* és *legnagyobb* értékének felel meg; ekkor egyszersmind $\eta = 0$, vagy $= \frac{1}{2}\pi$ és $z = \mp H$.

A mozgó pontnak bármely apsisban lévő helyzetétől számítjuk is az időt: az integráció állandói itt zérusok.

Ezen esetben az (1) és a (3) integráljai [Math. repertorium 108. §-ának (37) és 110. §-ának (40) formulái]:

$$\left. \begin{aligned} \pm t^* &= \frac{1}{2C} \operatorname{arc} \sin \left\{ \frac{C\sqrt{H^2 - z^2}}{Hc(\frac{1}{2}k - z)} \right\}; & z &= \frac{1}{2}k - \frac{1}{r^2} \\ t &= \frac{1}{C} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left\{ \sqrt{\frac{\frac{1}{2}k - H}{\frac{1}{2}k + H}} \operatorname{tg} \eta \right\}; & \eta &= (\vartheta - \alpha) - \frac{1}{2}\pi \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Az utolsó egyenlet itt az ellipsises pálya keringési idejére enged következtetni.

Bevezetve ugyanis λ változót az η helyett a

$$\operatorname{tg} \lambda = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}k - H}{\frac{1}{2}k + H}} \operatorname{tg} \eta \quad (6)$$

* A kettős előjel jelentése itt az, hogy ugyanazon z -nek (avagy ugyanazon r -nek) az apsisához symmetrikus fekvésű *két* helyzet felel meg.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{a^2} &= \frac{d^2 - (a_1 a_2 + b_1 b_2)}{2(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}; & \frac{1}{b^2} &= \frac{d^2 + (a_1 a_2 + b_1 b_2)}{2(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}, \\ \text{hol:} & & & \end{aligned} \right\} (5)$$

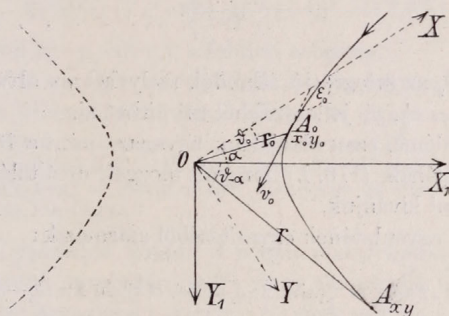
$$d^2 = [(a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2]^{\frac{1}{2}} = [(a_1 a_2 + b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2]^{\frac{1}{2}}$$

és a hyperbolának, tengelyeivel egybeeső koordináta-rendszerre vonatkozó egyenlete:

$$-\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = -1 \quad . \quad . \quad . \quad (5a)$$

A (4) és (5) egyenletek igazolását az olvasóra bizzuk.*

Ia. Ha X_1 és Y_1 az új koordináta-tengelyek (78. ábra), x_1, y_1 a



78. ábra.

reájuk vonatkoztatott összszerendezők, akkor legyen A_0 a helyzet t_0 -kor és x_0, y_0 vagy r_0, ϑ_0 a koordinátái; továbbá v_0 a sebesség és ϵ_0 a v_0 és X által bezárt szög; a fent említett $a_1, a_2; b_1, b_2$ állandókat ezek segítségével a (2) egyenletekből és ezeknek első differenciálquatienseiből kifejezve, ered a (4)- és (5)-ből:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 2\epsilon &= \frac{2C^2 x_0 y_0 - v_0^2 \sin 2\epsilon_0}{C^2(x_0^2 - y_0^2) - v_0^2 \cos 2\epsilon_0} \\ 2c^2 a^{-2} &= [(C^2 r_0^2 - v_0^2)^2 + 4C^2 c^2]^{\frac{1}{2}} - (C^2 r_0^2 - v_0^2) \\ 2c^2 b^{-2} &= [(C^2 r_0^2 - v_0^2)^2 + 4C^2 c^2]^{\frac{1}{2}} + (C^2 r_0^2 - v_0^2) \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

hol $c = v_0(x_0 \sin \epsilon_0 - y_0 \cos \epsilon_0)$ a felületi sebesség.

Ezen formulák igazolását szintén ajánljuk a kezdőnek.

* Ezen czélból teendő $x = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha$ és $y = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha$ a (3)-ba, az x, y_1 szorzat együttthatóját zérusnak téve, ered (4) és azután (5), mivel a (3) itt $-x_1^2 a^{-2} + y_1^2 b^{-2} = -1$ alakú lesz. Az egész csak egyszerű koordináta-transzformáció [Math. repertorium 50. §. (1)].

Evvél a pálya alakja, méretei és fekvése a kezdőállapot jellemzői által van kifejezve.

Jegyzet. Összehasonlítva ezt az eredményt a 112. §. (16) és (18) formuláival, melyekbe $K = +C^2$ teendő és elsejének *felső* előjele használandó, észreveszszük, hogy az ottani a^2 és b^2 -nak itt b^2 és a^2 felel meg.

II. A gyorsulás *conzó*; akkor $K = -C^2$ és a mozgás egyenletei:

$$x'' = -C^2 x, \quad y'' = -C^2 y \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

melyek szintén egymástól függetlenek lévén, a 92. §. eljárása szerint:

$$x = A \cos (Ct + 2\pi\delta_1), \quad y = B \cos (Ct + 2\pi\delta_2) \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

A mozgás periodusa itt:

$$T = \frac{2\pi}{C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

az A , B , δ_1 , δ_2 az integráció állandói, melyeket az olvasó a t_0 -ra vonatkozó x_0 , y_0 , x'_0 , y'_0 jellemzőkből számíthat ki.

Ez a probléma, ezen alakjában, ugyanaz, mint a 103. §-ban és a 106. §. I. pontjában (176. l.) tárgyalt mozgás, de általános tárgyalását itt befejezni kívánjuk.

A (8) két egyenletének egyesítéséből származik:

$$\begin{aligned} \frac{x}{A} \sin(2\pi\delta_2) - \frac{y}{B} \sin(2\pi\delta_1) &= \cos(Ct) \sin 2\pi(\delta_2 - \delta_1); \\ \frac{x}{A} \cos(2\pi\delta_2) - \frac{y}{B} \cos(2\pi\delta_1) &= \sin(Ct) \sin 2\pi(\delta_2 - \delta_1); \end{aligned}$$

miből:

$$\frac{x^2}{A^2} - 2 \frac{xy}{AB} \cos 2\pi(\delta_2 - \delta_1) + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2 2\pi(\delta_2 - \delta_1) \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Ez oly *ellipszis* centrális egyenlete, melynek középpontja a mozgás centruma, melynek a , b főtengelyei a koordináta-tengelyekkel α szöget képeznek, hol a , b , α -ra nézve áll:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = 2 \frac{AB}{A^2 - B^2} \cos 2\pi(\delta_2 - \delta_1); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{a^2} &= \frac{A^2 + B^2 - D^2}{2A^2B^2 \sin^2 2\pi(\delta_2 - \delta_1)}; & \frac{1}{b^2} &= \frac{A^2 + B^2 + D^2}{2A^2B^2 \sin^2 2\pi(\delta_2 - \delta_1)}; \\ \text{és:} & & D^2 &= [(A^2 + B^2)^2 - 4A^2B^2 \sin^2 2\pi(\delta_2 - \delta_1)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

és az ellipszisnek, tengelyeivel egybeeső koordináta-rendszerre vonatkozó egyenlete:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12a)$$

A (11) és (12) egyenletek igazolását az olvasóra bizzuk.*

IIa. Mivel a fent tett megjegyzés szerint az A és B , δ_1 és δ_2 állandók a kezdő állapot x_0, y_0 és x'_0, y'_0 vagy $(x_0=r_0 \cos \vartheta_0, y_0=r_0 \sin \vartheta_0, x'_0=v_0 \cos \varepsilon_0, y'_0=v_0 \sin \varepsilon_0)$ összefüggések értelmében) az $r_0, \vartheta_0, v_0, \varepsilon_0$ jellemzői segítségével meghatározottaknak tekinthetők, az a, a^2, b^2 ezek segítségével szintén kifejezhetők. Nyerjük így, a (8) egyenleteket és első differenciálhányadosaikat $t=0$ -ra alkalmazva:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2C^2 x_0 y_0 + v_0^2 \sin 2\varepsilon_0}{C^2(x_0^2 - y_0^2) + v_0^2 \cos 2\varepsilon_0} \\ 2c^2 a^{-2} &= C^2 v_0^2 + v_0^2 - [(C^2 v_0^2 + v_0^2)^2 - 4C^2 c^2]^{\frac{1}{2}} \\ 2c^2 b^{-2} &= C^2 v_0^2 + v_0^2 + [(C^2 v_0^2 + v_0^2)^2 - 4C^2 c^2]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (13)$$

hol $c=v_0(x_0 \sin \varepsilon_0 - y_0 \cos \varepsilon_0)$, a felületi sebesség.

E formulák a pálya méreteit, alakját és fekvését adják meg a kezdő állapot jellemzői által; igazolásukat az olvasónak ajánljuk.

Jegyzet. Ezen eredményt összehasonlítva a 112. §. (16) és (18) formuláival, melyekbe $K=-C^2$ helyetteszendő és elsőjének *alsó* előjele veendő, találjuk, hogy az ottani a^2 és b^2 identikus az itteni a^2 - és b^2 -tel és így rajz közlése fölösleges.

115. §. Ugyanazon feladat. A pályák hodographjai.

A hodograph meghatározására vagy a centralis mozgásnál a 78. §-ban talált (8) egyenletet: $\rho=r^2 c^{-1} R$, vagy pedig a közönséges analitikai eljárást alkalmazhatjuk.

Mivel itt $R=\pm C^2 r$, az idézett egyenletből:

$$\varrho = \pm \frac{C^2}{c^2} r^3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (1)$$

szóval: a hodograph görbületi sugara a vezérsugár harmadik hatványával egyenesen arányos.

Ez az egyenlet is *kúpszeletet* indikál; de a további tárgyalásra kevésbé alkalmas.

Számazzassuk a hodograph egyenletét derékszögű koordinátákban, jelelve a sebesség componenseit $x'=\xi$, $y'=\eta$ -val és külön-külön tárgyalva a $+C^2$ tasztító és $-C^2$ vonzó állandók eseteit.

I. Ha a gyorsulás *tasztító*, akkor: $K=+C^2$, és a megelőző §. (2) egyenleteiből:

$$\frac{\xi}{C} = a_1 e^{Ct} - a_2 e^{-Ct}; \quad \frac{\eta}{C} = b_1 e^{Ct} - b_2 e^{-Ct} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (2)$$

* Itt is úgy járunk el, mint az I-ben (207. lap lábjegyzéke), teszünk a (10)-be: $x=x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha$, $y=x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha$ és az $x_1 y_1$ szorzat együtthatóját zérusnak téve, nyerjük (11)-et, míg (10) alakja $x_1^2 a^{-2} + y_1^2 b^{-2} = 1$, melyből (12) következik.

Ellenben az x és y volt:

$$x = a_1 e^{Ct} + a_2 e^{-Ct}; \quad y = b_1 e^{Ct} + b_2 e^{-Ct}.$$

Az alsó két egyenletből a megelőző §. (3) egyenlete származott:

$$x^2 b_1 b_2 - xy (a_1 b_2 + a_2 b_1) + y^2 a_1 a_2 = -(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \quad (3)$$

Ha a (2) egyenleteiből kivánjuk az időt kiküszöbölni, ezt a (3) egyenlet alapján azonnal tehetjük, ha az utolsó egyenletbe x és y helyébe $\frac{\xi}{C}$ -t és $\frac{\eta}{C}$ -t, a_1 és b_1 helyébe ugyancsak a_1 -t és b_1 -t; a_2 és b_2 helyébe ellenben $-a_2$ -t és $-b_2$ -t teszünk.

Keletkezik a (2)-ből:

$$\xi^2 b_1 b_2 - \xi \eta (a_1 b_2 + a_2 b_1) + \eta^2 a_1 a_2 = +C^2 (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \quad (4)$$

Ez pedig *oly kúpszelet egyenlete, melynek középpontja a mozgás centruma.*

Forgassuk a koordináták rendszerét kezdőpontja körül α szöggel, úgy, hogy a megelőző §. (4) egyenlete szerint

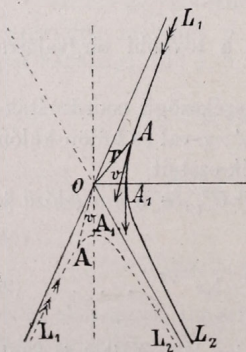
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_1 a_2 - b_1 b_2} \quad (5)$$

és jelelve ismét

$$d^2 = [(a_1 a_2 + b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2]^{\frac{1}{2}}; \quad (6)$$

továbbá x_1 , y_1 - és ξ_1 , η_1 -el a pálya és a hodograph koordinátáit az elforgatott rendszerben, akkor a megelőző §. (5) és (5a) egyenletei sémája szerint a (3)-ból és (4)-ből:

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 [(a_1 a_2 + b_1 b_2) - d^2] + y_1^2 [(a_1 a_2 + b_1 b_2) + d^2] &= -2(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\ \xi_1^2 [(a_1 a_2 + b_1 b_2) - d^2] + \eta_1^2 [(a_1 a_2 + b_1 b_2) + d^2] &= +2C^2 (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$



79. ábra.

Mivel az x_1 és ξ_1 együttthatója negatív, az egyenletek egybehasonlítása adja, hogy a pálya és a hodograph egymásra merőleges tengelyű hyperbolák, melyek közös középpontja a mozgás centruma és melyeknek megfelelő tengelyei egymással proportionálisak és melyek végre közös asymptotákkal bírnak (79. ábra, hol $L_1 A A_1 L_2$ a pálya és $L_1 A A_1 L_2$ a hodograph).

A hodograph-hyperbola egész kiterjedésében szerepel mint a mozgás hodographja, mert a sebesség formulája [112.

§. (5)] szerint $v^2 = kc^2 + C^2 r^2$, itt a sebesség végtelen nagy is lehet.

Mennél tompább szöget képeznek egymással a pálya asymptotusai, annál hegyesebb szöget képeznek egymással a hodograph asymptotusai és fordítva.

II. Ha a gyorsulás *ronzó*, akkor $K = -C^2$ és a megelőző § (8) egyenletéből a sebesség componensei:

$$\frac{\xi}{C} = -A \sin(Ct + 2\pi\delta_1), \quad \frac{\eta}{C} = -B \sin(Ct + 2\pi\delta_2) \quad (8)$$

avagy, ha ideiglenesen írunk

$$2\pi\delta' = 2\pi\delta_1 + \frac{1}{2}\pi, \quad 2\pi\delta'' = 2\pi\delta_2 + \frac{1}{2}\pi, \quad (9)$$

a (8)-ből:

$$\frac{\xi}{C} = A \cos(Ct + 2\pi\delta'), \quad \frac{\eta}{C} = B \cos(Ct + 2\pi\delta'') \quad (10)$$

Ellenben x és y volt [u. o. (8)]:

$$x = A \cos(Ct + 2\pi\delta_1), \quad y = B \cos(Ct + 2\pi\delta_2) \quad (11)$$

Az itt írt (11)-ből a t -t kiküszöbölve, ott (10) származott:

$$\frac{x^2}{A^2} - 2 \frac{xy}{AB} \cos 2\pi(\delta_2 - \delta_1) + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2 2\pi(\delta_2 - \delta_1) \quad (12)$$

Jelen esetünkben a (10)-ből a hodograph egyenletét tiszta analogia segítségével azonnal nyerjük, ha (12)-ben x és y helyébe $\frac{\xi}{C}$ -t és $\frac{\eta}{C}$ -t, $2\pi(\delta_2 - \delta_1)$ helyébe pedig $2\pi(\delta'' - \delta')$ -t teszünk. Mivel (9) szerint $2\pi(\delta'' - \delta') = 2\pi(\delta_2 - \delta_1)$, származik (10)-ből:

$$\frac{\xi^2}{A^2} - 2 \frac{\xi\eta}{AB} \cos 2\pi(\delta_2 - \delta_1) + \frac{\eta^2}{B^2} = C^2 \sin^2 2\pi(\delta_2 - \delta_1) \quad (13)$$

Ez oly *kúpszelet egyenlete*, melynek középpontja a mozgás centruma.

Forgassuk most a koordináták rendszerét kezdőpontja körül a szög-gel, úgy, hogy a megelőző §. (11) egyenlete szerint:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = 2 \frac{AB}{A^2 - B^2} \cos 2\pi(\delta_2 - \delta_1) \quad (14)$$

és jelezje ismét:

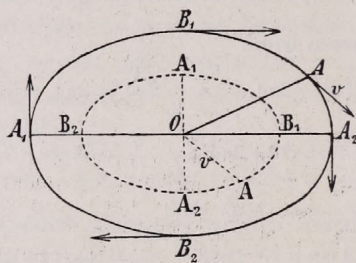
$$D^2 = [(A^2 + B^2)^2 - 4A^2B^2 \sin^2 2\pi(\delta_2 - \delta_1)]^{\frac{1}{2}}, \quad (15)$$

továbbá x_1 , y_1 és ξ_1 , η_1 a pálya és a hodograph koordinátáit az elforgatott rendszerben, akkor a megelőző §. (12) és (12a) sémái szerint a (12) és (13)-ból:

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 [A^2 + B^2 - D^2] + y_1^2 [A^2 + B^2 + D^2] &= 2A^2B^2 \sin^2 2\pi(\delta_2 - \delta_1) \\ \xi_1^2 [A^2 + B^2 - D^2] + \eta_1^2 [A^2 + B^2 + D^2] &= 2A^2B^2 C^2 \sin^2 2\pi(\delta_2 - \delta_1) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Mivel x_1 és ξ_1 együttthatója pozitív, az egyenletek összehasonlítása azt az eredményt adja, hogy a pálya és hodographja ellipszisek, melyeknek közös középpontja a mozgás centruma, melyeknek megfelelő tengelyei egyenirányuak és egymással proportionálisak.

Szóval: *A pálya és hodographja közös középponti, hasonló és hasonló fekvésű ellipszisek (80. ábra).*



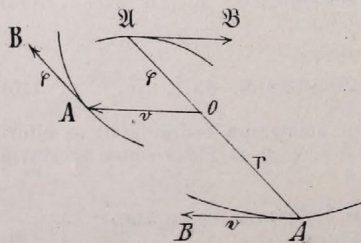
80. ábra.

116. §. Az egyedüli centrális pályák, melyek hodographjai szintén centrális görbék, azok a pályák, melyeknél a gyorsulás a távolsággal egyenesen arányos.

Legyen (81. ábra) O a mozgás középpontja, melyből a sebességeket és a gyorsulásokat is felrajzoljuk; A a mozgó pont pályájának egyik pontja, A a hodograph megfelelő pontja, \mathfrak{A} a hodograph hodographjának megfelelő pontja, úgy hogy álljon:

$$\begin{aligned}\vec{OA} &= r; & \vec{AB} &= v; \\ \vec{OA} &= v; & \vec{AB} &= \varphi; \\ \vec{O\mathfrak{A}} &= \varphi; & \mathfrak{A}\mathfrak{B} &= \text{a másodrendű gyorsulás.}\end{aligned}$$

Mivel a gyorsulás itt *centrális*, iránya mindig az r radius vector mentén fekszik, ezért a hodographnak \vec{AB} érintője párhuzamos az r -hez, miből folyik, hogy az $O\mathfrak{A}$ és az \vec{OA} egy egyenesben fekszenek.



81. ábra.

Vegyük most fel, hogy a hodograph is centrális görbe, és vizsgáljuk meg, mily feltételek mellett lehetséges ez.

Ha a hodograph centrális görbe, akkor reá nézve ugyanoly megfontolások érvényesek, mint a pályára nézve, akkor ugyanis

(megfelelőleg az \vec{OA} és \vec{AB} közötti összefüggésnek) az \vec{OA} és az \vec{AB} irányok egymáshoz *párhuzamosak*, azaz, az \vec{AB} érintő párhuzamos az \vec{AB} érintőhöz, (de vele ellenkező irányú), és az $(OAB) \angle$ szög egyenlő az $(OAB) \angle$ szöggel.

Ennek értelmében a pálya és a hodographnak a hodographja azon tulajdonsággal bírnak, hogy megfelelő pontjai az O ponton átmenő AM egyenesen, az O két oldalán *hasonlóan* fekszenek és a pálya meg a másodrendű hodograph hasonló görbék.

Ebből következik, hogy a mozgás közben \vec{OA} mindig *proportionalis* az \vec{OA} -val.

E szerint, tekintettel a vectorok sajátságára: a *centrális pálya hodographja csak akkor lesz szintén centrális görbe, a midőn a gyorsulás az eredeti radius vectorral egyenesen proportionális.*

117. §. COTES (1682—1716) spirálisai. A gyorsulás a távolság harmadik hatványával fordítva arányos.

Legyen :

$$R(r) = \frac{K}{r^3} = Ku^3, \quad (1)$$

hol $K = +C^2$, a szerint, a mint a gyorsulás tasztító vagy vonzó.

A pálya differentiális egyenlete itt [74. §. (1)]:

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u + \frac{K}{c^2} u = 0 \quad (2)$$

melyből [a 92. §. (2) formulája szerint] :

$$\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2 + \left(1 + \frac{K}{c^2}\right) u^2 = k \quad (3)$$

hol k az integráció állandója.

A sebesség általános formulája [74. (5)] itt a (3)-ból:

$$v^2 = c^2 k - \frac{K}{r^2} \quad (4)$$

Az egyenlet bal oldala absolute positiv lévén, egyidejűleg nem lehet a k negativ és a K positiv.

E szerint jelenleg a következő három eset lehetséges és különböztetendő meg:

1. K positiv; ekkor k -nak is *positivnak* kell lennie.
2. K negativ; ekkor lehet a) k positiv, vagy b) k negativ.

Az *apsis*-vonalak meghatározása céljából a v_r radiális sebességet fejezzük a 74. §. (4) és a jelen §. (4) formulájából:

$$v_r^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = r^2 - \frac{c^2}{r^2} = kc^2 - \frac{K+c^2}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Az *apsis* vonalakban $v_r=0$; ezért az r -nek hozzátartozó értékei az (5)-ből:

$$r_m^2 = \frac{kc^2}{K+c^2}; \quad r_m = \pm c \sqrt{\frac{k}{K+c^2}} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Az r_m csak pozitív lehet, ezért a *felső* előjel érvényes; *apsis*-vonal pedig csak reális r_m mellett léphet fel, marad az egyértékű:

$$r_m = c \sqrt{\frac{k}{c^2 + K}}$$

és így a pálya legfeljebb csak *egy* *apsis*-vonallal bír, mely fellép, ha egyidejűleg:

$$\left. \begin{array}{l} k \text{ pozitív} \\ c^2 + K \text{ pozitív} \end{array} \right\} \quad \text{vagy:} \quad \left. \begin{array}{l} k \text{ negatív} \\ c^2 + K \text{ negatív} \end{array} \right\}.$$

A c^2 és v_r^2 számára talált (4) és (5) kifejezésekből a pálya véges vagy végtelen kiterjedésére nézve következtetést vonhatni.

1. Ha K pozitív, $K=+C^2$, akkor (5) szerint a pályának van *apsis*-vonala és r nem lehet kisebb mint r_m , mert különben v_r^2 negatív lenne, a mi lehetetlen; ezért r_m a *legkisebb* távolság.

Az r_m -től kezdve az r növekedhetik a végtelenbe; eközben v^2 és v_r^2 is növekszik és véges (közös) határértékük $v_{r=\infty}^2 = c^2 k$.

Szóval: ezen esetben a pálya a centrumon nem mehet keresztül és a végtelenbe terjed.

2a. Ha K negatív, $K=-C^2$ és e mellett k pozitív, akkor a (4)-ből: $v^2 = c^2 k + C^2 r^{-2}$, melyben az r változhatik a zérustól a végtelenig, a nélkül, hogy a jobb oldal előjele változnék. *Apsis*-vonal a (6) szerint csak akkor lesz, ha itt $(c^2 - C^2)$ pozitív.

Szóval: ezen esetben a pálya átmegegyen a mozgás centrumán és a végtelenbe terjed.

2b. Ha K negatív, $K=-C^2$ és e mellett k negatív, $k=-h^2$, akkor (4)-ből a sebesség négyzete $v^2 = -c^2 h^2 + C^2 r^{-2}$, mely kifejezésben az r^2 nem növekedhetik az $r_{v=0}^2 = c^2 h^2 C^{-2}$ értéken túl, mivel különben az egyenlet jobb része negatív lenne, a mi ismét lehetetlen.

De az r fogyhat a zérus felé, a nélkül, hogy a v^2 előjelét változtatná.

Apsis-vonal a (6) szerint itt csak akkor lesz, a mikor $c^2 - C^2$ negatív.

Szóval: ezen esetben a pálya a mozgás centrumán megegyen keresztül, de csak véges távolságra terjedhet.

118. §. COTES spirálisai. Folytatás. A pálya differentiálegyenletének integrációja.

A pálya egyenletének első integrálja a megelőző §. (3) egyenlete szerint írható:

$$d\vartheta = \frac{cdu}{\sqrt{-(K+c^2)u^2+c^2k}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

A további integráció lényegesen függ a $K+c^2$ előjelétől; megjegyzendő, hogy az idézett egyenlet értelmében a gyök alatt lévő mennyiség mindenkor csak absolute positiv lehet.

Ez a körülmény arra figyelmeztet, hogy az egyes esetek tárgyalását ne az általános K állandó, hanem a $K+c^2$ állandó összeg előjele szerint különítsük el (ettől tegyük függővé); mert az (1) egyenlet értelmében bizonyos határértékek között, (melyek között $(K+c^2)$ összeg még positiv előjelű, míg a K lehet positiv, de lehet még 0-tól c^2 -ig negativ értékű) a vonzó és a taszító gyorsulás által létesített pályák egyenlő jellegűek.

1. Első főeset: $K+c^2$ negativ; legyen $K+c^2 = -H_1^2$.

Ekkor (1)-ből:

$$d\vartheta = c \frac{du}{\sqrt{H_1^2 u^2 + c^2 k}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

miből [Math. repertorium 107. §-ának (15) formulája]:

$$\vartheta = \frac{c}{H_1} \lg (uH_1 + \sqrt{H_1^2 u^2 + c^2 k}) + \text{constans.}$$

Alkalmazva az egyenletet a kezdő állapotra, t_0 , ϑ_0 , r_0 értékekre, mivel $u = \frac{1}{r}$,

$$\frac{H_1}{c} (\vartheta - \vartheta_0) = \lg \left(\frac{r_0}{r} \cdot \frac{\sqrt{H_1^2 + c^2 k r^2} + H_1}{\sqrt{H_1^2 + c^2 k r_0^2} + H_1} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

a pálya egyenlete.

Rövidség kedvéért tételessék:

$$\left. \begin{aligned} \frac{H_1}{c} &= \mu \\ \frac{1}{r_0} e^{-\mu \vartheta_0} [\sqrt{H_1^2 + c^2 k r_0^2} + H_1] &= A \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

ekkor a (3)-ból:

$$\sqrt{H_1^2 + c^2 k r^2} + H_1 = A r e^{\mu \vartheta},$$

avagy explicite:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2AH_1} \{ -c^2 k e^{-\mu \vartheta} + A^2 e^{+\mu \vartheta} \} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Differentiálva (5)-öt t szerint és tekintetbe véve, hogy: $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{c} \frac{d\vartheta}{dt}$,

$$v_r = \frac{dr}{dt} = -\frac{c\mu}{2AH_1} \{c^2 k e^{-\mu\vartheta} + A_1^2 e^{+\mu\vartheta}\} \quad (6)$$

Az (5) egyenlet további tárgyalásánál a esetek különböztetendők meg.

1a. *Első eset*: k pozitív, legyen: $c^2 k = +h_1^2$; továbbá az A állandó a (4)-ben szintén pozitív, értéke legyen A_1 .

Az (5) és (6)-ból:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2A_1H_1} \{-h_1^2 e^{-\mu\vartheta} + A_1^2 e^{+\mu\vartheta}\} \quad (5a)$$

$$v_r = \frac{dr}{dt} = -\frac{c\mu}{2A_1H_1} \{h_1^2 e^{-\mu\vartheta} + A_1^2 e^{+\mu\vartheta}\} \quad (6a)$$

A (6a) jobb oldalának negatív előjele mondja, hogy növekedő t mellett az r fogy és viszont; ezenkívül a v_r soha sem lesz zérus; azért *nincs apsis-vonal*.

Továbbá az (5a) szerint $r=0$ értékhez $\vartheta = +\infty$ tartozik; a pálya ezért a mozgás centrumán megyen keresztül, de mielőtt eléri, végtelen sokszor megkerüli azt.

Az r növekedvén 0-tól $+\infty$ -ig, a ϑ fogy a $+\infty$ értéktől kezdve egészen azon ϑ_∞ értékig, melynél az $\frac{1}{r}$ értéke zérus; a ϑ_∞ feltétele (5a)-ból:

$$h_1^2 e^{-\mu\vartheta_\infty} - A_1^2 e^{+\mu\vartheta_\infty} = 0, \quad \text{azaz} \quad e^{\mu\vartheta_\infty} = \pm \frac{h_1}{A_1} \quad (7)$$

Itt csak a pozitív előjel lehet érvényes.

A pályának a centrumtól távolabban fekvő részére nézve a ϑ egy állandó érték felé közeledik, és ezért maga a pálya is asymptotice közeledik a ϑ_∞ irányú egyeneshez.

Ezen egyenes *iránya* igen alkalmas arra, hogy a ϑ szögeket tőle számítsuk; e végből rövidség kedvéért a (7) egyenlő értékű menynyiségeit írva:

$$\frac{A_1^2 e^{\mu\vartheta_\infty}}{A_1 H_1} = \frac{1}{a} = \frac{h_1^2 e^{-\mu\vartheta_\infty}}{A_1 H_1} \quad (8)$$

és a pálya (5a) egyenletét a -val szorozva, származik:

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{2} \{-e^{-\mu(\vartheta - \vartheta_\infty)} + e^{+\mu(\vartheta - \vartheta_\infty)}\} \quad (9)$$

Az a geometriai jelentése abból következik, hogy $r \sin(\vartheta - \vartheta_\infty)$ az r , ϑ pályapontnak távolságát jelenti a ϑ_∞ irányú, a kezdőponton átmenő egyenestől (82. ábra).

Minél inkább közeledik a ϑ szög a ϑ_∞ határértékhez, annál inkább közeledik az $r \sin(\vartheta - \vartheta_\infty)$ szorzat az asymptotusnak a centrumtól való távolságához, azaz: $\lim_{\vartheta \rightarrow \vartheta_\infty} [r(\vartheta - \vartheta_\infty)] = \overline{BO}$ (82. ábra).

Másfelől a (9) egyenlet, igen kicsiny $(\vartheta - \vartheta_\infty)$ értékekre nézve az $e^{\pm\lambda} = 1 \pm \lambda + \lambda^2 \pm \lambda^3 + \dots$ séma értelmében a következő kifejezésre redukálódik:

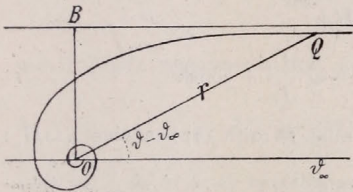
$$a = -r\mu(\vartheta_\infty - \vartheta),$$

miből folyik, hogy $\frac{a}{\mu}$ az asymptotának a mozgás centrumától való távolsága (82. ábra).

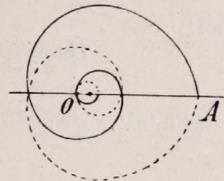
Ha írjuk $\vartheta - \vartheta_\infty = \eta$, hol η az asymptota és az r által bezárt szög,

$$\text{akkor:} \quad \frac{a}{r} = \frac{1}{2} \{ e^{+\mu\eta} - e^{-\mu\eta} \} \quad (9a)$$

a pálya egyenlete, hol: $0 < \eta < +\infty$, vagy $0 > \eta > -\infty$.



82. ábra.



83. ábra.

1b. Második aleset: k negatív; legyen $c^2k = -h_2^2$; az A állandó a (4)-ben még mindig pozitív, értéke legyen A_2 .

Az (5)-ből és (6)-ból:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2A_2H_1} \{ h_2^2 e^{-\mu\vartheta} + A_2^2 e^{+\mu\vartheta} \} \quad (5b)$$

$$v_r = \frac{dr}{dt} = -\frac{c\mu}{2A_2H_1} \{ -h_2^2 e^{-\mu\vartheta} + A_2^2 e^{+\mu\vartheta} \} \quad (6b)$$

A v_r a (6b) szerint lehet zérus is; a pályának van apsis-vonala; jelezze ϑ_a az ezen apsishez tartozó szöget; akkor (6b)-ből:

$$e^{\mu\vartheta_a} = \pm \frac{h_2}{A_2} \quad (10)$$

Itt is csak a pozitív előjel lehet érvényes.

Az apsis-vonal hosszát, $r_a = a - t$, nyerjük, ha ϑ_a (10) értékét teszszük az (5b)-be; ez által:

$$\frac{1}{a} = \frac{h_2}{H_1} \quad (11)$$

Szorozva az (5b)-t a (11) reciprok értékével, a pálya egyenlete:

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{2} \{ +e^{-\mu(\vartheta - \vartheta_a)} + e^{+\mu(\vartheta - \vartheta_a)} \} \quad (12)$$

Ha írjuk $\vartheta - \vartheta_0 = \eta$, hol η az apsis és az r által bezárt szög, akkor

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{2} \{ e^{+\mu\eta} + e^{-\mu\eta} \} \quad (12a)$$

a pálya egyenlete, hol $-\infty < \eta < +\infty$.

Ezen egyenlet szerint az r egyenlő értékű pozitív és negatív η -kra nézve ugyanazon abszolút értéket veszzen fel, azaz a görbe az apsis-vonal két oldalán szimmetrikusan fekszik (83. ábra).

Itt a pálya szintén átmegy a mozgás centrumán; $r=0$ -nak megfelelően $\eta=\infty$ vagy $\vartheta=\infty$; e pálya a centrumot végtelen sokszor megkerüli, mielőtt azt eléri (83. ábra).

1c. Harmadik eset. A k zérus, azaz $k=0$.

Ezen esetben (5)-ből, de még a pálya differenciálegyenletének első integráljából, (1)-ből is indulhatunk ki, mely itt:

$$d\vartheta = c \frac{du}{H_1 u},$$

miből:

$$\frac{H_1}{c} \vartheta = \lg u + \text{const.} = \lg \left(\frac{1}{r} \right) + \text{const.}$$

Eliminálva a constanst ϑ_0 és r_0 által, és mint (4)-ben téve $\mu = H_1 : c$,

$$\mu(\vartheta - \vartheta_0) = \lg \left(\frac{r_0}{r} \right);$$

írva még:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{r_0} e^{-\mu\vartheta_0} \quad (13)$$

a pálya egyenlete:

$$r = a e^{-\mu\vartheta} \quad (14)$$

Ez közönséges *logarithmusos spirális* képvisel, melynél a $\vartheta=0$ -nak az $r=a$ távolság felel meg; apsis itt nincs.

1d. Negyedik eset, a H_1 zérus és k pozitív: $H_1=0$; legyen $c^2 k = +h_1^2$.

A pálya egyenletének első integrálja, (1) itt:

$$d\vartheta = c \frac{du}{h_1},$$

ebből:

$$\vartheta = \frac{c}{h_1} u + \text{const.} = \frac{c}{h_1} \cdot \frac{1}{r} + \text{const.}$$

avagy, a kezdő állapot jellemzőivel:

$$\frac{h_1}{c} (\vartheta - \vartheta_0) = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}.$$

Írjunk:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \vartheta - \vartheta_0 + \frac{c}{h_1} \frac{1}{r_0} \\ a &= \frac{h_1}{c} \end{aligned} \right\}; \quad (15)$$

ered

$$\frac{1}{r} = a\eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Ez a *reciprok* (viszszás) vagy *hyperbolás spirális* egyenlete; az $\eta=0$ szögnek $r=\infty$ felel meg, mely szög az asymptotus irányát adja meg. A pálya az $r=0$ kezdőponton is megyen át; ezt pedig, mielőtt eléri, a mozgó pont számtalanszor kerüli meg, $r=0$ és $\vartheta=\infty$ egymáshoz tartozók lévén; apsis itt nincs.

2. *Második főeset*: A $K+c^2$ *positiv*; ekkor megelőző §. (5) egyenlete szerint a k csak *positiv* lehet; azaz $K+c^2=+H_2^2$, $c^2k=+h_1^2$.

Ekkor a pályaequation első integrálja (1):

$$d\vartheta = \frac{cd\eta}{\sqrt{h_1^2 - H_2^2 \eta^2}},$$

miből [Math. repertorium 107. §-ának (17) formulája]:

$$\vartheta = \frac{c}{H_2} \arcsin\left(\eta \frac{H_2}{h_1}\right) + \text{const.},$$

vagy az r_0 -át és ϑ_0 -át véve tekintetbe:

$$\frac{H_2}{c} (\vartheta - \vartheta_0) = \arcsin\left(\frac{1}{r} \frac{H_2}{h_1}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{r_0} \frac{H_2}{h_1}\right)$$

Írjunk rövidség kedvéért:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_0 - \frac{c}{H_2} \arcsin\left(\frac{1}{r_0} \frac{H_2}{h_1}\right) &= \eta_0; \\ \frac{H_2}{h_1} &= a; \quad \frac{H_2}{c} = \mu; \quad \vartheta - \eta_0 = \eta, \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

származik:

$$r \sin \mu \eta = a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

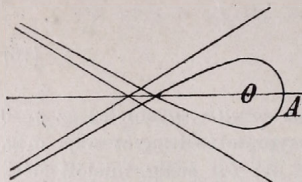
A görbe *nem* mehet a mozgás centrumán keresztül, mert *nincs* oly *sinus*, melynek *zérussal* való szorzata az a -t adná, ellenben a görbe asymptotussal bír, mivel $r=\infty$ -nek az $\eta=0$ és $\vartheta=\eta_0$ felel meg.

De a radiális sebesség a

$$\frac{dr}{dt} \sin \mu \eta + r \mu \frac{d\eta}{dt} \cos \mu \eta = 0$$

egyenletből adódik, ha benne teszszük (17) szerint:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= \frac{d\vartheta}{dt} \quad \text{és írjuk:} \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{c}{r^2}, \\ \frac{dr}{dt} &= -\frac{c\mu}{r} \cotg(\mu\eta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19) \end{aligned}$$



84. ábra.

Itt apsis-vonal is van és pedig a $\mu\eta = \frac{1}{2}\pi$, $r=a$ egymáshoz tartozó értékek mellett.

A (18) szerint ez az $r=a$ a távolság legkisebb értéke.

Az r és a mindig pozitív értékek lévén, a (18) szerint a $\mu\eta$ szög értéke csak 0 és π között lehet; ezen határértékek mellett az r végtelen nagy és e

szerint $\pi\mu^{-1}$ az η vagy a ϑ teljes változásának a szöge, azaz az a szög, melyet a pálya két asymptotája egymással képez (84. ábra) és így a görbe nem lehet zárt vonal.

A görbe az $\eta = \frac{1}{2}\pi\mu^{-1}$ irányú apsis-vonalhoz symmetrikusan fekszik. Ha $\mu > \frac{1}{2}$, akkor a görbe önnönmagát nem metszi; de ha $\mu < \frac{1}{2}$, akkor a görbe két ága egymást és pedig mindig az apsis-vonalban metszi, mivel az ily metszéspontokra nézve a (18) szerint:

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\mu} \pm \pi; \quad \frac{1}{2} \frac{\pi}{\mu} \pm 2\pi; \dots; \quad \frac{1}{2} \frac{\pi}{\mu} \pm n\pi,$$

hol n az a legnagyobb egész szám, mely mutatja, hányszor foglaltatik a 2μ az 1-ben.

Az egymásra következő metszéspontok felváltva a mozgás centruma egyik és másik oldalán fekszenek.

Egy ily metszésponttal bíró görbét a 84. ábra tüntet elő.

119. §. COTES spirálisai, a pályák egyenleteinek egyenes levezetése.

Ha a származó pályáknak csak alakját kívánjuk nyerni: a pálya differenciálegyenletének közvetlen integrációja vezet célhoz.

Az egyenlet általánosságban [74. §. (7)]:

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u + \frac{R(r)}{c^2 u^2} = 0 \quad \dots \quad (1)$$

Itt $R(r) = Kr^{-3} = Ku^3$; (1)-ből:

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + \left(1 + \frac{K}{c^2}\right)u = 0 \quad \dots \quad (2)$$

Az $\left(1 + \frac{K}{c^2}\right)$ összeg állandó; ennek előjele a K előjelétől és értékeitől függ.

Rövidség kedvéért legyen:

$$1 + \frac{K}{c^2} = N \quad \dots \quad (3)$$

és a (2)-ből:

$$\left. \begin{aligned} v^2 &= c^2 k - \frac{1}{2} K \lg u \\ v^2 &= c^2 k + \frac{1}{2} K \lg r \end{aligned} \right\} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (4)$$

Az egyenlet bal és így jobb oldala is *positiv* lévén, a k és K állandók nem lehetnek egyszerre negativek, hanem csak a következő esetek lehetségesek: 1. $K=+C^2$ és 1a) k *positiv*, vagy 1b) k *negativ*; 2. $K=-C^2$ és k *positiv*.

Mivel a 74. §. (5) szerint a $v_r^2=(dr:dt)^2=v^2-c^2r^{-2}$, a (4) adja:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2} K \lg r + c^2(k - \frac{1}{r^2}) \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

A baloldali és ezért jobboldali összeg is csak *positiv* lehet.

Az r_m apsis-távolság feltételi egyenlete az (5)-ből:

$$\frac{c^2}{r_m^2} + \frac{1}{2} K \lg \left(\frac{1}{r_m}\right) = c^2 k \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

1a. Ha $K=+C^2$ és $k=k$ *positiv*, akkor (4) szerint r nem lehet zérus és így a pálya nem mehet a centrumon át; de $r=\infty$ értéknek a (4) megfelel, és így a pálya a végtelenbe terjed.

A (6) egyenlet itt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r_m^2} + \frac{C^2}{c^2} \lg \left(\frac{1}{r_m}\right) &= k, \\ u_m^2 e^{\frac{c^2}{C^2} u_m^2} &= e^{\frac{c^2}{C^2} k} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (6a)$$

vagy, mivel $u_m^{-1}=r_m$:

Az egyenlet transcendens; gyöke nem nyerhető véges alakban; csak egy gyöke van, mert bal oldala az u növekedésével csak növekszik; a pályának e szerint csak egy apsis-vonala van; r_m a legkisebb vezérsugár.

Továbbá (4) és (5)-ből itt: $[v^2:r^2]_{r=\infty}=1$, azaz, végtelen távolságban a mozgás csak r mentén történvén, a pályának asymptotusa van.

1b. Ha $K=+C^2$ és $k=-k$ *negativ*, akkor az 1a. alatt tett megjegyzések érvényesek, de az apsis-távolság egyenlete itt:

$$u_m^2 e^{\frac{c^2}{C^2} u_m^2} = e^{-\frac{c^2}{C^2} k} \quad . \quad . \quad . \quad (6b)$$

mely szintén csak egygyökű; ezért e pályának is csak egy apsidvonalas és egy asymptotusa van.

2. Ha $K=-C^2$, akkor $k=k$ csak *positiv* lehet, és (4) szerint r zérus is lehet, míg v^2 akkor ∞ , azaz a pálya itt a centrumon megyen át; de az $r=\infty$ érték lehetetlen, mivel akkor (4) szerint v^2 lenne $-\infty$; a pálya e szerint csak véges kiterjedésű lehet.

A (6) egyenlet ezen esetben:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r_m^2} - \frac{C^2}{c^2} \lg \left(\frac{1}{r_m}\right) &= k, \\ u_m^2 e^{-\frac{c^2}{C^2} u_m^2} &= e^{-\frac{c^2}{C^2} k} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (6_2)$$

vagy:

A bal oldal alakja xe^{-ax} ; ennek értéke $x=0$ -tól kezdve a zérustól növekszik az $(ae)^{-1}$ értékig (mely $x=a^{-1}$ -nél lép fel) és azután fogy a zérus felé.

E szerint, ha áll:

$$\left(\frac{c^2}{C^2}e\right)^{-1} > e^{-\frac{c^2}{C^2}k},$$

akkor a (6₂) egyenletnek van és pedig két reális gyöke, mely az = jel esetében egygyé olvad; ezért a pályának itt két *apsis-vonala* van; de, ha

$$\left(\frac{c^2}{C^2}e\right)^{-1} < e^{-\frac{c^2}{C^2}k},$$

akkor egyáltalában nincs *apsis*.

A (3) vagy (5) egyenlet általánosságban véve nem integrálható tovább; de az 1a., 1b., 2. esetek részletes megvizsgálását az olvasónak ajánljuk.

121. §. *A centrális mozgás egyenlete, ha a pálya a körtől csak kevéssé különbözik.*

I. Ha a pálya oly kör, melynek középpontja a mozgás centruma és sugara a , akkor $r=a$, $u=a^{-1}=b=\text{constans}$ és a pálya általános differenciálegyenletében:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u + \frac{R(r)}{c^2u^2} = 0 \quad (1)$$

az első tag zérus és marad:

$$R_{r=a} = -c^2a^{-3} = -c^2b^3 = R(a), \quad (2)$$

miből folyik, hogy körpálya esetében állandó u mellett R is állandó, azaz itt R csak az u függvénye lehet.

Ha a pont bármily oknál fogva a körből csak kevéssé kimozdítatik, a távolság reciprok értéke írható:

$$u = b + w = a^{-1}(1 + aw), \quad (3)$$

hol w igen kicsiny legyen a b -hez képest; ekkor az (1) egyenlet:

$$\frac{d^2(b+w)}{d\theta^2} + (b+w) + \frac{R[a(1+aw)^{-1}]}{c^2(b+w)^2} = 0, \quad (4)$$

melyben az R az utána következő $[\]$ argumentum függvénye.

Kifejtve a (4) utolsó tagját TAYLOR sora, illetve NEWTON binomiális tétele szerint a w első hatványáig bezárólag, levonva belőle a (2)-t és rövideg kedvéért téve:

$$1 - 2 \frac{R(a)}{c^2 b^3} - \frac{1}{c^2 b^4} \left(\frac{dR}{dr} \right)_{r=a} = \pm \omega^2, \quad \dots \quad (5)$$

hol ω állandó, a (4) egyenletből:

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} \pm \omega^2 w = 0 \quad \dots \quad (6)$$

mely a köralaktól kevésé eltérő mozgás differenciálegyenlete.

Integrálja a 92. és 95. §§. szerint azonnal felírható:

1. ha (5) pozitív:

$$w = A \cos(\omega\theta + \alpha) \quad \dots \quad (7_1)$$

2. ha (5) negatív:

$$w = C_1 e^{\omega\theta} + C_2 e^{-\omega\theta} \quad \dots \quad (7_2)$$

hol A és α , illetve C_1 és C_2 az integráció állandói és $r = u^{-1} = (b + w)^{-1} = a(1 + aw)^{-1}$.

1. Az első esetben a pont mintegy görbített hullámvonalat ír le, mely a $b^{-1} = a$ sugarú kört több helyen metszi; a vonalnak a körön kívül és belül fekvő részei váltakozva következnek egymásra és a pálya minden időben periodusosan ismétlődő, a körhöz simuló részekből áll.

[Ez a körmozgás *stabilis* (maradandó)].

2. A második esetben a pont mindinkább eltávolodik a körtől és soha sem tér vissza hozzá.

[Ez a körmozgás *labilis* (mulékony)].

II. Ha $R(r)$ a távolság valamely hatványával arányos, $R(r) = Kr^n = Ku^{-n}$, akkor az (5) szerint:

$$\pm \omega^2 = 1 + \frac{K}{c^2 b^{n+3}} (n+2);$$

ebben a (2)-ből: $R(a) = Kb^{-n} = -c^2 b^3$ helyettesítést végezve, marad:

$$\pm \omega^2 = 3 + n \quad \dots \quad (8)$$

1. A körmozgás *stabilis*, ha:

$$3 + n > 0, \text{ vagy } n > -3.$$

2. A körmozgás *labilis*, ha:

$$3 + n < 0, \text{ vagy } n < -3.$$

Az első esetben a (7₁) egyenlet a pályának a körrel való metsző-pontjai szögtávolságát ($\pi : \sqrt{n+3}$) értékkel adja meg.

Ha $\sqrt{n+3}$ egész szám, a mozgás az alatt ír le teljes periodust, a mi közben θ szög 2π -vel változik; ha $\sqrt{n+3}$ racionális szám, akkor a periodus szöge $2\pi \cdot \sqrt{n+3}$ értékű, hol r a legkisebb szám, mely $\sqrt{n+3}$ -vel szorozva, egész számot ad; végre ha $\sqrt{n+3}$ irracionális, nincs periodus.

A kezdőnek az ily mozgás speciális példáinak teljes számítása és graphikái előtüntetése nagyon ajánlandó.

122. §. *A gyorsulás egyik része a távolság négyzetével, másik része köbével fordítva arányos.*

Legyen
$$R = \frac{K}{r^2} + \frac{L}{r^3} = Ku^2 + Lu^3 \quad (1)$$

1. A mozgás egyenlete a 74. §. (7) kifejezése szerint:

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + \left(1 + \frac{L}{c^2}\right)u + \frac{K}{c^2} = 0 \quad (2)$$

Írva:

és
$$\left. \begin{aligned} \left(1 + \frac{L}{c^2}\right)z &= \left(1 + \frac{L}{c^2}\right)u + \frac{K}{c^2} \\ 1 + \frac{L}{c^2} &= \Omega \end{aligned} \right\} (3)$$

a (2)-ből:

$$\frac{d^2z}{d\vartheta^2} + \Omega z = 0 \quad (2a)$$

1. Ha $\Omega = +\omega^2$, akkor a 95. §. szerint:

$$z = A_1 e^{i\omega\vartheta} + A_2 e^{-i\omega\vartheta}; \quad \frac{1}{r} = -\frac{K}{c^2 + L} + z \quad . . . (4a)$$

2. Ha $\Omega = -\omega^2$, akkor a 92. §. szerint:

$$z = A_1 \cos(\omega\vartheta) + A_2 \sin(\omega\vartheta); \quad \frac{1}{r} = -\frac{K}{c^2 + L} + z \quad . . . (4b)$$

Továbbá 92. §. 1. pontja szerint a (2a)-ból:

$$\left(\frac{dz}{d\vartheta}\right)^2 + \Omega z^2 = k, \quad (5)$$

hol k az integráció állandója, és mivel itt a (3)-ból $\frac{dz}{d\vartheta} = \frac{du}{d\vartheta}$, a sebesség négyzete [74. §. (5)]:

$$v^2 = c^2 \left\{ \left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2 + u^2 \right\} = c^2 [k - \Omega z^2 + u^2]$$

vagy a (3) tekintetbe vételével:

$$v^2 = kc^2 - Lu^2 - 2Ku - \frac{K^2}{\Omega c^2} = kc^2 - \frac{K^2}{c^2 + L} - \frac{L}{r^2} - 2\frac{K}{r} \quad . . . (6)$$

Ezenkívül az $r^2 d\vartheta = c dt$ -ből $d\vartheta = u^2 c dt$, azaz a (3) értelmében:

$$t = \frac{(c^2 + L)^2}{c} \int \frac{d\vartheta}{[(c^2 + L)z - K]^2}, \quad (7)$$

melybe z számára a (4a) vagy a (4b) helyetteszendő.

A további általános tárgyalásokat és integrációkat az olvasóra bízunk.

2. A sok lehetséges eset közül egy speciálisat, kivételeset emelünk ki (melyet FUHRMANN: Aufgaben aus d. anal. Mechanik, II, 82. sz. a. is említ) melyben:

$$K = -C^2; \quad L = -\frac{1}{2}K^2 = -\frac{1}{2}C^4;$$

továbbá, a kezdő állapotra nézve álljon: az a távolságban, melynek irányától a ϑ -t számítjuk, a v_0 sebesség merőleges az a -ra és $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{C^2}{a}$ értékű, míg itt $\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)_a = 0$; $\left(\frac{dr}{dt}\right)_a = 0$; $\left(r^2 \frac{d\vartheta}{dt}\right)_a = c$ és végre $v_0 = v_a = \left(r \frac{d\vartheta}{dt}\right)_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{C^2}{a}$.

Az utóbbi két összefüggésből:

$$a \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_a = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{C^2}{a},$$

azaz:

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}} C^2 \quad (8)$$

Az Ω itt:

$$\Omega = 1 + \frac{L}{c^2} = \frac{1}{c^2} (c^2 - \frac{1}{2}C^4) = 0,$$

miáltal a (6) és (7) kifejezések hasznavehetetlenek, míg a (2) redukálódik a

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} = \frac{2}{C^2} \quad (9)$$

alakra, melyből egyenes quadraturával:

$$u = \frac{1}{r} = \frac{\vartheta^2}{C^2} + b_1\vartheta + b_0, \quad \frac{du}{d\vartheta} = \frac{2}{C^2}\vartheta + b_1.$$

Mivel $r=a$, $\vartheta=0$, $(du:d\vartheta)=0$ egymáshoz tartozók, nyerjük $b_0=1:a$; $b_1=0$ és így:

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{\vartheta^2}{C^2}; \quad \text{vagy} \quad r = \frac{C^2 a}{C^2 + a\vartheta^2} \quad (10)$$

vagy végre:

$$\vartheta^2 = C^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (10a)$$

A pálya a $\vartheta=0$ apsis-vonalhoz symmetrikusan fekszik és kagyló-szerűen csavarodik a centrum körül, melyet csak végtelen számú forgás után ér el, mint COTES spirálisainál [118. §. 83. ábra 217. l.].

A sebesség szerkesztésére nézve (10)-ből:

$$\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2 = \left(\frac{2}{C^2}\vartheta\right)^2 = \frac{4}{C^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right); \quad u^2 = \frac{1}{r^2};$$

vagy a (8) tekintetbe vételével:

$$v^2 = c^2(u^2 + (\frac{du}{d\vartheta})^2) = 2C^2 \left\{ \frac{C^2}{4r^2} + \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right\} \quad (11)$$

Az idő és a koordináták között az összefüggést az $r^2 d\vartheta = c dt$ -ből és (10a)-ból nyerjük:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{C^2}{r^2 \vartheta} \cdot \frac{dr}{dt}, \quad \text{vagy} \quad r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = c = -\frac{1}{2} \frac{C^2}{\vartheta} \frac{dr}{dt},$$

és így (10a) és (8) szerint:

$$dt = -\frac{1}{2} \frac{C}{c} \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}}} = -\frac{\sqrt{a}}{C\sqrt{2}} \frac{r dr}{\sqrt{ar - r^2}}$$

Ebből [a Math. repertorium 107. §. 33. és 31. formuláit alkalmazva], ha még tesszük $r=a$, $t=0$:

$$t = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{1}{2} a} \left\{ \sqrt{ar - r^2} + \frac{1}{2} a \left(\pi - \arccos \left(\frac{a-2r}{a} \right) \right) \right\} \quad (12a)$$

Az idő, mely alatt a pont $r=a$ -tól a centrumba érkezik:

$$T = \frac{\pi a}{C} \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{2}} \quad (12b)$$

123. §. A centrális gyorsulás törvénye, midőn a mozgás KEPLER törvényei szerint történik.

KEPLER csillagászati megfigyeléseiből a következő tapasztalati törvényeket állapította meg:

1. A planeták (bolygók) a nap körül ellipsiseket írnak le, melyek egyik gyújtójában a nap van.

2. A bolygóknak a naptól vont vezérsugarai az idővel egyenesen arányos területeket írnak le.

3. Az egyes bolygók keringési idejeinek négyzetei úgy aránylanak egymáshoz, mint pályáik nagy tengelyeinek köbei.

A második törvény centrális gyorsulásra vall, a centrum a nap középpontja.

I. Az ellipsis egyenlete a gyújtó ponttól (centrumtól) számított polárkoordinátákban [math. repertorium 64. §-ának (7) és (4) formulái]:

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \vartheta} = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \vartheta} \quad (1)$$

Ebből:

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{p} (1 + \varepsilon \cos \vartheta) = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p} \cos \vartheta,$$

A sebesség:

$$\begin{aligned} v^2 &= c^2 \left(\frac{du}{d\vartheta} \right)^2 + u^2 = c^2 \frac{\varepsilon^2 \sin^2 \vartheta}{p^2} + \frac{c^2}{r^2} \\ &= \frac{c^2}{p^2} \varepsilon^2 \sin^2 \vartheta + \frac{c^2}{p^2} (1 + 2\varepsilon \cos \vartheta + \varepsilon^2 \cos^2 \vartheta) \\ &= \frac{c^2 \varepsilon^2}{p^2} - \frac{c^2}{p^2} + \frac{2c^2}{pr} \end{aligned}$$

végre

$$v^2 = \frac{2c^2}{p} \cdot \frac{1}{r} - \frac{c^2}{p^2} (1-\epsilon^2) (5)$$

mely egyenlet szintén valamenynyi kúpszeletre nézve érvényes.*

124. §. *A pálya alakja és a mozgás centruma adva van; keresesték a gyorsulás törvénye. Példák.*

Ha valamilyen centrális mozgás pályájának *alakja* ismeretes, a centrális gyorsulás törvényét úgy határozzuk meg, hogy a pálya adott egyenletéből a $\frac{d^2u}{d\vartheta^2}$ azaz a $\frac{d^2}{d\vartheta^2} \left(\frac{1}{r} \right)$ quotienst fejezzük ki, és ezt a pálya általános differenciálegyenletébe :

$$\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + u^2 + \frac{R(r)}{c^2 u^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

helyetteszve, az $R(r)$ függvényt, a keresett gyorsulást, nyerjük.

1. A mozgó pont BERNOULLI-féle lemniscáta-görbét ír le; a görbe csomópontja a mozgás centruma; mely függvénye a távolságnak a gyorsulás?

A görbe egyenlete [Math. repertorium, 65. §. 7. formulák]:

$$r_1 r_2 = a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

hol a az F_1 , F_2 fókuszokat egybekapcsoló egyenesnek fél hossza (85. ábra).

A görbe egyenletét a centrumra vonatkoztatott r és ϑ polár-
összrendezői által fejezzük ki.

Az AOF_1 és az AOF_2 háromszögekből:

$$r_1^2 = r^2 + a^2 + 2ra \cos \vartheta; \quad r_2^2 = r^2 + a^2 - 2ra \cos \vartheta.$$

Ebból:

$$r_1^2 r_2^2 = (r^2 + a^2)^2 - 4r^2 a^2 \cos^2 \theta, \quad (3)$$

* A bolygók és üstökösök mozgását a nap körül a dynamikában a tömegek tekintetbe vételével részletesen fogjuk tárgyalni.

azaz, (2) szerint:

$$a^4 = a^4 + 2r^2 a^2 + r^4 - 4r^2 a^2 \cos^2 \vartheta$$

vagy:

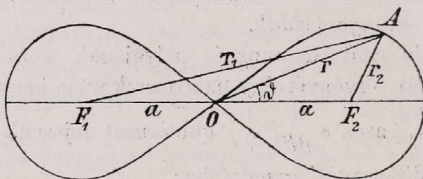
$$r = a\sqrt{2} \sqrt{\cos 2\vartheta} = u^{-1} \quad (4)$$

A (4)-ből:

$$\frac{du}{d\vartheta} = \frac{1}{a\sqrt{2}} \frac{d}{d\vartheta} [(\cos 2\vartheta)^{-\frac{1}{2}}] = + \frac{1}{a\sqrt{2}} \frac{\sin 2\vartheta}{(\cos 2\vartheta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{du}{d\vartheta} \quad (5)$$

Továbbá némi rövidítések után:

$$\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} = \frac{1}{a\sqrt{2} \sqrt{\cos 2\vartheta}} \left\{ \frac{3}{\cos^2 2\vartheta} - 1 \right\},$$



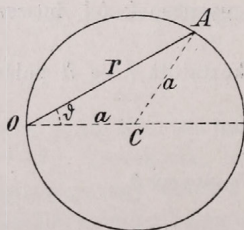
85. ábra.

avagy, mivel (4) szerint: $\sqrt{\cos 2\vartheta} = 1 : ua \sqrt{2}$

$$\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + u = +12a^4 u^5 \quad (6)$$

E szerint (1)-ből:

$$R(r) = -12a^4 c^2 u^7 = -12c^2 \frac{a^4}{r^7} \quad (7)$$



86. ábra.

A gyorsulás itt vonzó és a centrumtól való távolság *hetedik* hatványával fordítva arányos.

De viszont, ha azt a pályát számítanánk, mely az $R(r) = -\frac{C^2}{r^7}$ gyorsulásnak felel meg, általánosabb jellegű görbéket nyernénk, melyeknek egy speciális esete a nevezett lemniscáta.

2. A pálya kör, melynek kerületében van a mozgás centruma; milyen a gyorsulás?

Vonatkoztatva a kör egyenletét az O centrumra (86. ábra), az AOC háromszögből:

124. §. A gyorsulás, ha a pálya kerületi kör vagy $r^n = a^n \cos n\vartheta$ alakú. 231

$$r^2 = 2a^2 + a^2 \cos 2\vartheta$$

vagy:

$$r = 2a \cos \vartheta = u^{-1} \quad \dots \quad (8)$$

Továbbá:

$$\frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{du}{d\vartheta} = \frac{1}{2a} \frac{d}{d\vartheta} (\cos \vartheta)^{-1} = + \frac{1}{2a} \frac{\sin \vartheta}{\cos^2 \vartheta};$$

$$\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} = \frac{1}{2a \cos \vartheta} \left\{ -1 + \frac{2}{\cos^2 \vartheta} \right\}$$

vagy (8)-ből:

$$\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} = -u + 8a^2 u^3$$

Ennek helyetteszése (1) egyenletbe:

$$R(r) = -8a^2 c^2 u^5 = -8a^2 \frac{c^2}{r^5} \quad \dots \quad (9)$$

A gyorsulás *vonzó* és a távolság *ötödik* hatványával fordítva arányos.

Viszont: ez a kör az $R(r) = -\frac{C^2}{r^5}$ gyorsulásból folyó pályáknak csak speciális esete (v. ö. a 129. §. 10., 10a., 10b., 10c. feladatait).

3. *Általános eset: A mozgó pont pályája $r^n = a^n \cos n\vartheta$ egyenletű görbe, milyen a gyorsulás törvénye?*

Itt:

$$u = \frac{1}{a} (\cos n\vartheta)^{-\frac{1}{n}} \quad \dots \quad (10)$$

miből:

$$\frac{du}{d\vartheta} = + \frac{1}{a} \frac{\sin n\vartheta}{(\cos n\vartheta)^{(1+\frac{1}{n})}}$$

és némi rövidítések után:

$$\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} = - \frac{1}{a (\cos n\vartheta)^{\frac{1}{n}}} \left\{ -1 + \frac{1+n}{\cos^2 n\vartheta} \right\},$$

azaz:

$$\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} = -u + a^{2n} (1+n) u^{2n+1} \quad \dots \quad (11)$$

Az (1) egyenletből leszzen végre:

$$R(r) = -(1+n) a^{2n} c^2 \frac{1}{r^{2n+3}}, \quad \dots \quad (12)$$

mely eredmény általános és az n egyes értékeire vonatkozó értelmezését az olvasóra bízuk.

125. §. *A centrális gyorsulás a távolságnak és az iránynak a függvénye. Első példa. Kétféle eljárás.*

Legyen:

$$R = \frac{K}{r^2 \cos^3 \vartheta} = K \frac{u^2}{\cos^3 \vartheta} \quad (1)$$

hol r, ϑ a pont polárekoordinátái, míg x, y derékszögű összszerendezői, melyekre nézve áll:

$$r \cos \vartheta = x; \quad r \sin \vartheta = y.$$

1. A pálya általános differenciálegyenlete [74. §. (7)] itt:

$$\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + u + \frac{K}{c^2 \cos^3 \vartheta} = 0 \quad (2)$$

Ez az egyenlet a parameterek (állandók) variációja módszere segítségével oldható meg.*

* *Jegyzet a parameterek variációja (az állandók változtatása) módszerére nézre.*

Adva legyen a következő lineáris, másodrendű differenciálegyenlet:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + T_1 \frac{ds}{dt} + T_2 s = T \quad (1)$$

hol t a független változó, s a keresett függő változó, T_1, T_2, T a t -nek adott, ismert függvényei; keressük az s -t mint t függvényét.

1. Ha az egyenletnek jobb oldali tagja zérus volna, maradna:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + T_1 \frac{ds}{dt} + T_2 s = 0, \quad (1a)$$

a *reducált* vagy *nem teljes egyenlet*, míg (1) a *teljes egyenlet*.

Az (1a)-nak két partikuláris megoldását, s_1 -et és s_2 -öt alkalmas eljárások segítségével mindig nyerhetjük; vegyük fel, hogy ezeket ismerjük; ezek az (1a)-nak megfelelnek, azaz áll:

$$\left. \begin{aligned} s_1'' + T_1 s_1' + T_2 s_1 &= 0 \\ s_2'' + T_1 s_2' + T_2 s_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1b)$$

Az (1a) teljes megoldása írható [92. §. (13)]:

$$s = a_1 s_1 + a_2 s_2 \quad (2)$$

hol a_1 és a_2 az integráció állandói (parameterei).

2. Felhasználva az eredeti (1) és a nem teljes (1a) egyenletek analog szerkezetét, kísérsük meg az (1) egyenletet szintén egy $s = a_1 s_1 + a_2 s_2$ alakú kifejezés által kielégíteni, melyben azonban az a_1 és a_2 együttthatókat a t változó ismeretlen, meghatározandó függvényeinek tekintjük. Lássuk, lehetséges-e ily megoldás és ha igen, miképpen határozódna meg az a_1 és a_2 együttthatók?

Ezen utóbbi célra két összefüggés (egyenlet) szükséges; az egyiket már eleve az

$$s_1 \frac{da_1}{dt} + s_2 \frac{da_2}{dt} = s_1 a_1' + s_2 a_2' = 0 \quad (3)$$

Ugyanis, ha u_1, u_2 a nem teljes

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + u = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2a)$$

egyenletnek két partikuláris megoldása és rövidség kedvéért tétetik:

$$\frac{du_1}{d\vartheta} = u'_1; \quad \frac{du_2}{d\vartheta} = u'_2; \quad -\frac{K}{c^2 \cos^3 \vartheta} = \Theta,$$

alakban akarjuk kifejezni; a másikat következőleg nyerjük:

Differenciálva az $s=a_1s_1+a_2s_2$ összszéget tekintettel a (3)-ra:

$$\left. \begin{aligned} s &= a_1 s_1 + a_2 s_2 \\ s' &= a_1 s'_1 + a_2 s'_2 \\ s'' &= a_1 s''_1 + a_2 s''_2 + a'_1 s'_1 + a'_2 s'_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

Ezen értékeket az eredeti (1)-be helyettesítve, ered:

$$a_1[s_1'' + T_1s_1' + T_0] + a_0[s_0'' + T_1s_0' + T_0] + a_1's_1' + a_0's_0' = T,$$

melyből tekintettel az (1 b) rendszerre:

$$\frac{ds_1}{dt} \cdot \frac{da_1}{dt} + \frac{ds_2}{dt} \cdot \frac{da_2}{dt} = T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

A (3) és (5) az a_1 és a_n meghatározására szolgáló két egyenlet; belőlük:

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{Ts_2}{s_2s'_1 - s_1s'_2}; \quad \frac{da_2}{dt} = \frac{Ts_1}{s_1s'_2 - s_2s'_1},$$

vagy:

$$a_1 = A_1 + \int_{s_0 s'_1 - s_1 s'_0} T_{s_2} dt; \quad a_2 = A_2 + \int_{s_1 s'_1 - s_0 s'_1} T_{s_1} dt \quad \dots, \quad (6)$$

hol A_1 és A_2 az integráció állandói.

E szerint a (2) alatti $s = a_1 s_1 + a_2 s_2$ alak kielégíti az (1) egyenletet, ha s_1 és s_2 az (1a) nem teljes egyenletnek két partikuláris megoldása és ha az a_1, a_2 paraméterek a (6) quadraturáiból meghatározvák. Ezen s értéke e szerint:

$$s = A_1 s_1 + A_2 s_2 + s_1 \int \frac{T s_2}{s_0 s'_1 - s_1 s'_0} dt + s_2 \int \frac{T s_1}{s_1 s'_0 - s_0 s'_1} dt \quad (7)$$

Az (1) egyenlet ezen megoldása két részből áll: az első, $A_1s_1 + A_2s_2$, a nem teljes (1a) egyenletnek teljes megoldása; a második T -től függ és az (1) teljes egyenletnek T kiegészítő tagja, folytan származik és az elsőhöz lép.

Röviden: Az (1) teljes egyenletnek teljes megoldása vissza van vezetve az (1a) nem teljes egyenletnek teljes megoldására és a (7) quadratúrára.

a nevezett módszer értelmében [a lábjegyzék (7) egyenlete]:

$$u = A_1 u_1 + A_2 u_2 + u_1 \int \frac{\Theta u_2}{u_1' u_2 - u_2' u_1} d\vartheta + u_2 \int \frac{\Theta u_1}{u_1 u_2' - u_2 u_1'} d\vartheta \quad (3)$$

a (2) egyenlet teljes megoldása, hol A_1 és A_2 az integráció állandói.

A (2a)-ból [92. §. 2. pontja]:

$$u_1 = e^{\vartheta \sqrt{-1}}, \quad u_2 = e^{-\vartheta \sqrt{-1}}$$

és így:

$$u_1' u_2 - u_2' u_1 = 2\sqrt{-1} = 2i$$

E szerint:

$$\begin{aligned} c^2 \int \frac{\Theta u_2}{u_1' u_2 - u_2' u_1} d\vartheta &= -\frac{K}{2i} \int \frac{\cos \vartheta - i \sin \vartheta}{\cos^3 \vartheta} d\vartheta = -\frac{K}{2i} \left\{ \operatorname{tg} \vartheta - \frac{1}{2} i \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \right\}; \\ c^2 \int \frac{\Theta u_1}{u_2 u_1' - u_1 u_2'} d\vartheta &= +\frac{K}{2i} \int \frac{\cos \vartheta + i \sin \vartheta}{\cos^3 \vartheta} d\vartheta = +\frac{K}{2i} \left\{ \operatorname{tg} \vartheta + \frac{1}{2} i \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \right\}. \end{aligned}$$

A (3) utolsó két tagjából:

$$\begin{aligned} & -\frac{K}{2i} \left\{ (e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}) \operatorname{tg} \vartheta - \frac{1}{2} i (e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}) \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \right\} \\ &= -K \left\{ \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta} - \frac{1}{2} \frac{1}{\cos \vartheta} \right\} = +\frac{1}{2} K \frac{\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta}. \end{aligned}$$

Ebből, első két tagját reálissá téve a (3):

$$u = \frac{1}{r} = A \cos \vartheta + B \sin \vartheta + \frac{1}{2} \frac{K}{c^2} (\cos \vartheta - \sin \vartheta \operatorname{tg} \vartheta) \quad (4)$$

mely a pálya explicit egyenlete polárkoordinátákban és benne $A = A_1 + A_2$, $B = i(A_1 - A_2)$.

Jegyzet. Ugyanezt az eredményt nyerjük, ha a (2a) partikuláris megoldásai helyébe $u_1 = \cos \vartheta$, $u_2 = \sin \vartheta$ -t teszszük és ezekkel számítjuk a (3)-at.

Könnyű kimutatni, hogy a (4) másodrendű görbét képvisel, mert $r \cos \vartheta = x$, $r \sin \vartheta = y$, $\operatorname{tg} \vartheta = y : x$ lévén, a (4)-ből:

$$2c^2(Ax^2 - x + Bxy) + K(x^2 - y^2) = 0 \quad (5)$$

2. Érdekes ugyanezt az egyenletet a derékszögű koordinátákban kifejezett differenciálegyenletekből nyerni. [A példa ezen tárgyalását VILLIE is említi: *Compositions d'Analyse et de Mécanique* 209. l.].

Az (1) szerint:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{K}{r^2 \cos^3 \vartheta} \cdot \frac{x}{r} = \frac{K}{x^2}; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{K}{r^2 \cos^3 \vartheta} \cdot \frac{y}{r} = \frac{Ky}{x^3} \quad (6)$$

Szorozva az elsőt $(dx : dt) \cdot dt = dx$ -el, nyerjük:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = -\frac{K}{x} + G \quad (7)$$

vagy:

$$dt = \sqrt{\frac{x}{2}} \frac{dx}{\sqrt{Gx - K}} \quad (7a)$$

hol G az integráció állandója.

Ámde, a területek elve [73. §. (2) és (5)] írható:

$$2df = r^2 d\vartheta = xdy - ydx = cdt;$$

ezt (7a)-val egybekapcsolva:

$$xdy - ydx = c \sqrt{\frac{x}{2}} \frac{dx}{\sqrt{Gx - K}},$$

vagy x^2 -el osztva:

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{c}{x} \frac{dx}{\sqrt{2} \sqrt{Gx^2 - Kx}}$$

Az integráció állandóját F -el jelezve, [a Math. repertorium 107. §-ának 35. formulája szerint] nyerjük:

$$\frac{y}{x} - F = \frac{c}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{K} \sqrt{\frac{Gx - K}{x}},$$

vagy:

$$K^2(y - Fx)^2 - 2c^2x(Gx - K) = 0 \quad (8)$$

Szorozva (5)-öt $-K$ -val, ez írható:

$$K^2(y^2 - x^2) - 2c^2K(Ax^2 - x + Bxy) = 0 \quad (5a)$$

Az (5a) és a (8) egyenletek összehasonlítása adja, hogy az y^2 és az x együttthatói identikusak, míg az x^2 és xy -éire nézve áll:

$$K^2F^2 - 2c^2G = -K^2 - 2c^2AK; \quad -2K^2F = -2c^2BK \quad (9)$$

mely egyenletek az integrációnak két különböző eljárásánál fellépő A és B , illetve F és G állandói között fennálló összefüggések.

A (8) vagy a vele egyenértékű (5a) egyenlet oly kúpszeletet fejez ki, mely az $x=0$, $y=0$ pontban az Y tengelyt érinti, de általánosságban véve nem szimmetrikus fekvésű az X tengelyhez.

A görbe discriminánsa $\Delta = -2c^2K^2G$; azért az [Math. repertorium 63. §.] ellipsis, parabola, hyperbola, a szerint, a mint $G \gtrless 0$.

A pálya alakjának és fekvésének további vizsgálatát, valamint a vonzó $K = -C^2$, és a taszító $K = +C^2$ gyorsulás eseteinek részletes taglalását az olvasóra bizzuk.

A sebességről bebizonyítandó, hogy az $K = -C^2$ esetben végtelen nagy lesz, ha a pont a centrumon megyen keresztül, míg $K = +C^2$ esetben a pont a centrumot nem érheti el.

Az idő és a koordináták között fennálló összefüggések az $r^2 d\vartheta = c dt$ és a (4) egyenletekből, vagy a (6) és (7a) egyenletekből nyerhetők; egyszerű viszonyokat azonban csak az utóbbi egyenlet nyújt, mely rögtön integrálható, írva:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{x dx}{\sqrt{Gx^2 - Kx}} = \frac{1}{G} \sqrt{Gx^2 - Kx} + \frac{K}{2G} \int \frac{dx}{\sqrt{Gx^2 - Kx}} + \text{const.} \quad (10)$$

Az utolsó integrál [Math. repertorium 107. §-ának 33., 31. és 30. formulái] arcsin-t, vagy logarithmust ad, a szerint, a mint a pálya ellipsis vagy hyperbola.

Ha a pálya parabola, $G=0$ és marad:

$$t = \frac{2}{3\sqrt{-2K}} x^{\frac{3}{2}} + \text{const.} \quad (10a)$$

Ez a pálya csak *vonzó* ($K = -C^2$) gyorsulásnál reális.

126. §. A centrális gyorsulás a távolságnak és az iránynak függvénye. Második példa.

A gyorsulás törvénye legyen:

$$R = K \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} = Ku^2 \sin^2 \vartheta \quad (1)$$

hol $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$ a derékszögű koordináták.

1. A pálya differenciálegyenlete [74. §. (7)] itt:

$$\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + u + \frac{K}{c^2} \sin^2 \vartheta = 0 \quad (2)$$

melyet a megelőző §. 1. pontja szerint könnyen fejthetni meg. Ha változtatosság kedvéért a megelőző §. lábjegyzéke és *Jegyzete* szerint $u_1 = \cos \vartheta$ -t és $u_2 = \sin \vartheta$ -át teszszük a $\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + u = 0$ nem teljes egyenlet két partikuláris megoldása számára.

Ekkor $u'_1 u_2 - u'_2 u_1 = -1$ és mivel itt $\vartheta = -\frac{K}{c^2} \sin^2 \vartheta$, a megelőző §. (3) egyenlete írható:

$$u = A_1 \cos \vartheta + A_2 \sin \vartheta + K \frac{1}{c^2} \left\{ \cos \vartheta \int \sin^3 \vartheta d\vartheta - \sin \vartheta \int \sin^2 \vartheta \cos \vartheta d\vartheta \right\} \quad (3)$$

A $\{ \dots \}$ zárojeles kifejezés értéke [a math. repertorium 110. §. 6. formulája szerint]:

$$-\frac{1}{3} \cos \vartheta (\sin^2 \vartheta \cos \vartheta + 2 \cos \vartheta) - \frac{1}{3} \sin^4 \vartheta = -\frac{1}{3} \sin^2 \vartheta - \frac{2}{3} \cos^2 \vartheta;$$

ezért (3)-ból keresett pálya egyenlete:

$$u = \frac{1}{r} = A_1 \cos \vartheta + A_2 \sin \vartheta - \frac{K}{3c^2} (1 + \cos^2 \vartheta) \dots (4)$$

Az egyenlet jobb oldala soha sem lehet végtelen nagy; ezért r nem lehet zérus és a pálya nem mehet a mozgás centrumán át.

Mivel (4)-ből:

$$\frac{du}{d\vartheta} = -A_1 \sin \vartheta + A_2 \cos \vartheta + \frac{2K}{3c^2} \sin \vartheta \cos \vartheta, \dots (4a)$$

a sebesség négyzete, ugyanis a

$$v^2 = c^2 \left\{ u^2 + \left(\frac{du}{d\vartheta} \right)^2 \right\} \dots (5)$$

kifejezés itt csak *véges* nagyságú vagy zérus lehet, végtelen nagy soha.

2. A példa további tárgyalásánál legyen a gyorsulás *vonzó*, azaz $K = -C^2$; vezessük be a kezdő állapotra nézve a következő egyszerűsítéseket:

A kezdő-távolság legyen a , a kezdősebesség az a -ra merőleges irányú és $v_0 = \sqrt{-\frac{2K}{3a}} = C \sqrt{\frac{2}{3a}}$ értékű legyen; a ϑ -akat az $r = a$ vezérsugártól (itt apszistól) számítjuk.

E szerint $\vartheta = 0$ -hoz tartozik: $r = a$, $u = \frac{1}{a}$; $\frac{du}{d\vartheta} = 0$;

$v_0 = a \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)_0 = C \sqrt{\frac{2}{3a}}$; és így (4)-ből: $\frac{1}{a} = A_1 + \frac{2C^2}{3c^2}$, míg (5)-ből

$v_0^2 = \frac{2C^2}{3a} = \frac{c^2}{a^2}$, vagy: $\frac{1}{a} = \frac{2C^2}{3c^2}$, miből $A_1 = 0$; végre $\vartheta = 0$ -kor a (4a)-ból: $A_2 = 0$.

Ezen feltételek mellett a pálya (4) egyenletéből:

$$\frac{1}{r} = + \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2a} \dots (6)$$

Az r vezérsugár értéke egyenlő az oly ellipsis vezérsugara négyzetével, mely ellipsis középpontja a mozgás centruma, nagyobb tengelye a kisebbnek kétszerese és a $\vartheta = 0$ irányra (polártengelyre) merőleges. [Ezt az olvasó a Math. repertorium 64. §-ának (5) egyenlete alapján bizonyítsa be].

Az idő és a ϑ között fennálló összefüggés adódik, ha az $r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = c = a^2 \frac{d\vartheta}{dt} = av_0 = C \sqrt{\frac{2}{3}} a = c$ egyenletet a (6)-tal egyesítjük:

$$C dt \sqrt{\frac{2}{3}} a = \frac{4a^2 d\vartheta}{(1 + \cos^2 \vartheta)^2},$$

azaz [a nevezőben írva $1 = \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta$, a Math. repertorium 110. §-ának 42. formulája alapján]:

$$t\sqrt{\frac{2}{3}}a = \frac{a^2}{C} \left\{ \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\sqrt{2}} \right) - \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{2 + \operatorname{tg}^2 \vartheta} \right\} + \text{Const.} \quad (7)$$

A mozgó pont a $\vartheta=0$ és $\vartheta=\frac{1}{2}\pi$ között fekvő ívet a T keringési idő negyedrésze alatt írja le; a (7)-ből nyerjük:

$$T = 3\pi \frac{\sqrt{3}}{C} a^{\frac{3}{2}} \quad (8)$$

3. Hasonlítsunk a 2. pont alatt tárgyalttal oly mozgást össze, melyet ugyanazon centrum körül $R = -\frac{C^2}{r^2}$ gyorsulás befolyása alatt egy másik pont (bolygó) ír le, ugyanazon kezdőfeltételek mellett, melyek folytán a 2. elején felírt összefüggések érvényesek.

A pálya egyenlete ekkor írható:

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u = \frac{C^2}{c^2} = \frac{3}{2a},$$

melyet az $u = z + \frac{3}{2a}$ helyettesítés által:

$$\frac{d^2z}{d\vartheta^2} + z = 0 \quad (9)$$

alakba hozhatni; ebből a 92. §. 2. pontja vagy a megelőző §. szerint:

$$z = A_1 \cos \vartheta + A_2 \sin \vartheta = \frac{1}{r} - \frac{3}{2a},$$

avagy az $r=a$, $\vartheta=0$, $\frac{du}{d\vartheta}=0$ kezdőfeltételek tekintetbe vételével:

$$\frac{1}{r} = \frac{3 - \cos \vartheta}{2a}, \quad \text{vagy:} \quad r = \frac{\frac{2}{3}a}{1 - \frac{1}{3} \cos \vartheta} \quad (10)$$

Miként várható, ez a (10) oly ellipsist jelent, melynek egyik gyújtópontja a centrum és az (r, ϑ) rendszer kezdőpontja, míg a polártengely a nagy tengellyel ellentett irányú; nagy tengelyének egész hossza: $2a_1 = \frac{2}{3}a$, míg a keringés idejét, T_1 -et a KEPLER harmadik törvényet tartalmazó, a 123. §. II. pontjában adott eljárás szerint a

$$C^2 = \frac{c_1^2}{\rho_1} = \frac{4\pi^2(\frac{2}{3}a)^3}{T_1^2} = \frac{27\pi^2 a^3}{16T_1^2} \quad (11)$$

formulából nyerjük, melyet a (8)-al összehasonlítva, származik:

$$T_1 = \frac{1}{4} T \quad (12)$$

127. §. *Általános eset, melyben a centrális mozgás pályájának egyenlete egyszerű quadratúrákra vezethető vissza. Kétféle eljárás.*

A centrális gyorsulás R , általánosságban az r és ϑ polárcoordináták függvénye legyen, számítva az r -et a centrumtól, ϑ -t ezen átmenő egyenestől.

JAKOBÍ bizonyította be először, hogy a mikor:

$$R = \frac{1}{r^2} f(\vartheta) = u^2 f(\vartheta), \quad (1)$$

hol $f(\vartheta)$ a ϑ -nak tetszőleges függvénye, a pálya egyenlete egyszerű quadratúrákra vezethető vissza.

1. Helyettezve ugyanis (1)-et a pálya differenciálegyenletébe [74. §. (7)], ez:

$$\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + u^2 = -\frac{1}{c^2} f(\vartheta) \quad (2)$$

mely egyenlet, a 125. és 126. §§-ok szerint azonnal oldható meg a parameterek variációja módszere szerint:

$$\left. \begin{aligned} u = \frac{1}{r} &= A_1 \cos \vartheta + A_2 \sin \vartheta + \\ &+ \frac{1}{c^2} \left\{ \cos \vartheta \int f(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta - \sin \vartheta \int f(\vartheta) \cos \vartheta d\vartheta \right\} \end{aligned} \right\} (3)$$

A quadratúrák elvégzése után a pálya egyenletét nyerjük.

Mihelyt a (3) egyenlet meg van fejtve, a $cdt = r^2 d\vartheta$ egyenlet szintén csak quadratura és a centrális mozgás többi sajátosságai önként adódnak.

1a. Ha a kezdőállapot (kezdő távolság, sebesség és irány) más, akkor az integráció A_1 és A_2 állandói és az $\frac{1}{2}c$ felületi sebesség más értékű; ezeket B_1 , B_2 , $\frac{1}{2}c'$ -vel jelezve, szabad őket másnevű n , A'_1 , A'_2 oly állandók segítségével kifejezni, melyekre nézve áll:

$$\frac{1}{2}c' = \frac{1}{2} \frac{c}{\sqrt{n}}; \quad B_1 = nA_1 + A'_1; \quad B_2 = nA_2 + A'_2.$$

E szerint, midőn $\Phi(\vartheta)$ a (3) egyenlet kifejezése meghatározott kezdőállapothnál (azaz c , A_1 , A_2 állandók esetében) akkor más kezdőállapotra nézve:

$$\frac{1}{r} = n\Phi(\vartheta) + A'_1 \cos \vartheta + A'_2 \sin \vartheta \quad (3a)$$

mely a (3)-hoz homolog görbét jelent. (E megjegyzés DARBOUX-tól származik).

2. A (3)-at derékszögű coordináták alapján is könnyen nyerhetjük.

Áll a területek elve:

$$cdt = r^2 d\vartheta, \quad u^2 = \frac{1}{c} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} \quad \text{és így (1)-ből} \quad R = \frac{1}{c} f(\vartheta) \frac{d\vartheta}{dt}.$$

A gyorsulás és a sebesség derékszögű componensei:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= R \cos \vartheta = \frac{1}{c} f(\vartheta) \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{dt}; & \frac{d^2y}{dt^2} &= R \sin \vartheta = \frac{1}{c} f(\vartheta) \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{dt}; \\ \frac{dx}{dt} &= -A_2 c + \frac{1}{c} \int f(\vartheta) \cos \vartheta d\vartheta; & \frac{dy}{dt} &= A_1 c + \frac{1}{c} \int f(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \quad (4) \end{aligned}$$

hol A_1, A_2 az integráció állandói.

Mivel még [73. §. (2), (5)]:

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c,$$

írjunk $x = r \cos \vartheta$; $y = r \sin \vartheta$, és a (4) felhasználásával:

$$r \cos \vartheta \left\{ A_1 c + \frac{1}{c} \int f(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \right\} - r \sin \vartheta \left\{ -A_2 c + \frac{1}{c} \int f(\vartheta) \cos \vartheta d\vartheta \right\} = c,$$

mely nem egyéb, mint a (3) egyenlet.

128. §. *Példák két centumból eredő gyorsulásokra, midőn az egyes gyorsulások csak a távolság függvényei. Kivételes eset.*

Legyen (87. ábra) O_1 -ben az $R_1 = K_1 r_1^m$, és O_2 -ben az $R_2 = K_2 r_2^n$ gyorsulás centruma, A a mozgó pont, mely egyszerre van alávetve ezen két gyorsulásnak, $O_1 O_2 = 2a$ a két centrum távolsága egymástól.

1. Hynemű problémáknál a sebesség egyenlete mindig képezhető. Az ábrából:

$$\overline{OQ} = x, \quad \overline{PQ} = y, \quad \overline{PA} = z, \quad \overline{O_1 O} = \overline{OO_2} = a;$$

$$r_1^2 = (x+a)^2 + y^2 + z^2; \quad r_2^2 = (x-a)^2 + y^2 + z^2 \quad \dots \quad (1)$$

A gyorsulás derékszögű összetevői:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= K_1 r_1^m \frac{x+a}{r_1} + K_2 r_2^n \frac{x-a}{r_2}; \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= K_1 r_1^m \frac{y}{r_1} + K_2 r_2^n \frac{y}{r_2}; \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= K_1 r_1^m \frac{z}{r_1} + K_2 r_2^n \frac{z}{r_2}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1a)$$

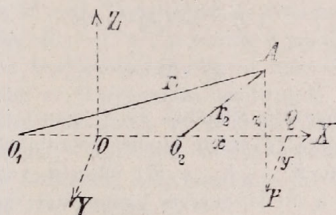
A K_1 és K_2 együtthatók állandók; ha még rövidség kedvéért:

$$K_1 \frac{r_1^{m+1}}{m+1} + K_2 \frac{r_2^{n+1}}{n+1} = V, \quad (2)$$

akkor az (1a) egyenletek írhatók:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z} \quad (3)$$

Ezen utóbbi (3) összefüggések alakja a gyorsulásoknak mindazon rendszereire érvényes, melyek különböző centrumoktól való távolságoktól függenek csak (a V e gyorsulások *potentiálja* az A pontban).



87. ábra.

Szorozva a (3) egyenleteit rendre dx , dy , dz -vel, ezek összege:

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \frac{dz}{dt} \right) dt = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz,$$

azaz, t lévén a független változó:

$$\frac{1}{2} d(v^2) = d(V) = R_1 dr_1 + R_2 dr_2 \quad (4)$$

vége:

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{K_1}{m+1} r_1^{m+1} + \frac{K_2}{n+1} r_2^{n+1} + \text{constans} \quad (4a)$$

mely az A pont sebessége és helyzete között fennálló összefüggés.

1a. *Kivételes eset.* Az $m = -1$, vagy az $n = -1$, vagy mindkét feltételnek egyszerre fellepésekor a (4a) formula nem alkalmazható; ekkor az eredeti (1a) egyenletek:

$$x'' = \frac{K_1}{r_1} \cdot \frac{x+a}{r_1} + \frac{K_2}{r_2} \cdot \frac{x-a}{r_2}, \quad y'' = \frac{K_1}{r_1} \cdot \frac{y}{r_1} + \frac{K_2}{r_2} \cdot \frac{y}{r_2}, \quad z'' = \frac{K_1}{r_1} \cdot \frac{z}{r_1} + \frac{K_2}{r_2} \cdot \frac{z}{r_2}.$$

Írva itt:

$$K_1 \lg r_1 + K_2 \lg r_2 = \lg (r_1^{K_1} r_2^{K_2}) = V, \quad (5)$$

nyerjük:

$$x'' = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad y'' = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad z'' = \frac{\partial V}{\partial z}$$

5. A mozgó pont ellipsist ír le a középpontjában lévő gyorsulási centrum körül; milyen a gyorsulás törvénye? Kimutatandó, ha v_1 és v_2 a pályában egymásra derékszögű két sebesség, a , b , a féltengelyek, hogy v_1 és v_2 között lévő ív befutására $\frac{1}{C} \arcsin \left(\frac{v_1 v_2}{abC} \right)$ idő szükséges, ha C a gyorsulás állandó együtthatója. T. a. St.

6a. A gyorsulás törvénye $R = -C^2 u^2$ (NEWTON-féle attraktív gyorsulás); bebizonyítandó, hogy a pálya másodrendű görbe, melynek egyik gyújtópontja a gyorsulás centruma. Milyeneknek kell a kezdő feltételeknek lennie, ha a pálya ellipsis, kör, parabola, hyperbola? $(2 \frac{C^2}{r_0^3} - v_0^2 \geq 0)$. V.

6b. A gyorsulás törvénye $R = +C^2 u^2$ (taszító gyorsulás); bebizonyítandó, hogy a pálya polár-egyenletének alakja $\frac{1}{r} = b^2 \cos(\vartheta - \gamma) - a^2$, hol a, b, γ állandók és $b^2 > a^2$. Taglaltassék és értelmezessék ez a mozgás. A.

7. A gyorsulás $R = -C^2 u^2$; a térnek A pontjából elhajított pont ellipsist írjon le; ha kezdősebessége irányát megváltoztatjuk, de úgy, hogy a sebességek mindig az O gyorsulási centrumon és az A -n átmenő egy meghatározott síkban maradnak és értékük nem változik, akkor a leírt ellipsisek nagy tengelyei egyenlők, középpontjaik mind egy meghatározott kör kerületén fekszenek, míg envelope-juk (beburkolójuk) az O és A gyújtópontokkal bíró ellipsis. S. G.

8a. A gyorsulás törvénye $R = +C^2 u^3$; a kezdőállapotban a pont az a apsis végpontján, az a -ra merőlegesen $\frac{C}{a^2 \sqrt{2}}$ sebességgel mozog. Milyen a pálya alakja? Bebizonyítandó, hogy az idő, mely alatt a pont az a apistól az $r = a\sqrt{2}$ távolságig jutott, $\frac{2}{3} \frac{a}{C}$ értékű. T. a. St.

8b. A gyorsulás törvénye $R = -C^2 u^3$; különböző nagy számú pontok mozognak a centrum körül, mindegyik más sugarú kört írva le. Ha valamenynyí pont egy és ugyanazon időpillanatban egy és ugyanazon sugáron van, mily görbét képez geometriai helyük akkor, miután az a sugarú körön mozgó pont egy teljes keringést végzett? T. a. St.

9. A gyorsulás törvénye $R = Ku^4$, vizsgáltassék meg a mozgás; határozassék meg a pálya abban az egyszerű esetben, mikor a gyorsulás vonzó, a kezdő távolság $r = a$, a kezdősebesség az a -ra merőleges (a az apsis) és értéke a végtelenből való esés sebességének n -szerese. T. a. St.

10. A gyorsulás törvénye: $R = -C^2 u^2$; r_0 , v_0 a kezdő távolság és sebesség, ϵ_0 az általuk bezárt szög. Bebizonyítandó, hogy:

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = c = r_0 v_0 \sin \epsilon_0; \quad \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = \frac{1}{4} C^2 \left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{r_0^4} \right)$$

és:

$$c \frac{dr}{d\vartheta} = \pm \left\{ (v_0^2 - \frac{1}{2} \frac{C^2}{r_0^4}) r^4 - c^2 r^2 + \frac{1}{2} C^2 r_0^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

mely a pálya differenciálegyenlete; erre nézve megkülönböztetendő:

$$10a. \quad v_0^2 - \frac{1}{2} \frac{C^2}{r_0^4} = -h^2; \quad \text{jelelve } r_1 \text{ és } r_2 \text{-vel a } -h^2 r^4 - c^2 r^2 + \frac{1}{2} C^2 r_0^2 = 0$$

egyenlet gyökeit, melyek előjele itt különböző, nyerjük

$$d\vartheta = \frac{\pm c dr}{\sqrt{-h^2(r^2 - r_1^2)(r^2 + r_2^2)}},$$

mely ellipszises integrál a kezdőpontban egymást metsző, egyenlő és az r_1 sugarú körhöz érintő görbe íveket jelent, melyek általánosságban nem képeznek zárt görbét.

Egy ív befutására szükséges idő:

$$T = 2 \int_0^{r_1} \frac{r^2 dr}{\sqrt{-h^2(r^2 - r_1^2)(r^2 + r_2^2)}}.$$

10 b. $r_0^2 - \frac{1}{2} \frac{C^2}{r_0^4} = +h^2$; itt három eset lehetséges:

α) A $h^2 r^4 - c^2 r^2 + \frac{1}{2} C^2 = 0$ trinom gyökei complex és conjugált menyiségek; ekkor $dr : d\vartheta$ mindig egyjelű, soha sem lehet zérus és így a pálya oly spirális, mely a végesből a végtelenbe terjed.

β) Ha az r_1 és r_2 gyökök reálisak, akkor mindkettő pozitív és:

$$d\vartheta = \frac{\pm c dr}{\sqrt{h^2(r^2 - r_1^2)(r^2 - r_2^2)}},$$

és ha pl. $r_2 > r_1$, akkor, mivel $d\vartheta$ reális, az $r \leq r_1$ vagy az $r \geq r_2$ feltételnek tartozik megfelelni.

γ) Ha a gyökök egyenlők és közös értékük r_1 , marad:

$$d\vartheta = \pm \frac{c dr}{h(r^2 - r_1^2)},$$

miből:

$$r = r_1 \frac{1 + \alpha e^{\pm \frac{2hr_1}{c^2} \vartheta}}{1 - \alpha e^{\pm \frac{2hr_1}{c^2} \vartheta}},$$

mely α állandóra nézve, ha $r_0 = a$, $\vartheta_0 = 0$ egymáshoz tartozók:

$$a = r_1 \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}.$$

10 c. $r_0^2 - \frac{1}{2} \frac{C^2}{r_0^4} = 0$; ekkor:

$$c \frac{dr}{d\vartheta} = \pm \left\{ \frac{1}{2} C^2 - c^2 r^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

miből:

$$r = \frac{C}{c\sqrt{2}} \cos(\vartheta + \gamma),$$

hol γ az integráció állandója. Ez a centrumon átmenő kör egyenlete (v. ö. a 124. §. 2. példáját).

A fentjelzett eredmények részletesen taglalandók és értelmezendők. T. a. St.; Vi. és S. G.

11. A gyorsulás törvénye $A = -C^2 u^5$; a kezdősebesség oly arányban legyen a végtelenből az r_0 kezdőtávolságig való esés sebességéhez, mint 5 a 3-hoz, és az r_0 -al $\arcsin(\frac{2}{3}\sqrt{6})$ szöget képezzen; bizonyíttassék be, hogy a pálya egyenletének alakja:

$$r = \frac{1}{2} r_0 \sqrt[3]{\frac{1 - e^{\sqrt{2(9-\varepsilon)}}}{1 + e^{\sqrt{2(9-\varepsilon)}}}}$$

hol ε az r_0 helyzete által adott állandó. T. a. St.

12. A gyorsulás a távolság hetedik hatványáról fordítva arányos, milyen a sebesség egyenlete és a pálya elsőrendű differentialegyenlete? Ezen utóbbinak discussiója. (V. ö. a 124. §. 1. példáját). V.

13. A gyorsulás $R = -C^2 u^2$, a kezdőállapotban legyen $r = a$, a sebesség az a -ra merőleges irányú és $C \frac{1}{\sqrt{3}a^6}$ értékű; bebizonyítandó, hogy a pálya egyenlete $r^2 = a^2 \cos 2\vartheta$ közönséges lemniscátát jelent, hogy a ϑ és a t között az összefüggés: $\vartheta = \frac{1}{2} \arcsin(\sqrt{c + \frac{2C}{a^4} \frac{t}{\sqrt{3}}})$ és hogy a görbe negyedének befutására szükséges idő $T = \frac{1}{2} \frac{a^4}{C} \sqrt{3}$; fejeztessék továbbá ki ϑ , r , u^2 a t -ben (illetve igazoltassanak a kifejezések):

$$\vartheta = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{t}{T} - 2\right); r^2 = a^2 \left\{1 - \left(\frac{t}{T} + c\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}; v^2 = \frac{C^2}{3a^6} \left\{1 - \left(\frac{t}{T} + c\right)^2\right\}^{-\frac{3}{2}}$$

Vi., S. G., T. a. St.

14. A 124. §. 3. pontjában talált eredmény, hogy az $r^n = a^n \cos n\vartheta$ egyenletű görbéhez $R = -(1+n) a^{2n} c^2 \frac{1}{r^{2n+3}}$ gyorsulás tartozik, részletezendő és értelmezendő 1. az $n = -1$ esetre nézve, 2. az egyenoldalú (derékszögű) hyperbolára, 3. a lemniscátára, 4. a parabolára, 5. a cardoidisra nézve. T. a. St.

15. A gyorsulás törvénye: $R = -C^2 u^n$, a pont sebessége $r = \infty$ -kor zérus legyen, a az apsis-vonal hossza; bizonyíttassék be, hogy áll:

$$c^2 = \frac{a^{n-3}}{c^2} \frac{1}{r^{n-1}}; r^{\frac{1}{2}(n-3)} = a^{\frac{1}{2}(n-3)} \cos \frac{1}{2}(n-3)\vartheta. \quad \text{T. a. St.}$$

16. Valamely pont rugalmas fonál végéhez van erősítve és vízszintes, sima lapon surlódás nélkül mozog. Ha a fonál a mozgás közben megnyúlik, az általa kifejtett vonzó gyorsulás a meghosszszabbodással egyenesen arányos. A fonal eredetileg egyenesvonalú és feszültség nélküli, ekkor a mozogható pontnak a fonálra merőleges sebességet tulajdonítunk; milyen a keletkező mozgás? Milyen egyszerűsítések következnek be, ha a fonál meghosszszabbodása mozgás közben csak csekély? P. J.

17. A megelőző feladatban a pont körben mozogjon; a a fonál

eredeti hossza, r a megnyújtott fonál-é; **bebizonyítandó**, hogy egy periódus tartama az $\left(\frac{ra}{r-a}\right)^{\frac{1}{2}}$ értékkel arányos. T. a. St.

18. A megelőző feladatban a pálya csak igen csekély mértékben különbözik a körtől; milyenek az apsis-vonalak, mily szögeket képeznek egymással, milyen a mozgás jellege? (V. ö. a 121. §-ot). T. a. St.

19. Valamely centrum körül mozgó pont sebessége mindig fordítva arányos a centrumtól való távolsággal; **bebizonyítandó**, hogy a pálya közönséges logaritmikus spirális; keresendő a gyorsulás törvénye. V.

20. **Bebizonyítandó**, hogy midőn a pont sebességének nagysága a pálya minden pontjában egyenlő avval a sebességgel, melylyel e pont ugyanazon centrum körül a vezérsugárral kört írna le, a pont csak logaritmikus spirális írtat le és a gyorsulás törvénye $R = -C^2 r^3$. V.

21. A pont sebessége mindig fordítva arányos a vezérsugár n -ik hatványával; **bizonyítsák be**, hogy a gyorsulás törvényére és a pálya poláregyenletének alakjára nézve áll, ha a az apsis:

$$R = -C^2 \frac{1}{r^{2n+1}}; \quad r^{n-1} = a^{n-1} \cos[(n-1)(\vartheta - \gamma)]; \quad \gamma \text{ állandó. T. a. St.}$$

22. Valamely pont egy centrum körül akként mozog, hogy sebessége a pálya minden pontjában oly viszonyban van az ugyanazon vezérsugárral, mint körsugárral bíró körpálya sebességéhez, mint 1 a $\sqrt{2}$ -höz. **Bizonyítandó**, hogy a gyorsulás törvényére és a pálya alakjára nézve áll:

$$R = -C^2 \frac{1}{r}; \quad r = \frac{C}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\vartheta - \gamma); \quad \gamma \text{ állandó. V.}$$

23. Valamely pont csak a távolságtól függő centrális gyorsulásnak van alávetve; milyen ezen gyorsulás legáltalánosabb törvénye, hogy a pálya mindig zárt görbe legyen; a kezdősebesség iránya tetszőleges lévén, de értéke bizonyos határon túl ne menjen. S. G. és Vi.

24. A gyorsulástörvénye $R = -\frac{C^2 r}{(r^2 - b^2)^2}$; ha a kezdőállapotban $r = a = zb$, hol $z > 1$ és a sebesség a -ra merőleges és értékre nézve $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ szerese az ugyanazon centrum körül a sugárral leírt körpályában való sebességnek; **bebizonyítandó**, hogy a pálya egy epicyclois íve [Math. repertorium 65. §-ának 17. formulái, 77. l.] és kiszámítandó a csúsig érkezés ideje. T. a. St.

25. A gyorsulás törvénye $R = -\frac{C^2 r}{(r^2 + b^2)^3}$, a kezdő állapotban a pont b távolságban $\frac{C}{2b^2 \sqrt{2}}$ sebességgel mozog, mely a b iránynyal are $\sin\left(\frac{b}{a}\right)$ szöget képez; **bebizonyítandó**, hogy a származó pálya egy a sugarú kör. T. a. St.

26. Valamely pont egy centrumból kiinduló két gyorsulásnak van alávetve; az egyik vonzó és a távolsággal arányos, a másik taszító és a

távolság harmadik hatványával fordítva arányos. Ha: $R = -C_1^2 r + C_2^2 r^{-3}$, továbbá a az apsis-távolság, v_a a hozzátartozó sebesség és rövidség kedvéért: $C_2^2 + a^2 v_a^2 = \kappa^2 a^2$ és még egymáshoz tartozók legyenek $r = a$, $\vartheta = 0$, $t = 0$; akkor nyerjük:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2} \cos^2 \left(\frac{\kappa \vartheta}{v_a} \right) + \frac{C_1^2}{\kappa^2} \sin^2 \left(\frac{\kappa \vartheta}{v_a} \right);$$

$$\operatorname{tg}(C_1 t) = \frac{a C_1}{\kappa} \operatorname{tg} \left(\frac{\kappa \vartheta}{v_a} \right). \quad \text{S. G., VI.}$$

27. Vizgáltassék meg a megelőző feladat azon egyszerűsítéssel, hogy a kezdő helyzetben az eredő gyorsulás zérus és a sebesség a vezérsugarra (apsisra) merőleges legyen. S. G.

28. Bizonyítsassék be, hogy a midőn $R = K_1 r + K_2 r^{-3}$, a pálya (egyenletének) alakja éppen úgy mint a megelőző feladatban:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2} \cos^2 (\lambda \vartheta) + \frac{1}{b^2} \sin^2 (\lambda \vartheta);$$

továbbá, midőn $\vartheta = 0$ -kor $r = a = (K_2 : K_1)^{\frac{1}{2}}$ és $v_a = (K_1 K_2)^{\frac{1}{4}}$, hol v_a merőleges az a apsisra, hogy áll:

$$r^2 = \frac{a}{1 + \vartheta^2}; \quad t = \frac{1}{\sqrt{K_1}} \arctg \vartheta. \quad \text{T. a. St.}$$

29. Hasonlítsassék össze a pályák azon két rendszere, ha egyszer: $R = -C_1^2 u^2 \Phi(u)$, mászor: $R = -C_1^2 u^2 \Phi(u) - C_2^2 u^3$. (A pálya általános differenciálegyenletéből kell kiindulni). T. a. St.

30. Valamely pont a sugarú kört ír le $-C^2(r + \frac{2a^2}{r^2})$ törvényű gyorsulás befolyása alatt; mekkora a pont sebessége? Bebizonyítandó, hogy ha a sebességet egy időpillanatban egyszerre megkettőzzük, a pálya ettől fogva teljesen megváltozik és a pont $3a$ hosszúságú apsist ér el. T. a. St.

31. Valamely pont oly centrális gyorsulásnak van alávetve, melynek alakja: $R = K_1 u^3 + K_2 u^5$; vizgáltassék meg, mily feltételek mellett leszzen a pálya alakja: $r = a(1 - \frac{\vartheta}{\sqrt{2}})$. A.

32. A gyorsulás törvénye: $R = -C^2(\frac{2}{h^2} u^5 + u^3)$; a kezdő állapotban $r = r_0$, $v = v_0$, hol v_0 az r_0 -al 45° -ot képez és értékére nézve oly viszonyban van az ugyanazon centrum körül r_0 sugarú körben való mozgás sebességével, mint $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$ -hoz; kimutatandó, hogy a pálya alakja: $r = r_0(1 - \vartheta)$. T. a. St.

33. A gyorsulás törvénye: $R = -2C^2(u^3 - a^2 u^5)$; a kezdő állapotban a pont az a hosszúságú apsis végpontján $\frac{1}{a} C$ sebességgel mozog; bizonyítsassék be, hogy a pont r távolságban:

$$t = \frac{1}{2C} \left\{ a^2 \lg \frac{1}{a} (r + \sqrt{r^2 - a^2}) + r \sqrt{r^2 - a^2} \right\} \text{ idő múlva lesz. T. a. St.}$$

34. A gyorsulás törvénye: $R = -C^2(5u^3 - 8a^2u^{-5})$, a kezdő állapotban a pont az a apsis végpontján oly sebességgel mozog, mely a végtelenből való esés sebességével egyenlő; kimutatandó, hogy a pálya egyenlete:

$$r = \frac{1}{2}a(e^{2\vartheta} - e^{-2\vartheta}). \quad \text{T. a. St.}$$

35. A gyorsulás törvénye $R = -C^2 \frac{1}{\gamma^2} \{ (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) u^3 - 2\alpha^2\beta^2u^5 \}$, hol α, β, γ, C állandók; a kezdő állapotban a pont az α hosszúságú apsis végpontján, arra merőlegesen $\frac{C}{\alpha}$ sebességgel mozog; fejeztessék ki a pálya egyenlete r és ϑ között ellipszis integrálok és függvények által. T. a. St.

36. A centrális gyorsulás törvénye: $R = -C^2 \{ 2(a^2 + b^2)u^5 - 3a^2b^2u^7 \}$, C, a, b , állandók; a kezdősebesség az a apsis-vonalra merőleges és $\frac{C}{a}$ értékű. Bebizonyítandó, hogy ekkor:

$$c = C; \quad r^2 = a^2 \cos^2 \vartheta + b^2 \sin^2 \vartheta; \quad Ct = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)\vartheta + \frac{1}{4}(a^2 - b^2) \sin 2\vartheta.$$

A pálya egy ellipsis talppontgörbéje vonatkoztatva a centrumra [Math. repertorium 65. §-ának 16. formulái, 76. l.].

Jegyzet. Ha b^2 értéke $-a^2$ volna, a pálya lemniscáta [u. o. 75. l.].
T. a. St., S. G., Vi.

37. Ha R és v a gyorsulás és a sebesség a centrális pályának r vezérsugarú pontjában, míg R_r, v_r, r , ugyanily menynyiségek az érintőre bocsátott merőleges talppontja helyére nézve (ha talppontot ugyanazon centrum körül szabadon mozognak tekintjük), akkor áll:

$$\frac{v^2}{Rr} + \frac{R_r r_r}{v_r^2} = 2. \quad \text{T. a. St.}$$

[A bebizonyításnál a sebességi nyomatókok állandóságából lehet kiindulni].

38. A gyorsulás nem centrális, hanem R a radialis, T a tangenciális összetevője (v. ö. a 77. §-t), míg r a vezérsugár és p a pólusból (az r -ek kezdőpontjából) az r -hez tartozó érintőre bocsátott merőleges hossza: bebizonyítandó, hogy áll:

$$\frac{\partial}{\partial r} (p^3 R \frac{\partial r}{\partial p}) = \frac{2Tp^2 r}{\sqrt{r^2 - p^2}}. \quad \text{T. a. St.}$$

39. A gyorsulás nem centrális, hanem R a radiális, N a normális összetevője (v. ö. a 77. §-t); r és p a megelőző feladat szerint jelentik a radiusvectort és a pólusból az érintőre bocsátott merőleget; kimutatandó a következő egyenlet helyessége:

$$p^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(N r \frac{\partial r}{\partial p} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(R p^3 \frac{\partial r}{\partial p} \right) = 0. \quad \text{T. a. S.}$$

40. A gyorsulás centrális törvénye általánosságban: $R=R(r)$; a mozgás periodusos legyen; fejeztessék ki a gyorsulás időbeli középértéke egy T periodusra nézve:

$$\overline{R(r)} = \frac{1}{T} \int_0^T R(r) dt = \frac{1}{2\pi c} \int_0^{2\pi} r^2 R(r) d\vartheta.$$

Az időbeli, a szögbeli és a távolságbeli középértékek:

$$\frac{1}{T} \int_0^T R(r) dt; \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(r) d\vartheta; \quad \frac{1}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} R(r) dr$$

Vizsgáltassanak meg és értelmeztesenek ezek az értékek az $R(r)$ függvény egyszerűbb eseteire nézve. A.

41. A gyorsulás centrális és arányos a $-\frac{ab^2}{r^2} (1 + 5e^{-2\vartheta})$ értékkel; a kezdő állapotban a a távolság, $2b$ a sebesség, mely az a -val 45° -nyi szöget képez. Kimutatandó, hogy a pálya egyenlete:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2a} (1 + e^{-2\vartheta}). \quad \text{S. G.}$$

42. A centrális gyorsulás törvénye legyen: $R = -C^2 u^2 (1 + \kappa \cos \mu \vartheta)$, hol C, κ, μ állandók. Ez az eset a 127. §-ban említett JAKOBI-féle csoportba sorozható. Mily alakú a pálya; milyen a mozgás? Mily egyszerűsítés áll be, ha κ igen kicsiny az egységhez képest? A.

43. A gyorsulás centrális; törvénye $R = -C^2 \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^3}}$, vagy polárkoordinátákban: $R = -C^2 u^2 (\cos 2\vartheta)^{-\frac{3}{2}}$, mely a 127. §-ban tárgyalt JAKOBI-féle csoporthoz tartozik. Bizonyítsassék be, hogy a pálya kúpmetszet és hogy egyenletének alakja: $x^2 - y^2 = (ax + by + g)^2$. S. G.

44. A gyorsulásnak több centruma van; a mindegyikből származó gyorsulás a saját centrumából a mozgó ponthoz húzott vezérsugárral egyenesen arányos. Jelelje x, y, z , a mozgó pont, x_i, y_i, z_i az i -ik, álló centrum koordinátáit, K_i a hozzátartozó R_i gyorsulás állandóját, úgy hogy rendre:

$$R_i = K_i r_i = K_i [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{\frac{1}{2}};$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \sum R_i \frac{x - x_i}{r_i} = \sum K_i (x - x_i) = -\sum K_i x_i + x \sum K_i; \quad \text{s i. t.}$$

Röviden:

$$x'' = x \sum K_i - \sum K_i x_i; \quad y'' = y \sum K_i - \sum K_i y_i; \quad z'' = z \sum K_i - \sum K_i z_i$$

Mivel K_i , x_i , y_i , z_i állandók, önként kinálkozik egy oly ΞHZ koordináta-rendszer bevezetése, melynek tengelyei az XYZ rendszeréhez párhuzamosak, kezdőpontjának $x_0 y_0 z_0$ koordinátáira nézve pedig álljon:

$$x_0 \Sigma K_i = \Sigma K_i x_i, \quad y_0 \Sigma K_i = \Sigma K_i y_i, \quad z_0 \Sigma K_i = \Sigma K_i z_i.$$

Ekkor a mozgó (xyz) pontnak az $(x_0 y_0 z_0)$ ponttól való távolságának derékszögű vetületei (azaz koordinátái) a ΞHZ rendszerben, ξ , η , ζ , melyekre nézve:

$$\xi = x - x_0, \quad \eta = y - y_0, \quad \zeta = z - z_0;$$

miáltal:

$$x' = \xi' = K\xi; \quad y' = \eta' = K\eta; \quad z' = \zeta' = K\zeta,$$

hol $K = \Sigma K_i$. A gyorsulás itt centrális, a centrum helye az $x_0 y_0 z_0$ koordináták (a ΞHZ kezdőpontja) által van adva, (analógia a tömegközépponthoz) és a gyorsulás e centrumtól való távolsággal egyenesen arányos. Vizsgáltsanak meg esetek, mikor a K_i állandók részben pozitív, részben negatív előjelűek. V.

45. A megelőző feladatban a gyorsulások egy centrális gyorsulásra lévén viszszavezetve, a mozgó pont egy síkban marad, melybe az XY koordináta-rendszert fektetjük. Jelelje ϑ_i az r_i és az X tengely által képezett szöget, ϑ a szöget a $\varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ és az X között, akkor:

$$\cos \vartheta_i = \frac{x - x_i}{r_i}, \quad \sin \vartheta_i = \frac{y - y_i}{r_i};$$

$$\cos \vartheta = \frac{\xi}{\varrho} = \frac{x - x_0}{\varrho}; \quad \sin \vartheta = \frac{\eta}{\varrho} = \frac{y - y_0}{\varrho}.$$

Továbbá:

$$r_i^2 \frac{d\vartheta_i}{dt} = (x - x_i) \frac{dy}{dt} - (y - y_i) \frac{dx}{dt};$$

$$\varrho^2 \frac{d\vartheta}{dt} = (x - x_0) \frac{dy}{dt} - (y - y_0) \frac{dx}{dt} = \xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt}.$$

Bebizonyítandó a megelőző feladat összefüggéseiből, hogy áll:

$$\varrho^2 \frac{d\vartheta}{dt} \Sigma K_i = \Sigma K_i r_i^2 \frac{d\vartheta_i}{dt} = c \Sigma K_i,$$

hol c a tényleges mozgás felületi sebességének kétszerese, vonatkoztatva az eredő gyorsulás centrumára. Értelmeztessék ez az eredmény. V.

46. A gyorsulásnak két centruma van, mely a szabadon mozgó pont által leírt ellipszis két gyújtópontja legyen.

Ha $R_1(r_1)$ az egyik, $R_2(r_2)$ a másik gyorsulás, és $r_1 + r_2 = \text{constans}$, akkor állnia kell:

$$\frac{dR_2}{dr_2} - \frac{dR_1}{dr_1} = 2 \left(\frac{R_1}{r_1} - \frac{R_2}{r_2} \right) \text{ vagy } \frac{1}{r_1^2} \frac{d}{dr_1} (r_1^2 R_1) = \frac{1}{r_2^2} \frac{d}{dr_2} (r_2^2 R_2). \quad \text{T. a. St.}$$

[Jegyzet. A feladat megfejtése rövid úton: Legyenek r_1 , ϑ_1 és r_2 , ϑ_2 az A mozgó pont polárkoordinátái, egyszer az R_1 gyorsulás O_1 -re, mászszor az R_2 gyorsulás O_2 centrumára, mint pólusra vonatkoztatva, míg a ϑ_1 és ϑ_2 szögeket az O_1O_2 vonaltól számítjuk; végre ε az r_1 és r_2 által bezárt szög.

A 44. §. (7) egyenlete szerint az O_1 és r_1 -re vonatkozó radiális gyorsulás: $R_1 + R_2 \cos \varepsilon = r_1'' - r_1 \vartheta_1'^2$; ellenben az O_2 és r_2 -re vonatkoztatott radiális gyorsulás: $R_2 + R_1 \cos \varepsilon = r_2'' - r_2 \vartheta_2'^2$; mivel $1 + \cos \varepsilon = 2 \cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon$, a kettő összege:

$$2(R_1 + R_2) \cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon = (r_1 + r_2)'' - \left\{ \frac{1}{r_1} (r_1 \vartheta_1')^2 + \frac{1}{r_2} (r_2 \vartheta_2')^2 \right\} \quad (1)$$

Mivel a pálya O_1 és O_2 gyúpontú ellipsis, az $r_1 + r_2 = \text{constans}$ továbbá a v sebességnek (az érintőnek) iránya felezi az r_1 folytatása és az r_2 által bezárt szöget [107. §. 1. pontja], a normális ellenben az r_1 és r_2 között lévő szöget. Ebből adódik $r_1 \vartheta_1' = r \cos \frac{1}{2} \varepsilon = r_2 \vartheta_2'$, miáltal (1)-ből:

$$2(R_1 + R_2) = - \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) v^2 \quad (2)$$

A (2)-öt az $r_1 + r_2 = \text{constans}$ feltétel tekintetbe vételével differenciálva:

$$(r_1 + r_2) d\left(\frac{1}{2} v^2\right) = - \left(\frac{dR_1}{dr_1} dr_1 + \frac{dR_2}{dr_2} dr_2 \right) r_1 r_2 - (R_1 + R_2)(r_1 dr_2 + r_2 dr_1) \quad (3)$$

Másrészt a sebesség és a helyzet változása között fennálló összefüggés a 128. §. (4) egyenlete szerint itt írható:

$$(r_1 + r_2) d\left(\frac{1}{2} v^2\right) = (r_1 + r_2)(R_1 dr_1 + R_2 dr_2) \quad (4)$$

Egyesítve a (3)-at a (4)-el, és tekintetbe véve, hogy $dr_1 = -dr_2$ azonnal ered a szövegben adott egyenlet. A.]

47. A gyorsulásnak két centruma van, melyből a mozgó ponthoz húzott két vezérsugár r_1 és r_2 , a gyorsulások törvénye: $R_1 = -C^2 \left\{ \frac{r_1}{8a^3} + \frac{1}{r_1^3} \right\}$; $R_2 = -C^2 \left\{ \frac{r_2}{8a^3} + \frac{1}{r_2^3} \right\}$; bizonyíttassék be, hogy a pont, szabadon mozogva, ellipsist is írhat le a két centrum mint a két gyújtópont körül, továbbá, hogy ekkor a pont sebessége a pálya bármily pontján $\frac{\lambda}{2\sqrt{r_1 r_2}} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$, hol λ a középszögsebesség (az u. n. középmozgás) ugyanazon ellipsisre nézve, melyet a pont $-\frac{C^2}{r^2}$ vonzó gyorsulás befolyása alatt a gyújtópontok valamelyike körül írta le. T. a. St.

48. A két centrum elseje $R_1 = -C^2 u_1^2$ vonzó, másodika $R_2 = \mp C^2 u_2^2$ vonzó vagy taszító gyorsulást fejt ki. Kimutatandó, hogy a mozgó pont ellipsist vagy parabolát írhat le, melyek gyújtópontjai a gyorsulás két centruma, s hogy ekkor a sebesség mindenütt fordítva arányos a $\sqrt{r_1 r_2}$ értékkel. Mekkora az ellipsises mozgás keringési ideje? A.

49. Valamely mozgó pont sebessége az r_1 és r_2 menti vezérsugári v_1 és v_2 sebességi componensek eredője; az r_1 és r_2 kezdőpontjai egymástól a távolságban vannak. Bebizonyítandó, hogy a gyorsulás összetevői az r_1 és r_2 mentén:

$$\frac{dv_1}{dt} + \frac{v_1 v_2}{2r_1 r_2} (r_1^2 - r_2^2 + a^2); \quad \frac{dv_2}{dt} + \frac{v_1 v_2}{2r_1 r_2} (r_2^2 - r_1^2 + a^2). \quad \text{T. a. St.}$$

Az eljárás egészen analog a sebesség és a gyorsulás szétbontásánál követett eljárásokhoz [34., 44., 46. §§.].

50. A két centrum elseje $R_1 = K_1 u_1^{-m}$, második $R_2 = K_2 u_2^{-n}$ gyorsulást fejt ki; a két centrum egymástól való $O_1 O_2$ távolsága $2a$; a két centrum közepén fekvő O pólustól számítva legyenek r, ϑ a mozgó pont polárcoordinátái; ellenben az O_1 -től r_1, ϑ_1 , az O_2 -től r_2, ϑ_2 , hol a ϑ, ϑ_1 és ϑ_2 szögek az $O_1 O_2$ egyenestől számíthatnak.

A 128. §. (4a) egyenlete szerint a sebesség egyenlete:

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{K_1}{m+1} u_1^{-(m+1)} + \frac{K_2}{n+1} u_2^{-(n+1)}.$$

Fejeztessék ki u_1 és u_2 valamint v az r, ϑ és ezek differenciálquociensei által és állapítsanak meg azok a feltételek, melyek mellett ez az első rendű differenciálegyenlet integrálható vagy ellipszises integrálokra visszavezethető. A.

4. Eljárások és feladatok kényszermozgásokra.

130. §. A feltételi gyorsulás. Feladatok.

A 89a. eseteiben a ψ feltételi gyorsulás mindig merőleges a pályára; itt ezt a ψ -t a feltételből vagy feltételekből számítjuk ki.

I. *Előírt sík pálya.* Legyenek $\alpha, \beta; \lambda, \mu$ a pálya érintőjének, illetve normálisának iránycosinusai, melyekre nézve (17. ábra, 36. lap): $\lambda = +\beta, \mu = -\alpha$.

A 89a. §. (1) egyenletei szerint itt:

$$\varphi_x = \chi_x + \lambda \psi; \quad \varphi_y = \chi_y + \mu \psi. \quad (1)$$

A φ -nek tangenciális és normális componense:

$$\varphi_t = s'' = \alpha \varphi_x + \beta \varphi_y = \alpha \chi_x + \beta \chi_y; \quad \varphi_n = v^2 \varrho^{-1} = \lambda \varphi_x + \mu \varphi_y = \lambda \chi_x + \mu \chi_y + \psi.$$

E szerint:

$$\psi = \frac{v^2}{\varrho} - \beta \chi_x + \alpha \chi_y. \quad (2)$$

II. *Előírt térbeli pálya.* Legyenek rendre $\alpha, \beta, \gamma; \lambda, \mu, \psi; f, g, h$ a pálya érintőjének, normálisának és binormálisának iránycosinusai; legyenek továbbá ψ_n és ψ_b a ψ -nek a normális és a binormális mentén fekvő componensei.

A 89a. §. (1) egyenleteiből a φ -nek tangentiális, normális és binormális componense (ψ merőleges lévén az érintőre):

$$\left. \begin{aligned} \varphi_t &= s'' = \alpha Z_x + \beta Z_y + \gamma Z_z; \\ \varphi_n &= v^2 \varrho^{-1} = \lambda Z_x + \mu Z_y + \nu Z_z + \psi_n; \\ \varphi_b &= 0 = f Z_x + g Z_y + h Z_z + \psi_b \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Ebből:

$$\psi = [\psi_n^2 + \psi_b^2]^{\frac{1}{2}} = [(v^2 \varrho^{-1} - \lambda Z_x - \mu Z_y - \nu Z_z)^2 + (f Z_x + g Z_y + h Z_z)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

III. *Előírt felület.* Legyenek itt az előírt F felület normálisának iránycosinusai a, b, c , ezek egyszersmind [89a. §. 1. pontja] a ψ -éi is; továbbá az F -en lévő s pálya ϱ görbületi sugarának [az s görbe főnormálisának] iránycosinusai λ, μ, ν .

A 89a. §. (1) egyenleteiből a φ -nek az F -re normális componense:

$$a\varphi_x + b\varphi_y + c\varphi_z = \alpha Z_x + \beta Z_y + \gamma Z_z + \psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

A $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ számára az 52. §. (2) egyenleteit helyettesítve [mivel az (a, b, c) irány merőleges az (α, β, γ) irányra]:

$$a\varphi_x + b\varphi_y + c\varphi_z = s'^2 \left\{ a \frac{d^2 x}{ds^2} + b \frac{d^2 y}{ds^2} + c \frac{d^2 z}{ds^2} \right\}$$

Tekintetbe véve a λ, μ, ν értékeit [Math. repertorium 75. §. (4)], ε -al jelezve az s osculáló síkja és az F normálisa által képezett szöget, erre nézve: $\cos \varepsilon = a\lambda + b\mu + \nu$; végre ha ϱ_n az F -re normális-, de az s -el egyérintőjű metszetnek görbületi sugara, MEUSNIER tételének [u. o. 85. §. (3)] tekintetbe vételével az (5)-ből:

$$\psi = \frac{v^2}{\varrho_n} - \alpha Z_x - \beta Z_y - \gamma Z_z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Feladatok: A pontra függőlegesen lefelé állandó g gyorsulás hat; határozassék meg a ψ és a pont mozgása ha az függőleges síkú másodrendű görbén, ha cycloison, ha verticális tengelyű csavargörbén, ha másodrendű, ha általánosságban forgási felületen tartozik maradni.

(További példákat és feladatokat a dynamikában, az anyagi pont kényszermozgásánál).

II. Merev rendszerek (testek) kinematikája.

Általános észrevételek a merev pontrendszerek mozgására nézve.

131. §. *A merev rendszer elmozdulása és mozgása, visszavezetve három pont elmozdulására és mozgására.*

1. Jelen elméleti mechanika bevezetésében [12. §.] felemlített beosztás szerint a kinematika e II. részében az oly pontrendszerek elmozdulásának és mozgásának tárgyalásával foglalkozunk, melyek egyes pontjaiknak egymástól való távolai és így viszonylagos helyzetük is, mozgás közben változatlanok maradnak.

2. Minden merev rendszer *helyzete* teljesen meg van határozva, ha *három* (nem egyenesben fekvő) *pontjának* helye a térben adva van; ezt a következő egyszerű megfontolások alapján közvetlenül láthatjuk be:

Ha a rendszer *egy* pontját mozdulatlaná teszszük (rögzítjük), akkor a rendszer e pont körül szabadon foroghat; ha *két* pontja fix, akkor a rendszer az e két pontot egybekapcsoló egyenes (tengely) körül végezhet még forgást; ha még egy pontját (mely nem fekszik ezen egyenesen) teszünk mozdulatlaná, akkor ez a forgás is lehetetlenné van téve, azaz, a rendszer maga is mozdulatlan.

E szerint három, nem egyenesben fekvő pont helyzete a merev rendszer valamenynyi pontjának helyzetét teljesen meghatározza.

Ennek alapján kimondjuk a tételt: A merev rendszer elmozdulása és mozgása vissza van vezetve három, nem egyenesben fekvő pontjának elmozdulására, illetve mozgására.

132. §. *A merev rendszer mozgásának főesetei. Sík-, gömbi-, általános mozgás.*

A merev rendszer mozgásának tárgyalását nagyon könnyítjük, ha egyszerűbb eseteinek tárgyalása megelőzi a legáltalánosabb mozgás vizsgálatát; rendesen a következő főeseteket szokás megkülönböztetni (melyeknél a megelőző mindig a következőnek speciális, egyszerűbb esete):

1. *A pontrendszer sík mozgását, melynél a rendszer pontjai oly*

pályákat írhatnak le, melyek valamenynyien bizonyos síkkal (a mozgás síkjával) párhuzamos síkokban fekszenek, avagy, melynél a rendszer azon pontjai, melyek valamely időpillanatban bizonyos, meghatározott síkhoz párhuzamos síkban fekszenek, mozgás közben mindig ugyanabban a síkban maradnak.

2. A *pontrendszer gömbi mozgását*, melynél a rendszer egyik pontja szilárd és így a többi pontok csak oly pályákat írhatnak le, melyeknél a nevezett fixponttól való távolságaik változatlanok maradnak, azaz, a rendszer minden pontja egy-egy meghatározott, a szilárd ponttal közös középpontú gömbfelületen marad.

3. A *pontrendszer általános mozgását*, melynél a merev rendszer elmozdulása és mozgása semmiféle feltételnek nincs alávetve. E mozgás tárgyalása a sík és a gömbi mozgások eredményei alapján történik.

133. §. *Merev rendszerek translációja (önmagához párhuzamos elmozdulása) és egyszerű (tengely körüli) rotációja (forgása).*

A következőkben a merev rendszerek két nevezetes mozgási módját említjük meg, melyből ezek legáltalánosabb mozgását tehetni össze.

1. *Translációt* szenved a merev rendszer, ha valamenynyi pontjának elmozdulása nagyságra nézve egyenlő, irányra nézve párhuzamos; ily elmozdulás létesíthető a rendszer oly helyzetváltoztatása által, melynél a rendszer helyzete mindig önmagához párhuzamos marad.

2. *Egyszerű forgást* mutat a merev rendszer, ha két pontja szilárd és így a kettőt egybekapcsoló egyenes vonal (*tengely*) és a rajta fekvő valamenynyi pont is szilárd helyzetű. Ekkor a rendszer minden pontja oly körpályát írhat csak le, melynek síkja a tengelyre merőleges, középpontja pedig a tengelybe esik. A forgás *előjelére* nézve a vectornyomatéknál [24. §., 10a. ábra] tett megállapodások érvényesek.

A tengely körüli forgást rendszeresen csak forgásnak nevezik; ez a szilárd pont körüli véges nagyságú forgással [131. §. 2. pontja] mint mozgással általánosságban nem egyenértékű, habár a kétféle forgás elmozdulási eredménye egymással egyenértékű lehet.

A. MEREV RENDSZEREK SÍK MOZGÁSA.

A sík mozgásról általánosságban.

134. §. *Sík mozgás jellemző feltétele. E mozgás visszavezetése két pont mozgására.*

A merev rendszer, ha *sík* mozgást végez, azon feltételnek felel meg, hogy minden elmozdulása bizonyos, szilárd fekvésű síkhoz párhuzamosan megyen végbe. E sík a *mozgás síkja*.

A mozgás ezen korlátozását másként is fejezhetjük ki. Így: A rendszer bármely három (nem egyenesben fekvő) pontján át fektetett sík hajlásszöge a mozgás síkjához mindig ugyanaz marad; vagy még: minden pont távolsága a mozgás síkjától a mozgás tartama alatt változatlan marad.

A pontrendszernek a mozgás síkjával való metszete (szelvénye) síkbeli geometriai alak, melyet görbe vonal határol; ezen metszet mozgás közben mindig a mozgás síkjában, azaz saját síkjában marad. E metszet helyzete és mozgása egyszersmind az egész merev rendszer helyzetét és mozgását is határozza meg; ezért elegendő, ha csak ezen síkbeli alaknak a mozgás síkjában való elmozdulásával és mozgásával foglalkozunk.

Ámde e síkbeli alak *helyzetét* a mozgás síkjában teljesen ismerjük, ha *két pontjának* helyzete adva van. Ugyanis az alak *egy* pontját a mozgás szilárd síkjához erősítve (rögzítve), az alak saját síkjában e pont körül foroghat; az alak még egy pontját mozdulatlanná téve, mozgás lehetetlen és így állításunk be van bizonyítva. E szerint visszavezetjük a merev rendszer sík mozgását tetszőleges két pontjának sík mozgására.

1. Véges és elemi elmozdulások helyettesítése forgások által. Momentán (instantán) centrum.

135. §. *A sík elmozdulás mindig helyettesíthető e síkban végbemenő forgás által; e forgás jellemzőinek meghatározása.*

1. *Geometriai eljárás.* Legyen *A* és *B* a megelőző §-ban említett sík metszet (szelvény) két pontja és *AB* (88. ábra) az ezeket egybe-

kapcsoló egyenesnek helyzete tetszőleges időpillanatban. Bizonyos idő múlva a rendszer helyzete akként változott, hogy a nevezett vonal $A'B'$ fekvésű; e szerint az AB helyzetből elmozdulás történt $A'B'$ helyzetbe és ezen egyenesek *helyzetkülönbsége az AB vonalnak elmozdulása*.

Ezt az elmozdulást forgás által helyettesíthetjük.

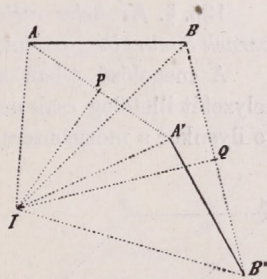
Ugyanis, AA' és BB' vonalak képviselik az A és B pontok elmozdulásait; felezzük ezeket az egyeneseket és emeljünk felező pontjaikban, P -ben és Q -ban e vonalakra merőlegeseket.

Ezek egymást I pontban metszik. A szerkesztés természete szerint:

$$\overline{AI} = \overline{A'I}, \quad \overline{BI} = \overline{B'I}, \quad \overline{AB} = \overline{A'B'}.$$

Ezért az AIB háromszög egybevágó az $A'IB'$ háromszöggel és az utóbbit az előbbi segítségével akként nyerjük, hogy az AIB háromszöget I körül az (AIA') vagy a (BIB') szöggel forgatjuk.

Ennek értelmében a merev rendszer tetszőleges sík elmozdulása oly forgás által helyettesíthető, melynek tengelye a mozgás síkjára merőleges. Az I pont a forgás középpontja (sokszor pólusa) és az $(AOA') \hat{=} (BOB') \hat{=}$ a forgás szöge; ezek a forgást teljesen megadják és ezért a forgás jellemzőinek (meghatározó részeinek) mondatnak; ezeket a geometriai szerkesztésből találjuk. A forgás középpontja a síkban két adat (két coordináta), a forgás szöge egy adat (a szög értéke) által van megadva; e szerint a sík forgást összesen három jellemző meghatározó rész adja meg.



88. ábra.

2. *Analytikai eljárás.* Jeleljék x_1, y_1 az A , x_2, y_2 a B pont derékszögű coordinátáit; az elmozdulás után x'_1, y'_1 az A' , x'_2, y'_2 a B' pontéit (88. ábra); ezeket adottaknak tekintjük és segítségével azon forgás jellemzőit kívánjuk kifejezni, mely ugyanezt az elmozdulást létesíti; legyenek e forgás középpontjának coordinátái a, b és a forgás szöge ϑ .

Az A és A' , valamint a B és B' helyzetekre nézve [a Math. repertorium 50. §. (1) egyenlete szerint] áll:

$$\left. \begin{aligned} x'_1 - a &= (x_1 - a) \cos \vartheta - (y_1 - b) \sin \vartheta, \\ y'_1 - b &= (x_1 - a) \sin \vartheta + (y_1 - b) \cos \vartheta; \\ x'_2 - a &= (x_2 - a) \cos \vartheta - (y_2 - b) \sin \vartheta, \\ y'_2 - b &= (x_2 - a) \sin \vartheta + (y_2 - b) \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (1)$$

Ezekből, vagy közvetlenül is:

$$\left. \begin{aligned} (x'_2 - x'_1) &= (x_2 - x_1) \cos \vartheta - (y_2 - y_1) \sin \vartheta \\ (y'_2 - y'_1) &= (x_2 - x_1) \sin \vartheta + (y_2 - y_1) \cos \vartheta \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (2)$$

Az (1) bármely csoportjából, az alsó indexek elhagyásával:

$$\begin{aligned} x' &= a(1 - \cos \vartheta) + b \sin \vartheta + x \cos \vartheta - y \sin \vartheta; \\ y' &= b(1 - \cos \vartheta) - a \sin \vartheta + x \sin \vartheta + y \cos \vartheta; \end{aligned}$$

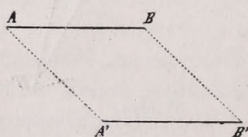
avagy, csekély összevonás után:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{2}(x' + x) - \frac{1}{2}(y' - y) \cotg \frac{1}{2} \vartheta; \\ b &= \frac{1}{2}(y' + y) + \frac{1}{2}(x' - x) \cotg \frac{1}{2} \vartheta; \\ \operatorname{tg} \vartheta &= \frac{(x_2 - x_1)(y'_2 - y'_1) - (y_2 - y_1)(x'_2 - x'_1)}{(x_2 - x_1)(x'_2 - x'_1) + (y_2 - y_1)(y'_2 - y'_1)} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (3)$$

miáltal a forgás keresett három jellemzője meg van határozva.

136. §. *Kivételes esetek. Transzláció, haladó elmozdulás (a rendszernek önmagához párhuzamos elmozdulása).*

A megelőző §-ban adott szerkesztés a forgás középpontjának helyzetét illetőleg csak néhány kivételes esetben nem alkalmazható; de ilyenkor a mozgás természete önként vezet a kívánt eredményhez.

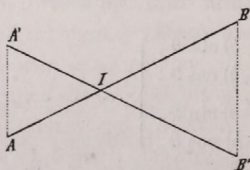


89. ábra.

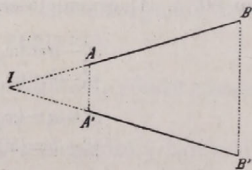
1. Így, midőn az AB és $A'B'$ helyzetek párhuzamosak (89. ábra), ez azt jelenti, hogy a rendszer önmagához párhuzamos elmozdulást szenvedett és így minden pontjának elmozdulása egyenlő nagyságú, párhuzamos irányú. Ily elmozdulást haladónak vagy a rendszer translációjának nevezzük.

A szerkesztést ezen esetre alkalmazva, végtelen távolba eső forgási középpontot nyerünk, azaz: a transláció helyettesíthető végtelen távolságban lévő középpont körül történő végtelen kicsiny szögű forgás által.

2. Másnemű idetartozó két esetet a mellékelt 90a és 90b ábrák



90a. ábra.



90b. ábra.

mutatnak; ezeknél a forgás középpontja az AB egyenesben vagy annak folytatásában fekszik; helyzete a mozgás természetéből önként következik.

137. §. *Véges forgás. Végtelen kicsiny (elemi vagy momentán, instantán) forgás. A momentán (instantán) centrum.*

1. A sík elmozdulás tetszőleges lehet, de az út, a melyen a mozgás végbemegy általánosságban véve, különbözni fog attól az úttól, melyet a rendszer pontjai az O körüli forgás következtében írnának le.

Így (91. ábra) az A pont tényleges útja legyen az AA_1A' ív, a B útja a BB_1B' ív; ellenben a forgás I középpontja (pólusa) körüli forgásnál az A befutná az Aa_1A' -t, a B a Bb_1B' körívet.

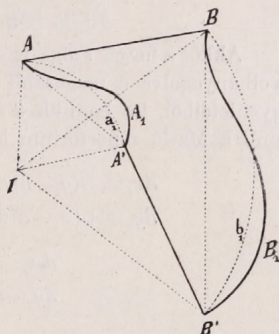
A tényleg befutott út és a forgásnak megfelelő út között e szerint, a véges elmozdulásnál véges különbség is létezik; de az AB kezdeti helyzet és az $A'B'$ véghelyzet mindegyiknél ugyanaz és ezért a véges forgás csak az elmozdulást (a két helyzet különbségét), de a mozgást magát általánosságban véve nem helyettesítheti.

2. De a nevezett különbség annyival kisebb, mennél kisebbek az AA' s BB' elmozdulások; ha ezek végtelen kicsinyek: akkor [16. §.] az elmozdulás mindenkor egybeesőnek tekinthető a ténylegesen befutott útelemmel; itt egyszersmind és egyidejűleg az AA_1A' , és az Aa_1A' ívek egybeesnek az AA' elmozdulással, valamint a BB_1B' és Bb_1B' ívek a BB' elmozdulással.

A forgás I középpontjának szerkesztése a végtelen kicsiny elmozdulásokra nézve ugyanaz, mint előbb; de ezen középpont (pólus) most azon fontos tulajdonsággal bír, hogy a körüle történő, végtelen kicsiny szögű forgás (elemi forgás) közben leírt útelemek teljesen egybeesnek a tényleges mozgás közben befutott útelemekkel.

A forgás I középpontja ilyenkor csak egy elemi elmozdulásra érvényes; a megfelelő forgás pillanati (momentán vagy instantán) forgásnak, a középpont pedig a pillanati forgás középpontjának, momentán (instantán) centrumnak (sokszor momentán pólusnak is) neveztetik. Ennek jellemzői a középpont helyzete és a forgás szöge.

Ha a pillanati forgás tengelye ismeretes, egyszersmind a rendszer minden pontjára nézve a pillanati mozgás iránya is adva van; mert minden pont mozgásának iránya a tőle a tengelyre bocsá-



91. ábra.

tott r merőlegessel derékszöget képez és a mozgás síkjához párhuzamos. Ha ezenkívül még a rendszer *egyik* pontjának sebessége adva van, akkor valamenynyi többi pont sebessége is adva van, mert a pontok pillanati sebességei egyenesen arányosak a tengelytől való távolsággal.

A pillanati forgás szögsebessége, ω , a merev rendszer minden pontjára nézve ugyanaz, e szerint a pontok sebessége mindig egyenlő az ω szorzattal.

3. A momentán forgás jellemzőinek meghatározására nézve megjegyzendő, hogy elemi elmozdulásnál az A és A' ; a B és B' koordinátáira nézve a 135. §. 2. pontja jelölésével

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= x_1 + dx_1 \\ y'_1 &= y_1 + dy_1 \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} x'_2 &= x_2 + dx_2 \\ y'_2 &= y_2 + dy_2 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (1)$$

Akkor a forgás szöge is csak végtelen kicsiny lehet; jelevé ezt $d\vartheta$ -val és elhanyagolva a magasabb rendű kicsiny értékeket, a 135. §. (1) és (2) egyenleteiből, ha bennük ϑ helyébe $d\vartheta$ -át teszünk [vagy még közvetlenül a Math. repertórium 50. §. (1) formulájából is] rendre származik:

$$\left. \begin{aligned} dx_1 &= -(y_1 - b) d\vartheta \\ dy_1 &= +(x_1 - a) d\vartheta \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} dx_2 &= -(y_2 - b) d\vartheta \\ dy_2 &= +(x_2 - a) d\vartheta \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} dx_2 - dx_1 &= -(y_2 - y_1) d\vartheta \\ dy_2 - dy_1 &= +(x_2 - x_1) d\vartheta \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (3)$$

Ezenkívül az \overline{AB} változatlan hosszúság lévén, négyzetének változása zérus, azaz:

$$(x_2 - x_1)(dx_2 - dx_1) + (y_2 - y_1)(dy_2 - dy_1) = 0 \quad \dots \quad (4)$$

Nyerjük így (3)-ból, (2)-ből és (4)-ből:

$$\left. \begin{aligned} d\vartheta &= -\frac{dx_2 - dx_1}{y_2 - y_1} = +\frac{dy_2 - dy_1}{x_2 - x_1} = d\vartheta \\ a &= \frac{x_1 dy_2 - x_2 dy_1}{dy_2 - dy_1} = \frac{x_1(dx_2 - dx_1) + (y_2 - y_1) dy_1}{dx_2 - dx_1} \\ b &= \frac{y_1 dx_2 - y_2 dx_1}{dx_2 - dx_1} = \frac{y_1(dy_2 - dy_1) + (x_2 - x_1) dx_1}{dy_2 - dy_1} \end{aligned} \right\}; \quad \dots \quad (5)$$

miáltal a forgás a , b , $d\vartheta$ jellemzői az \overline{AB} elemi elmozdulásának jellemzői által ki vannak fejezve; vagy még a (2)-ből, megegyezésben a 135. §. (3) formuláival:

$$a = x_1 - \frac{dy_1}{d\vartheta}, \quad b = y_1 + \frac{dx_1}{d\vartheta}, \quad \dots \quad (6)$$

hol az $_1$ index el is hagyható, mert a és b a mozgó rendszer minden pontjára nézve ugyanaz.

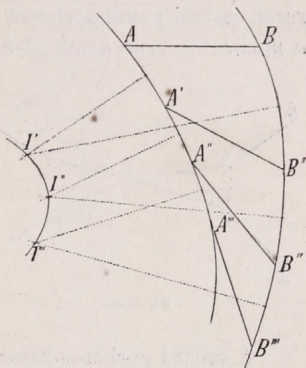
138. §. *A sík mozgás mint pillanati forgások egymásutánja. A momentán (instantán) centrumok vagy pólusok görbéje, vagy a póluspálya.*

Legyen a különben tetszőleges sík mozgás olyan, hogy az A és B pontok pályáját (92. ábra) az $AA'A''A''' \dots$ és a $BB'B''B''' \dots$ görbék képviseljék; és legyenek $AB, A'B', A''B'', A'''B''' \dots$ az AB egyenesnek egymásra következő helyzetei. A mozgást ennek megfelelőleg kisebb részekből összetettnek tekintjük és a minden egyes részhez tartozó forgás középpontját, pólusát, $I', I'', I''' \dots$ a 135. §. 1. pontja szerint megszerkeszthetjük.

Ha most az $AA', A'A'' \dots BB', B'B''$ íveket folytonosan kisebbeknek választjuk: a forgások pillanati forgások lesznek és ezek középpontjai folytonosan közelebb jutnak egymáshoz és ha ezek az ívelemek végtelen kicsinyek, egy folytonos görbét, $I'I''I''' \dots$ képeznek, mely a pillanati forgások középpontjai (a momentán [instantán] centrumok) görbéje, avagy a pólus pályája.

Ezen görbének, mint az szerkesztéséből kitűnik, a pontok tényleges pályájával való összefüggése a következő: Bármely pontját a görbének egybekapcsolva a mozgó sík alak tetszőleges A, B, \dots pontjának hozzátartozó pályaelemével, az egybekapcsoló egyenes mindig az A, B, \dots pályája normálisában fekszik.

Evvel ki van mutatva, hogy a merev rendszer sík mozgása mindig helyettesíthető momentán (instantán) forgások egymásutánja által.



92. ábra.

2. Sík görbék (póluspályák) egymáson való gördülése. Ruletták.

Kinematikai lánczok. Mechanismusok.

139. §. *Minden sík mozgás párhuzamos hengerek, vagy a pólusgörbék egymáson való gördülése által helyettesíthető.*

1. A sík elmozdulást véges forgások egymásutánjának tekintve (137. §.), legyen $\dots I, I', I'' I''' \dots$ a momentán-centrumok polygonja, mely a mozgás síkjában fekvő, meghatározott, változatlan és nyugvó alak (93. ábra).

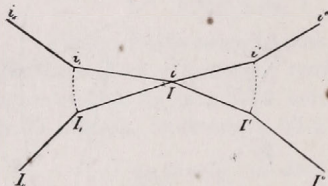
Legyenek $\dots i, i', i'', i''' \dots$ a mozgó merev rendszer sík metszetének (szelvényének) azon pontjai, melyek, e metszettel együtt mozogva, egymásután egybeesnek a momentán pólusok $\dots I, I', I, I', I, I' \dots$

I' , I'' ... helyzeteivel, úgy hogy pl. i' az I' -be esvén, az I' körül a sík metszet addig fog forogni, míg az i'' pont egybeesik a következő forgásnak I'' középpontjával s í. t.

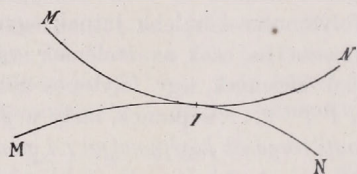
Itt áll $i, i' = I, I'$; $i, i' = I, I'$; $i'' = I''$; $i' i'' = I' I''$ s í. t.

E mozgás azonos avval a mozgással, mely létesül, ha a sík metszettel mereven egybekapcsolt $i, i, i' i''$... polygon a szilárd (nyugvó) $I, I, I' I''$... sokszögön gördül.

2. Helyettezve a sík mozgást momentán forgások egymásutánjával, az említett polygonok folytonos görbékbe mennek át; evvel ki van mutatva, hogy minden sík mozgás a rendszer sík metszetével mereven egybekapcsolt görbének egy síkjában fekvő másik, szilárd görbén, a momentán centrumok görbéjén való gördülése által létesíthető.



93. ábra.



94. ábra.

A szilárd görbét sokszor *alap- (básis) görbének* vagy *szilárd póluspályának* nevezik, a mozgót *gördülő görbének (roulante)* vagy *mozgó póluspályának*; ezeket ezentúl **MN**- és **MN**-el jeleljük (94. ábra).

3. Ezek alapján a sík mozgás oly párhuzamos tengelyű hengerek gördülésének tekinthető, melyek haránt metszeteit (szelvényeit) az alap-, illetve a gördülő görbe alkotják, míg tengelyeik a mozgás síkjára merőlegesek.

140. §. A *básis (alap-) görbe és a gördülő görbe (roulante) egyenlete, ha a rendszer mozgása ismeretes. A gördülés analitikai előtűntetése.*

Legyen (95. ábra) XOY a nyugvó, X, O, Y , a rendszerrel együtt mozgó koordináta-rendszer (melyet sokszor *elszállító rendszernek* neveznek); az O , összkendezői az XY rendszerben p és q ; az I tetszőleges momentán-centrumai az XY -ben ξ és η , az X, Y -ben ξ , és η ; végre legyen az OX és az O, X , tengelyek által képzett szög ϑ .

1. Az I az MN bázisgörbe tetszőleges pontja és egyszersmind momentán-centrum; összkendezői a 137. §. (6) egyenlete szerint, ha ott az O , pont p és q koordinátáiból indulunk ki:

$$\xi = p - \frac{dq}{d\vartheta}; \quad \eta = q + \frac{dp}{d\vartheta} \quad (1)$$

$$-\frac{dq}{d\vartheta} = \xi, \cos \vartheta - \eta, \sin \vartheta, \quad +\frac{dp}{d\vartheta} = \xi, \sin \vartheta + \eta, \cos \vartheta,$$

miből

$$\xi, = -\frac{dq}{d\vartheta} \cos \vartheta + \frac{dp}{d\vartheta} \sin \vartheta, \quad \eta, = +\frac{dq}{d\vartheta} \sin \vartheta + \frac{dp}{d\vartheta} \cos \vartheta. \quad (4)$$

A ξ , és η , az I momentán-centrum koordinátái az X, Y , mozgó rendszerben; itt is adottnak tekintjük a rendszer mozgását és így a (4) kifejezések jobb oldalai az időnek (esetleg a független változónak tekintett ϑ -nak) ismert és adott függvényei; ezekből a függetlent eliminálva, nyerjük az M/N görbe egyenletét a mozgó X, Y -rendszerben.

Legyen t_0 időpillanatban a rendszerrel mozgó koordinátatengelyek fekvése $O_0 X_0$ és $O_0 Y_0$, az (95. ábra); O_0 koordinátái p_0 és q_0 és ϑ_0 az OX és $O_0 X_0$ között lévő szög. Legyen továbbá i a rendszer azon pontjának t_0 -kori helyzete, mely t időben, a gördülés folyamában, egybeesik az I ponttal, e szerint az i koordinátái az $X_0 Y_0$ -ban szintén ξ , és η , míg az XY -ben legyenek Ξ és H , azaz:

$$\Xi = p_0 + \xi, \cos \vartheta_0 - \eta, \sin \vartheta_0; \quad H = q_0 + \xi, \sin \vartheta_0 + \eta, \cos \vartheta_0. \quad (5)$$

Amde (4) szerint ξ , és η , a független t (vagy a ϑ) függvényei; ha ezek (4)-ből (5)-be helyettesítetnek és (5)-ből a függetlent elimináljuk, származik

$$\Phi(\Xi, H) = 0, \quad (6)$$

mint a gördülő görbe egyenlete a szilárd XY rendszerben.

3. Hátra van még annak a bebizonyítása, hogy a $\varphi(\xi, \eta) = 0$ és a $\Phi(\Xi, H) = 0$ görbék a tetszőleges $t_0 = t$ időpillanatban nem csak közös I ponttal bírnak, hanem közös érintővel is.

Ugyanis, ϑ lévén a független változó, (1)-ből:

$$d\xi = \left(\frac{dp}{d\vartheta} - \frac{d^2q}{d\vartheta^2} \right) d\vartheta; \quad d\eta = \left(\frac{dq}{d\vartheta} + \frac{d^2p}{d\vartheta^2} \right) d\vartheta; \quad (7)$$

míg (5)-ből

$$d\Xi = d\xi, \cos \vartheta_0 - d\eta, \sin \vartheta_0; \quad dH = d\xi, \sin \vartheta_0 + d\eta, \cos \vartheta_0. \quad (8)$$

és (4)-ből

$$\left. \begin{aligned} d\xi, &= \left(-\frac{d^2q}{d\vartheta^2} + \frac{dp}{d\vartheta} \right) \cos \vartheta d\vartheta + \left(\frac{dq}{d\vartheta} + \frac{d^2p}{d\vartheta^2} \right) \sin \vartheta d\vartheta = +d\xi \cos \vartheta + d\eta \sin \vartheta \\ d\eta, &= \left(+\frac{d^2q}{d\vartheta^2} - \frac{dp}{d\vartheta} \right) \sin \vartheta d\vartheta + \left(\frac{dq}{d\vartheta} + \frac{d^2p}{d\vartheta^2} \right) \cos \vartheta d\vartheta = -d\xi \sin \vartheta + d\eta \cos \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Ha most tesszük $t = t_0$, azaz $\vartheta = \vartheta_0$, akkor (9)-ből helyetteszve $d\xi$ -et és $d\eta$ -et (8)-ba, azonnal ered:

$$\left. \begin{aligned} d\Xi &= d\xi; & dH &= d\eta, \\ \text{avagy} & & \frac{d\eta}{d\xi} &= \frac{dH}{d\Xi}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

A görbék e szerint az I pontban közös érintővel bírnak és így tényleges gördülés következik be.

Az alap- és a gördülő görbe ívelemei itt

$$d\sigma = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}; \quad d\Sigma = \sqrt{d\xi^2 + dH^2},$$

vagy (10)' szerint, mely egyenlet a gördülés jellemzője,

$$\sigma = \Sigma + \text{constans} \dots \dots \dots (10a)$$

141. §. *Ruletták mint a rendszer pontjainak pályái. Paramétereik. Egyenletük.*

1. A gördülés közben a merev rendszer minden egyes pontja pályát ír le; ezt *rulettának* nevezik. A ruletta általánosságban minden pontra nézve más alakú, de ugyanoly jellegű görbe.

Ugyanis a görbe, melyet a sík alak (a keresztszelvény) valamely A pontja leír, egyrészt a szilárd MN görbe és a rajta gördülő MN görbe alakjától, másrészt pedig az A pontnak az MN síkbeli görbéhez viszonyított helyzetétől függ. Ezt a helyzetet az MN -re vonatkozó két koordináta adja meg, mely a pont rulettájának két parametere.

2. Legyen (95. ábra) A a rendszer tetszőleges pontja, és O , a rendszer meghatározott pontja, melynek pályája ismeretes; az A koordinátái az XY álló rendszerben x és y , az X, Y , mozgó (elszállító) rendszerben x , és y ,; az O , koordinátái az XY rendszerben (mint a 140. §-ban) p és q , mely utóbbiakat ismereteseznek tekintjük.

A 140. §. 2. pontjának első két formulája szerint áll:

$$\left. \begin{aligned} x &= p + x, \cos \vartheta - y, \sin \vartheta \\ y &= q + x, \sin \vartheta + y, \cos \vartheta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Itt az x , és y , mozgás közben állandók, ellenben p , q , ϑ változók és egy független (akár t , akár ϑ) által kifejezvék.

Eliminálva (1)-ből a függetlent, nyerjük az

$$f(x, y, x, y) = 0 \dots \dots \dots (2)$$

alakú egyenletét az A pont rulettájának, melyben x , és y , a két paraméter.

Az X, Y , rendszer O , kezdetét célszerű olyformán választani, hogy rulettája lehetőleg egyszerű legyen; egyenlete a (2) szerint

$$f(p, q, 0, 0) = 0 \dots \dots \dots (2a)$$

Így valamely egyenesen gördülő kör középpontja egyenest ír le, a körön gördülő-é kört, ezért célszerű a gördülő kör középpontját O -nak választani s i. t. a többi esetekben.

142. §. *A sík gördülő mozgás problémájának különböző fogalmazása.*

A merev rendszer sík mozgását a szerint fogalmazhatjuk különbözőképen, a mint a mozgásnak más és másnemű jellemzői advák.

1. Ha a rendszernek sík mozgása teljesen adva van, akkor kereshető *a)* a momentán középpontok **MN** görbéje (az alapgörbe), *b)* az **MN** gördülő görbe.

2. A megfordított eset az, midőn az **MN** szilárd- és az **MN** gördülő görbe adva van és a sík mozgást keressük.

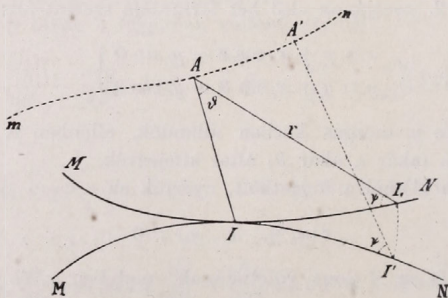
3. Adva van a sík alak (a rendszer keresztmetszete) egy **A** pontjának a pályája (rulettája) és az **MN** gördülő görbe; keresendő a hozzátartozó **MN** alapgörbe és vele együtt a sík mozgás.

4. Adva van a rendszer **A** pontjának *rulettája* és az **MN** alapgörbe, keresendő a hozzátartozó **MN** gördülő görbe és evvel a sík mozgás s i. t.

A példák között tárgyalandó egyes esetekben [147—155. §§.] a nevezett szempontokat kiemelni fogjuk.

143. §. *Adva van egy ruletta és az alapgörbe, határoztassék meg a gördülő görbe.*

A megelőző §. 4. pontja esetére nézve egy nevezetes, egyszerű tétel áll fenn, mely sok esetben a probléma megoldását nagyon megkönnyíti.



96. ábra.

Legyen **MN** az alapgörbe, *mn* az ismeretes ruletta és **MN** a keresendő gördülő görbe (96. ábra). A rajzolt helyzetben **I** a momentán centrum, **A** a rulettát leíró pont, és **AI**, az **A**-ból az **MN** görbének azon **I**, pontjához húzott *r* vonsugár, mely az **I**-hez húzott érintővel ψ szöget, az **AI** egyenessel pedig φ szöget képez.

Gördülés közben **AII**, merev alak helyzetét változtatja; legyen **A'I'** az **AI**-nek az a helyzete, mikor **I**, pont **I'**-vel egybeesik és egy-

Ezenkívül: $PA=y=r \sin \psi$; ezért (1)-ből

$$\cotg \psi = 1 : f \left(\frac{y}{\sin \psi} \right) \quad (3)$$

Egyesítve (3) a (2)-vel, azonnal nyerjük:

$$\frac{dy}{dx} f \left(\frac{y}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}} \right) = 1 \quad (4)$$

Ez az A pont rulettájának differenciálegyenlete. (V. ö. a 200. §. 22. és 24. feladatát.)

145. §. Kinematikai lánczok (tagozatok) és mechanismusok. Négytagú lánczok mozgása.

1. Vegyünk több oly merev pontrendszert szemügyre (melyek merev testek diagrammjai legyenek), melyek egymással csuklóokban forgathatólag vagy ürekben egymásban sikolhatólag vannak egybekapcsolva, és melyek mindegyike a többihez képest a kapcsolat természetével megengedett csak *egy-egy* relativ mozgást végezhet.

Példa ily kapcsolatra a gőzgép dugattyúrúdja, mely a gőzhenger tengelye mentén sikolván, egy hajtó rúddal és ez egy forgatyuával áll kapcsolatban, vagy egymásba kapaszkodó fogazott kerek és csavarorsó és csavartok s i. t.

Ily merev rendszerek *zárt* lánczolatát REULEAUX szerint *zárt kinematikai láncznak* nevezik; minden egyes merev részét *kinematikai tag*nak. Vannak kinematikai lánczok, melyeknél valamenynyi tag mozgása egy síkban történik, ezeket *sík kinematikai lánczoknak* nevezik; ellenkező esetben *térbeli kinematikai lánczoknak*.

Ha a kinematikai láncz bármely tagját rögzítjük (szilárddá, mozdulatlaná tesszük): akkor ez által a többi tagoknak a rögzítettthez viszonyított *relativ* mozgása *absolut* mozgássá lesz s e mozogható tagok egyikének a mozgása maga után vonja és meghatározza a többiekét; ily esetekben a kinematikai lánczot *mechanismus*-nak nevezik.

2. A kinematikai lánczok tagjainak forgás-középpontja a láncz természetéből önként adódik.

Így a 98a. ábrában elötüntetett lánczolatnál az \overline{AB} és \overline{DC} oly tagok, melyek csak a rögzített AD tagnak A -, illetve D végpontjai körül foroghatnak, és így B mozgása az \overline{AB} -re, C -é a \overline{DC} -re merőleges lévén, a közbenső BC tag forgás-középpontja I , mely az \overline{AB} és a \overline{DC} egyenesek folytatásának metszőpontja és melyből az A -hoz és a B -hez vont IA és IB vezérsugarak mindig merőlegesek e pontok mindenkori mozgásirányaira [137. §. 2. pontja].

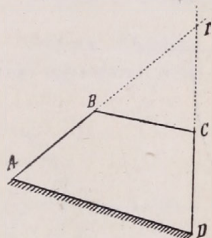
Hasonlóan találjuk a 98b. ábrának megfelelő lánczolatnál a I -t mint a BA és a CD egyenesek metszőpontját.

Ha a láncznak csak végtelen kicsiny mozgását tekintjük, nagyon könnyű az egyik tagnak, pl. AB -nek $d\vartheta_1$ szögű forgása által a másik, pl. CD tagnak $d\vartheta_2$ szögű forgását meghatározni.

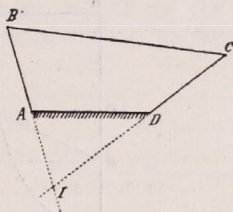
Ugyanis $d\vartheta_2$ -vel jölölve a BC -nek megfelelő, I körüli elemi forgást, áll a B és a C pontok előmozdulására nézve: $ABd\vartheta_1 = IBd\vartheta$; $ICd\vartheta = DCd\vartheta_2$; ebből

$$d\vartheta_2 = \frac{AB}{IB} \cdot \frac{IC}{DC} d\vartheta_1, \dots \dots \dots (1)$$

mint a két tag elemi forgásának (és szögsebességeinek) viszonya.



98a. ábra.



98b. ábra.

146. §. *Többszágú kinematikai lánczok. Egyenes vezetés. Egyenesben vezetők.*

1. Ha a kinematikai láncz több mint négy egymásután sorba következő tagból áll, akkor egy tagját rögzítve, a mozogható tagok egyikének mozgása még nem határozza meg teljesen a többi tagok mozgását.

Ez csak akkor történhetik, ha a láncz tagjainak mozgása, a láncz által létesített korlátozásokon kívül még anynyi feltételnek van alávetve, a menynyi a láncz tagjainak négygyel kevesbített száma.

Ilyen feltételek például, hogy a középső tagok valamely könyöke (csapja) vagy a láncz végpontja csak bizonyos görbe mentén mozoghat, vagy, hogy a középső tagok valamelyikének egyik pontja *szilárd* és így a tag csak e pont körül foroghat s í. t.

Ezen feltételek által a láncz mozgása akként korlátoztatik, hogy a belőle keletkezett mechanizmus *egyik* tagjának mozgása által a többi tagok mozgása teljesen meg van határozva.

2. Sokszor kívánatos, egy adott görbevonallú (rendesen kör-) mozgást egyenes vonalúvá változtatni vagy viszont. Midőn a görbevonallú mozgás kinematikai láncz segélyével szigorúan vagy igen közelítőleg egyenes vonalúvá lesz változtatva, ezen átvitelt *egyeses* vezetésnek, magát az ezt létesítő ily mechanizmust pedig *egyesesben vezetőnek* nevezik.

b) Vizsgáljuk meg az AB tetszőleges D pontjának pályáját.

Jeleljék a D összkendőit x és y ; továbbá legyen $\overline{AD}=b$; $\overline{BD}=a$, akkor a 99. ábra szerint:

$$\sin \psi = \frac{y}{b}; \quad \sin \psi = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a},$$

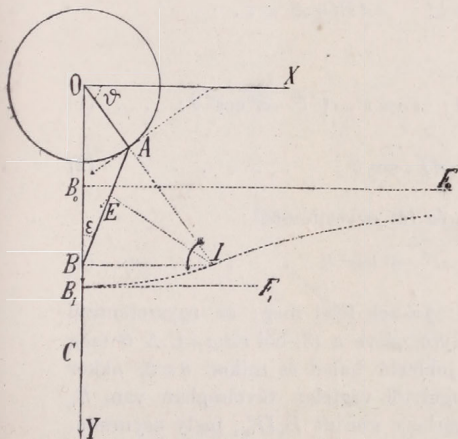
vagy eliminálva $\sin \psi$ -t:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

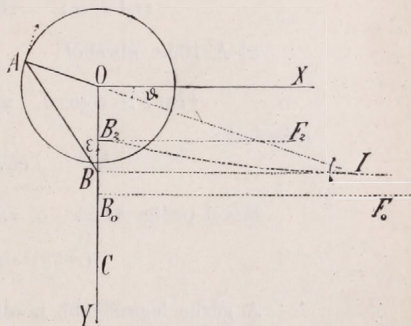
A pálya e szerint *ellipszis*, melynek az X és Y tengelyekhez párhuzamos féltengelyei a és b , középpontja az O (99. ábra).

A vonal C középpontja $\frac{1}{2}l$ sugarú kört ír le O körül.

Jegyzet. A pálya még akkor is ellipszis, ha az OX és OY egyenesek egymással *ferde* szöget képeznek (v. ö. a 199. §. 1. feladatát).



100a. ábra.



100b. ábra.

2. Változatlan hosszúságú vonal egyik végpontja körben, másik végpontja oly egyenesen mozog, mely a kör középpontján megyen át.

A feladat alkalmazható minden oly gépszerkezetre, melynél körmozgást egyenes vonalúvá, vagy egyenes vonalút körmozgássá kívánunk átalakítani.

Legyen (100a. ábra) AB a változatlan hosszúságú vonal, O az OA sugarú kör középpontja, melyen az A végpont mozog, OY az az egyenes, melyen a B végpont tartozik maradni; legyen még: $AB > OB$.

[E példa a kinematikai lánczok (145. §.) egyszerű esetének tárgyalására is alkalmas; ugyanis, ha OA , AB , BC e láncz tagjai és a fel-

tételek azok, hogy OA csak O körül foroghat, míg BC csak az OY egyenes mentén mozoghat, akkor e mechanizmusban az AB mozgása ugyanaz mint a jelen példában.]

Az AB tag végpontjai egyike, az A az OA sugárra merőlegesen, a B ellenben a CB mentén mozoghat csak; emelve az A és B elemi elmozdulásaira a merőlegeseket, ezek I metszőpontja a keresett forgási középpont, mely e szerint mindig az OA sugár folytatásában fekszik. Az I ismeretes lévén, könnyen következik az AB minden pontjának, vagy rajta kívül fekvő, de vele merev kapcsolatban lévő bármily D pontnak sebessége, ha egy pont sebessége ismeretes.

Ugyanis az illető D ponthoz az I -ből egyenest húzva, a pont sebessége merőleges ezen vonsugárra és arányos a DI sugárral (137. §2.).

c) A momentán-centrumok görbáját analitikailag könnyen találjuk. Jeleljék $r = OI$ és ϑ az I polárkoordinátáit; továbbá legyen:

$$OA = a; \quad AB = l; \quad (\angle ABO) = \varepsilon.$$

a) A 100a. ábrából:

$$l \sin \varepsilon = a \cos \vartheta, \quad \text{miből: } l \cos \varepsilon = \sqrt{l^2 - a^2 \cos^2 \vartheta}; \quad \dots (1)$$

másrészt:

$$l \cos \varepsilon = \overline{AI} \cdot \sin \vartheta \quad \dots (2)$$

Mivel pedig $\overline{AI} = r - a$, az (1) és (2) egyesítéséből:

$$(r - a)^2 \sin^2 \vartheta = l^2 - a^2 \cos^2 \vartheta \quad \dots (3)$$

A görbe legmélyebb pontja $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ -nek felel meg; ez egyszersmind a B legmélyebb pontja, a B_1 , melyre nézve a (3)-ból $r = a + l$. A ϑ szög kisebbedésével az I emelkedik és jobbfelé halad és mikor $\vartheta = 0$, akkor e pont a B_0F_0 vonalon, az Y tengelytől végtelen távolságban van, B_0 lévén a B helyzete $\vartheta = 0$ -kor. A görbe e szerint B_1IF_0 , mely aszimptotásan közeledik a B_0F_0 -vonalhoz (100a. ábra).

A $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ és $\vartheta = \pi$ közötti helyzetek momentán-centrumainak görbéje nem egyéb, mint a B_1IF_0 -nak az Y tengelyre vonatkoztatott tükröképe.

Megjegyzendő, hogy a (3) egyenlet csak $\vartheta = 0$ -tól $\vartheta = \pi$ -ig érvényes, azaz csak addig, míg az A pont az OX tengely alatt van.

β) Ha A az OX tengely fölött mozog, akkor az 100b. ábra szerint:

$$\vartheta' = \vartheta - \pi; \quad \overline{AI} = r + a, \quad \overline{AI} \sin \vartheta' = l \cos \varepsilon, \quad l \sin \varepsilon = a \cos \vartheta'$$

és így azonnal nyerjük:

$$(r + a)^2 \sin^2 \vartheta' = l^2 - a^2 \cos^2 \vartheta', \quad \dots (4)$$

mely egyenlet a $\vartheta' = 0$ -tól a $\vartheta' = \pi$ -ig, azaz $\vartheta = \pi$ -től $\vartheta = 2\pi$ -ig érvényes.

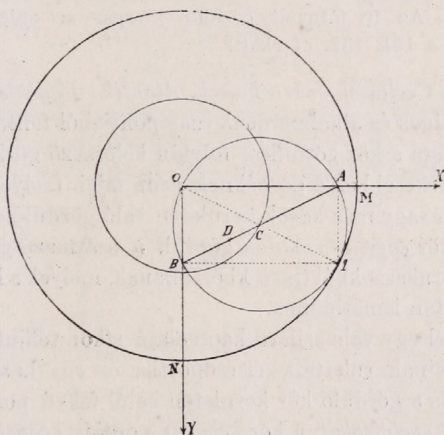
E görberész legmagasabb pontja $\vartheta' = \frac{1}{2}\pi$ -nak felel meg; e pont a B_2 , mely a B legmagasabb helyzete, hol $r = l - a$; ϑ' kisebbedésével az I süllyed és jobb felé halad és $\vartheta' = 0$ -kor az F_0 -ban van.

E szerint a $\vartheta' = 0$ -tól $\vartheta' = \frac{1}{2}\pi$ terjedő mozgás centrumainak görbéje az F_0JB_2 (100b. ábra); a $\vartheta' = \frac{1}{2}\pi$ -tól $\vartheta' = \pi$ -ig terjedő mozgása az előbbinek az Y -tengelyre vonatkoztatott tükröképe.

A (3) és (4) egyenletek által képviselt *hatodrendű* görbéknek derékszögű koordinátákban való kifejezését, ezek részletes értelmezését és graphikai előtüntetését a kezdőnek ajánljuk.

148. §. *Kör gördülése kétszer nagyobb sugarú kör belső kerületén. Az egyenes vezetés egyszerű esete.*

A 147. §. 1. pontjában tárgyalt mozgás igen alkalmas egy speciális, de nevezetes gördülő mozgás tanulmányozására.



101. ábra.

1. Ugyanis itt (101. ábra) az MIN körív a pillanati középpontok görbéje lévén, a 139. §. értelmében úgy tekinthetjük azt, mint az MN szilárd (*alap*) görbét, melyen egy másik, de még ismeretlen görbe gördülése által az AB vonalnak az idézett helyen elért mozgása származik.

E gördülő görbe alakját könnyen találjuk az adott sík mozgásból és az MIN körívből. Ugyanis a mozgás természetéből folyik: α) hogy a gördülő görbe átmegyen az A és B pontokon, mivel a mozgás közben, ezek is érintkezésbe jönnek az MIN görbével, és pedig az A az M -ben, a B az N -ben érintkezik vele. β) a gördülő görbének I pontjához húzva AI és BI egyeneseket, ezek I -ben mindig derékszöget képeznek.

E szerint a gördülő görbe *kör*, melynek C középpontja az AB felező pontja és átmérője az AB és így az AB mozgása egy AB átmérőjű

körnek egy másik, kétszer nagyobb sugarú kör belső oldalán való gördülése által létesítettnek tekinthető.

A 147. §. 1. pontja értelmében a gördülő kör tetszőleges D pontja *ellipsist* ír le, a C középpont AC sugarú kört és a tetszőleges A és B kerületi pontok az OM és ON egyeneseket.

2. Ezen utóbbi körülmény azt mutatja, hogy a tárgyalt gördülő mozgás alkalmas egy köralakú mozgásnak ellipsises vagy egyenes vonalú mozgássá való átváltoztatására.

Ugyanis, a szóban forgó gördülő mozgást tényleg létesíthetjük, ha az MIN egy befelé, az AIB egy kifelé fogazott kereket képvisel, melyek fogai egymásba kapaszkodnak (197. §. I. Jegyzete). Ha most az $AIBO$ kerék középpontját az OC sugarú körben visszük körül, akkor ezen kerék minden tetszőleges D pontja *ellipsist* ír le, melynek tengelyei AD és BD , a kerületi pontok pedig *egyeneseket*; s ez által *egyenes vezetést* érhetni el.

Jegyzet. Az itt tárgyalt gördülő mozgás az epicycloisok speciális esete. (V. ö. a 151, 152. §§-okat.)

149. §. Cycloisok és trochoisok. Alakjuk. Egyenleteik.

Tanulságos és alkalmazásuk szempontjából fontos példák a gördülő mozgásra a kör gördülése folytán keletkező görbék.

Legérdekesebbek e görbéknek azon fajtái, melyek a körnek egyenes vonalon vagy más körök kerületén való gördülésénél keletkeznek.

Ha a kör *egyenes vonalon* gördül, a származó görbék egyenlő és egybevágó szakaszokból (részekből) állanak, melyek a kör minden teljes gördülése után ismétlődnek.

A körrel egy vele szilárd kapcsolatú síkot tekintünk mozgóknak; e sík pontjainak rulettáit két csoportba és egy határesetre osztjuk.

Ugyanis a gördülő kör kerületén belül fekvő pontok *lapos* vagy *megnyújtott cycloisokat*, a kör kerületi pontjai *közönséges cycloisokat*, míg a körön kívül fekvő pontok hurkokkal bíró *megrövidített cycloisokat* az ú. n. *trochoisokait* írják le.

Ilyenmő görbéket egy haladó kocsi kerekeinek pontjai írnak le.

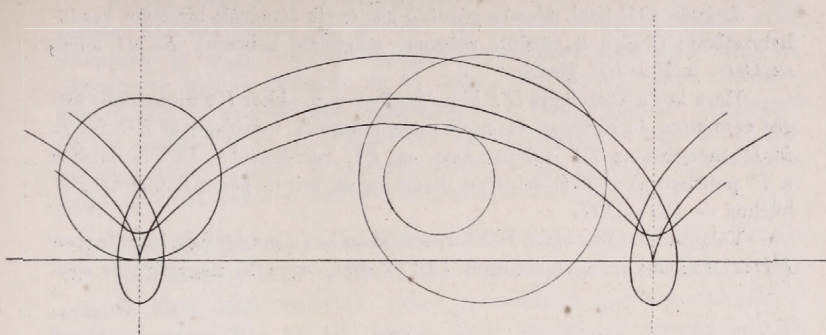
A mellékelt három rajz (102. ábra) elötüntet ugyanazon gördülő kör által létesített megnyújtott cycloist, közönséges cycloist és trochoist.

A görbék egyenletei nagyon egyszerűen következnek.

Legyen (103. ábra) a a gördülő kör sugara és A a középpontjától ϱ távolságban lévő azon pont, melynek rulettáját keressük.

Kiindulunk a körnek azon helyzetéből, melyben A az Y tengelyen van. Ekkor az A ponton átmenő átmérő OP helyzetű. A gördülés bekövetkeztén, a körnek valamly tetszőleges helyzetében ugyanez az átmérő $O'P'$, mely eredeti helyzetének irányával ϑ szöget képez, e szög a *gördülés szöge* és I' a momentán centrum.

Az A helyzete a ϑ gördülési szögnél az A' .

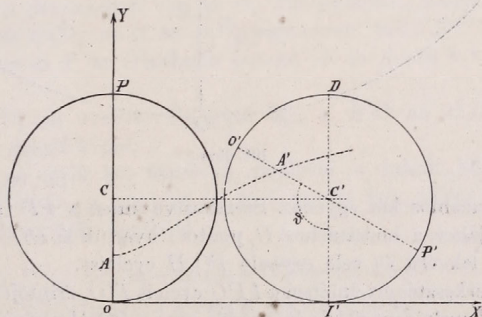


102. ábra.

Mivel $OT = O'T$ ív $= PD = a\vartheta$, az A pont x és y összszerendezői:

$$\left. \begin{aligned} x &= a\vartheta - \rho \sin \vartheta \\ y &= a - \rho \cos \vartheta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Ha $\rho = a$, akkor a közönséges *cyclois* egyenlete származik; ha $\rho < a$, az egyenletek a *megnyújtott cyclois*okat, és végre, ha $\rho > a$, a *trochois*okat képviselik (v. ö. a Math. repertórium 65. §. B. 16 formuláit).



103. ábra.

Jegyzet. Ha a 104. ábra geometriai viszonyaiból indulunk ki, hol szintén $CA = \rho$, $CO = a$, $(I'CO') \angle = \vartheta$, akkor az A' coordinátái:

$$x = a\vartheta + \rho \sin \vartheta; \quad y = a + \rho \cos \vartheta \dots \dots \dots (1a)$$

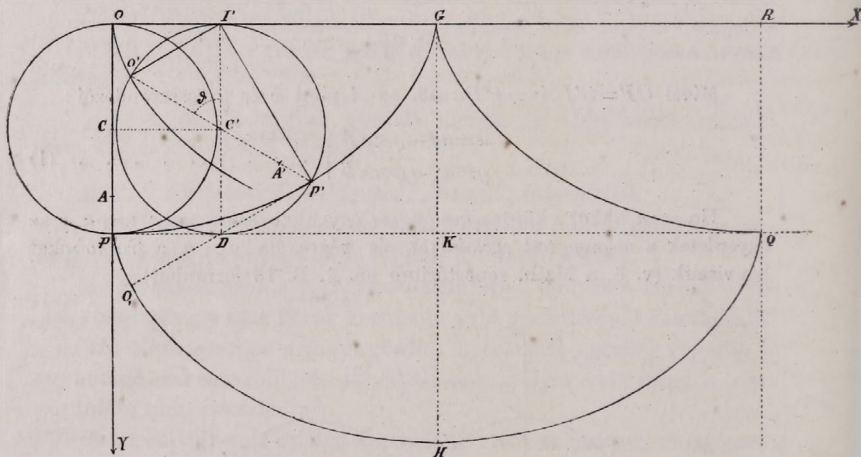
150. §. A közönséges cyclois néhány tulajdonsága.

A közönséges cyclois néhány oly tulajdonsággal bír, melynél fogva e görbe a kinematikában, a mechanikában (itt különösen mint brachystochrone, legrövidebb esés-idejű görbe) fontos.

Legyen OP (104. ábra) a gördülő kör egyik átmérője bizonyos kezdő helyzetben; $O'P$ a 9 gördülő szögnek megfelelő helyzete. Az O leírja az OO' -t, a P a PP' görbét.

Ha a kör a tetszőleges $O'TP'$ helyzetben van, akkor I' a momentán forgás centruma és ezért az O' momentán mozgása merőleges az IO' húrra és P' mozgása az $I'P'$ húrra, azaz, az IP' merőleges a PP' cycloishoz a P' pontban vont PD érintőre. Ezért ez az érintő párhuzamos az IO' húrhoz és $PD = IO'$.

Válaszszuk most ezen PD folytatásában az O_1 pontot úgy, hogy legyen $PD = DO_1$, akkor egyszersmind IO' és DO_1 egyenlő nagyságú és egy-



104. ábra.

máshoz párhuzamos két egyenes. Szerkesztve most a $PP'G$ cyclois minden F' pontjához a hozzátartozó O_1 pontot: nyerjük az $OO' \dots$ cycloishoz párhuzamos fekvésű és vele egyenlő PO_1H cycloist.

Ezen szerkesztés értelmében a $FF'G$ cyclois $F'O_1$ érintője mindig merőleges a FO_1H cyclois megfelelő ívelémére, azaz a PO_1H cyclois a $PP'G$ cyclois lefejtője, evolvens [Math. repertórium 60. §.]. Ezért: PP' ív $= \vec{O_1P} = 2\vec{O_1D} = 2\vec{O'T}$.

Az evolvens és az evoluta sajátosságai értelmében (i. h.) a PO_1 a PH cyclois görbületi sugara az O_1 pontra nézve; ennek legkisebb értéke P -ben zérus; legnagyobb a H -ban, hol $GH = 4a$. Egy eredetileg a $GP'P$ cyclois mentén fekvő a G -hez erősített, hajlítható, de nyújthatatlan fonálnak P végpontja a lefejtés közben a PO_1H fél cycloist írja le. E cyclois másik felét, a HQ ívet ugyanez a P végpont fogja leírni, ha a PG -vel egyenlő, hozzá szimmetrikusan fekvő GQ szilárd cyclois van jelen, melyre a G -ben megerősített fonál a közben simul, mi alatt szabad végpontja Q felé halad.

Miután pedig a föld nehézségi erejének hatása alatt a PHQ cyclois mentén surlódás nélkül eső (gördülő) nehéz pont, mely az O_1 -ben kezdő mozgását, az O_1H ívet mindig egy és ugyanazon idő alatt futja be, bármily is legyen különben az O_1 helye e cycloison*, azért HUYGENS, felhasználva a cyclois ezen sajátosságát, egy GH fonálingát függesztett fel két szilárd PG és GQ cycloisívek között, miáltal az inga nehéz végpontja a PHQ cycloist kényszerült leírni, és így az inga függetlenül az amplitudójától, *isochron* (egyenlő lengésidejű) mozgást végzett.

I. 151. §. Epitrochoisok, hypotrochoisok, peritrochoisok. Egyenleteik.

Ha valamely kör egy másik, álló körön gördül, a síkjához tartozó pontok által leírt ruletták akkor mondatnak *epitrochoisoknak*, a mikor a mozgó kör az álló körön *kívül* gördül; *hypotrochoisok* rak pedig akkor, ha a mozgó kör az álló körön *belső* gördül; végre *peritrochoisoknak*, ha az álló kör a kisebb és a *gördülő kör* *belső* kerületével gördül az álló körön.

A mozgó kör *kerületi* pontjai az első esetben *epicycloisokat* írnak le, a második esetben *hypocycloisokat*, a harmadik esetben *pericycloisokat*.

II. Ezen görbék egyenleteit könnyen nyerjük. [Math. repertórium 65. §. B. 17., 18., 19. formulák]. Jeleljék (105, 106, 107. ábrák) a_1 , a_2 a két kör sugarát és A a gördülő körrel mozgó síknak tetszőleges pontját, mely $O_2A = \varrho$ távolságban van az O_2 középponttól. Legyen BC a kör kezdő helyzete mikor az A az O_1O_2 egyenesen van; $B'C'$ a kör tetszőleges helyzete és I' az érintkezés pontja, A' az A -nak e helyzethez tartozó helye.

Az O_1O_2 az eredeti O_1O_2 -vel ϑ_1 -, a $B'C'$ az O_1O_2 -vel (azaz a BC -vel) ϑ_2 szöget képez.

1. Ha az egyik kör domború oldalával a másik kör külső kerületén gördül és az A_1 pont az O_2 és C között van, akkor az A'_1 -nek x , y összszerendezői az 105. ábrából:

$$x = (a_1 + a_2) \cos \vartheta_1 + \varrho \cos (\vartheta_1 + \vartheta_2)$$

$$y = (a_1 + a_2) \sin \vartheta_1 + \varrho \sin (\vartheta_1 + \vartheta_2)$$

De mivel BI' ív egyenlő $B'I'$ ívvel, azaz $a_1\vartheta_1 = a_2\vartheta_2$,

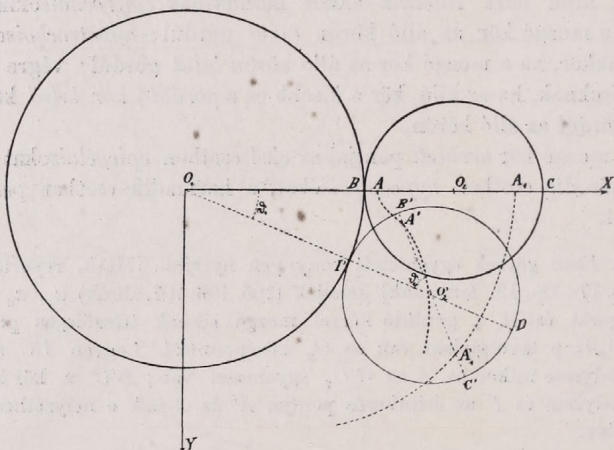
$$\left. \begin{aligned} x &= (a_1 + a_2) \cos \vartheta_1 + \varrho \cos \left(\frac{a_1 + a_2}{a_2} \vartheta_1 \right) \\ y &= (a_1 + a_2) \sin \vartheta_1 + \varrho \sin \left(\frac{a_1 + a_2}{a_2} \vartheta_1 \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1a)$$

* A szövegben említett mozgás idézett sajátosságát az olvasó a 89a és 130. §§-ok eljárásai alapján nagyon könnyen bebizonyíthatja.

Jegyzet. Ha az A pont az O_2 és B között, azaz az O_2B sugáron fekszik, akkor az A' is az O_2B' sugáron van és ekkor a ϱ -val szorzott tagok előjele ellentett lesz és a görbe egyenletei:

$$\left. \begin{aligned} x &= (a_1 + a_2) \cos \vartheta_1 - \varrho \cos \left(\frac{a_1 + a_2}{a_2} \vartheta_1 \right) \\ y &= (a_1 + a_2) \sin \vartheta_1 - \varrho \sin \left(\frac{a_1 + a_2}{a_2} \vartheta_1 \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

A talált egyenletek *positiv* a_2 esetében az *epitrochoisok* családját tüntetik elő.



105. ábra.

Ha a rulettát leíró pont a gördülő kör kerületén fekszik, akkor $\varrho = a_2$ és a görbéket *epicycloisok*nak nevezik. Általánosságban azonban a ϱ lehet nagyobb is, kisebb is a_2 -nál.

2. Ha az egyik kör a másik körön *belül* gördül (a mi csak $a_1 > a_2$ feltételnél lehetséges, 106. ábra), az A' pont összerendezői:

$$\begin{aligned} x &= (a_1 - a_2) \cos \vartheta_1 + \varrho \cos (\vartheta_2 - \vartheta_1); \\ y &= (a_1 - a_2) \sin \vartheta_1 - \varrho \sin (\vartheta_2 - \vartheta_1). \end{aligned}$$

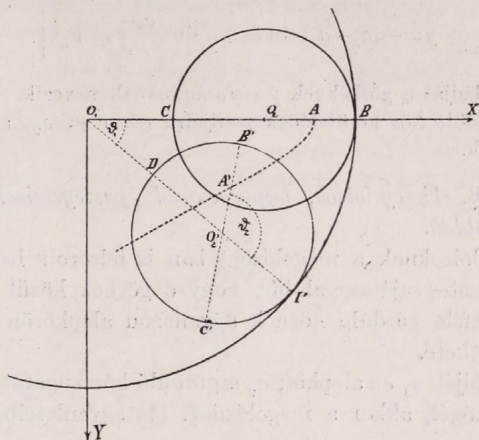
Vagy mivel $BF = B'I$, azaz, $a_1 \vartheta_1 = a_2 \vartheta_2$, nyerjük:

$$\left. \begin{aligned} x &= (a_1 - a_2) \cos \vartheta_1 + \varrho \cos \left(\frac{a_1 - a_2}{a_2} \vartheta_1 \right) \\ y &= (a_1 - a_2) \sin \vartheta_1 - \varrho \sin \left(\frac{a_1 - a_2}{a_2} \vartheta_1 \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Ez az egyenletrendszer előtűnteti a *hypotrochoisok* családját.

A gördülő kör kerületi pontjaira nézve $\varrho = a_2$; ezek *hypocyclois*okat írnak le.

3. Azt az esetet, midőn az álló kör a kisebb és a nagyobb sugarú

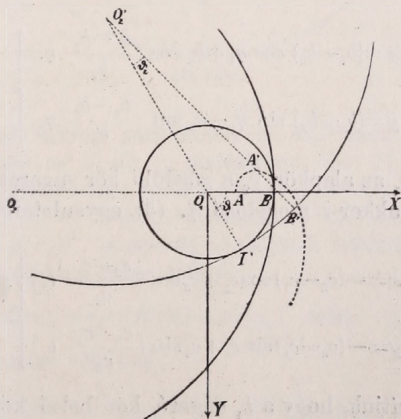


106. ábra.

kör belső kerületével az elsőnek külső kerületén gördül, a 107. ábra tünteti elő; az A' pont öszszrendezői:

$$x = -(a_2 - a_1) \cos \vartheta_1 + \varrho \cos (\vartheta_1 - \vartheta_2)$$

$$y = -(a_2 - a_1) \sin \vartheta_1 + \varrho \sin (\vartheta_1 - \vartheta_2)$$



107. ábra.

azaz, mivel itt is:

$$BI = B'I', \text{ vagy } a_1 \vartheta_1 = a_2 \vartheta_2,$$

$$\left. \begin{aligned} x &= -(a_2 - a_1) \cos \vartheta_1 + \varrho \cos \left(\frac{a_2 - a_1}{a_2} \vartheta_1 \right) \\ y &= -(a_2 - a_1) \sin \vartheta_1 + \varrho \sin \left(\frac{a_2 - a_1}{a_2} \vartheta_1 \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

E családját a görbéknek *peritrochois*oknak nevezik.

A gördülő kör kerületének pontjaira nézve $\varrho = a_2$, a leírt görbék a *pericyclois*ok.

152. §. *Epicyclois*ok, *hypocyclois*ok, *pericyclois*ok; ezek összeüggése. Példák.

A cycloisoknak a megelőző §-ban is felsorolt három csoportja azon nevezetes sajátssággal bír, hogy e görbék közül minden egyes cyclois kétféle gördülő körnek ugyanazon alapkörön való gördülése által létesíthető.

a. Jeleljék a_1 az alapkör, a_2 a gördülő kör sugarát, ϑ_1 az alapkör gördülő szögét, akkor a megelőző §. (1) egyenleteiből az *epicyclois* egyenletei:

$$\left. \begin{aligned} x &= (a_1 + a_2) \cos \vartheta_1 - a_2 \cos \left(\frac{a_1 + a_2}{a_2} \vartheta_1 \right) \\ y &= (a_1 + a_2) \sin \vartheta_1 - a_2 \sin \left(\frac{a_1 + a_2}{a_2} \vartheta_1 \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

b. Jeleljék b_1 az alapkör, b_2 a gördülő kör sugarát, η_1 az alapkör gördülő szögét, akkor a megelőző §. (2) egyenleteiből a *hypocyclois* egyenletei:

$$\left. \begin{aligned} x &= (b_1 - b_2) \cos \eta_1 + b_2 \cos \left(\frac{b_1 - b_2}{b_2} \eta_1 \right) \\ y &= (b_1 - b_2) \sin \eta_1 - b_2 \sin \left(\frac{b_1 - b_2}{b_2} \eta_1 \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

c. Jeleljék c_1 az alapkör, c_2 a gördülő kör sugarát, ε_1 az alapkör gördülő szögét, akkor a megelőző §. (3) egyenleteiből a *pericyclois* egyenletei:

$$\left. \begin{aligned} x &= -(c_2 - c_1) \cos \varepsilon_1 + c_2 \cos \left(\frac{c_2 - c_1}{c_2} \varepsilon_1 \right) \\ y &= -(c_2 - c_1) \sin \varepsilon_1 + c_2 \sin \left(\frac{c_2 - c_1}{c_2} \varepsilon_1 \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

1. Bebizonyítjuk, hogy a b_1 sugarú kör belső kerületén gördülő $b_1 - b_2$ sugarú kör ugyanazt a *hypocycloist* létesíti, mint az ugyanazon b_1 sugarú kör belső kerületén gördülő b_2 sugarú kör.

A (6)-ból:

$$dr = -\frac{2a}{\sin^3 \psi} \cos \psi d\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Képezve (6) és (8) segítségével (7)-et:

$$d\vartheta = -2 \cotg \psi \cdot \tg \psi d\psi = -2d\psi,$$

azaz:

$$\vartheta = -2\psi + \text{constans} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Az állandó meghatározódik az \overline{AI} helyzetből (112. ábra), ugyanis, ha $\vartheta = 0$ akkor $\psi = \frac{1}{2}\pi$ és a (9)-ből marad:

$$\psi = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9a)$$

E szerint a (6) egyenlet redukálódik

$$r = \frac{2a}{1 + \cos \vartheta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

alakra, mely a *parabola* poláregyenlete, hol a gócpont a rendszer kezdő-pontja és a góczhúr hossza $4a$ [Math. repertórium 64. §. (14)].

Szóval: *Egyenes vonalon görbülő parabola gócpontja közösleges láncgörbét ír le.*

Jegyzet: A parabola többi pontjainak rulettái lényegesen más alakúak; különösen a kerületi pontokéi. A tengely-pontok rulettáinak alakja nem tér el nagy mértékben a catenáris (láncgörbe) alakjától, különösen a góczponthoz közel fekvő pontokra nézve; az egyes ruletták felkeresése semmi analitikai nehézséget nem okoz és ezért ezt az olvasóra bízjuk (v. ö. a 200. §. 24. feladatát), épen úgy a problémának a 144. §. szerinti tárgyalását.

154. §. *Watt egyenesben vezetőjének elmélete, mint a kinematikai lánczok és az egyenes vezetés egyszerű esete. Watt parallelogrammja.*

1. *Két balancierből, a középrúdból és egy szilárd tagból álló négytagú kinematikai láncz.*

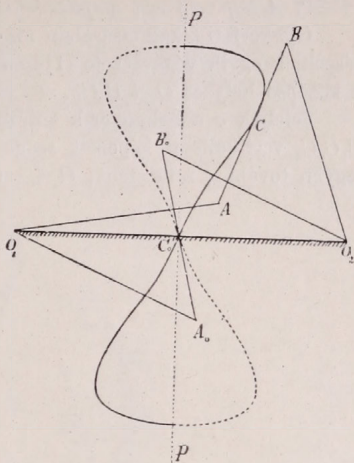
Legyen (113. ábra) O_1ABO_2 oly sík kinematikai láncz, melynek O_1A és O_2B tagjai (a lengő karok vagy balancierek) egyenlők; míg az A és B pontokat egybekapcsoló AB merev rúd tetszőleges hosszúságú. A balancierek az O_1O_2 szilárd tag O_1 , illetve O_2 végpontjai körül foroghatnak; A -ban és B -ben csuklók (csapok) vannak.

A láncz középhelyzete az $O_1A_0B_0O_2$; ekkor az AB középpontja az O_1O_2 egyenesen van és a két balancier egymáshoz párhuzamos.

Ez a C középpont a mozgás közben hurkos (többszörös ponttal bíró [Math. repertórium 62a §. 69. l.]) görbét ír le, melyet a 113. ábra tüntet elő; a görbe az O_1O_2 -re és a reá merőleges PP egyenesekre

nézve symmetrikus; a csomópontja C_0 -ban van, ott van még az egymást metsző két görberésznek két inflexiós pontja is.

A középhelyzet közelében a C mozgása majdnem egyenes vonalúnak és az O_1A_0 - vagy az O_2B_0 irányra merőlegesnek tekinthető, tényleg azonban a pálya ezen része (ú. n. hosszú inflexiós része) három inflexiós ponttal bír ugyan (114. b ábra); de egészben véve nagyon hozzá-simul az egyenes vonalhoz; ezen alapszik e mechanizmusnak az egyenes vezetésre való alkalmazása.



113. ábra.

A görbe egyenlete könnyen adódik.

Jelöljük (113. ábra):

$$\overline{O_1O_2} = 2a; \quad \overline{O_1A} = \overline{O_2B} = b; \quad \overline{AB} = l; \quad (\angle AO_1O_2) = \vartheta_1; \quad (\angle BO_2O_1) = \vartheta_2$$

vége az \overline{AB} és az $\overline{O_1O_2}$ közötti szöveget:

$$(\angle \overline{AB}, \overline{O_1O_2}) = \eta.$$

Legyen továbbá C_0 a derékszögű koordináták kezdete, C_0P az X , C_0O_2 az Y -tengely és x, y a C összfűrendezői, melyek értékeire nézve áll:

$$\left. \begin{aligned} a+x &= b \cos \vartheta_1 + \frac{1}{2} l \cos \eta \\ y &= b \sin \vartheta_1 + \frac{1}{2} l \sin \eta \end{aligned} \right\}, \text{ vagy: } \left. \begin{aligned} a-x &= b \cos \vartheta_2 + \frac{1}{2} l \cos \eta \\ y &= b \sin \vartheta_2 - \frac{1}{2} l \sin \eta \end{aligned} \right\}. \quad (1)$$

Ezekhez járul még a következő [az (1) két alakjából is nyerhető] két feltételei egyenlet:

$$\left. \begin{aligned} 2a &= b (\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2) + l \cos \eta \\ 0 &= b (\sin \vartheta_1 - \sin \vartheta_2) + l \sin \eta \end{aligned} \right\}; \quad \dots \quad (2)$$

melyek elseje a mozgó tagok horizontális, másika vertikális vetületét fejezi ki.

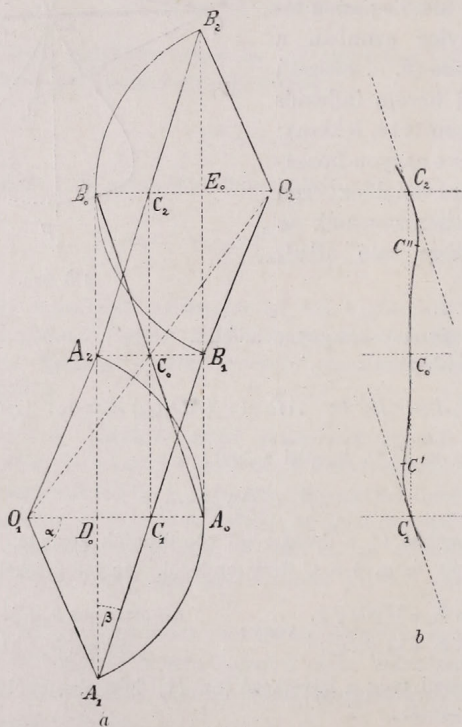
Egybekapcsolva az (1) valamely csoportját a (2)-vel és eliminálva belőlük ϑ_1 -t, ϑ_2 -t és η -t, nyerjük a keresett görbe egyenletét, melynek számítását és értelmezését az olvasóra bizzuk.

Jegyzet. Ha a balancier-eket és a kapcsolórúdat úgy választjuk, hogy az O_1 és O_2 körül az O_1A illetve O_2B sugárral szerkesztett körök egymást derékszög alatt metszik és még $\overline{AB} = \overline{O_1O_2}$, akkor a görbe a kö-zönséges BERNOULLI-féle lemniscátává fajul [85. ábra, 230. l.].

2. *A kapcsoló rúd amplitudója a balancier-k amplitudójából.*

Gyakorlati alkalmazásában az 1. alatt említett lánccz O_1ABO_2 mozgó részeinek egyik véghelyzete (114a. ábra) az $O_1A_1B_1O_2$, a másik $O_1A_2B_2O_2$, a középső helyzet $O_1A_0B_0O_2$.

Jeleljék α a balancier-k amplitudójának felét, β az AB rúdnak a $C_1C_0C_2$ vertikálissal képezett szöge maximumát (amplitudójának felét), legyen továbbá, mint fent: $O_1A_0=O_2B_0=b$, $AB=l$.



114. ábra.

Az ábra szerint

$$B_1A_2=A_0D_0=l \sin \beta = b - b \cos \alpha$$

avagy:

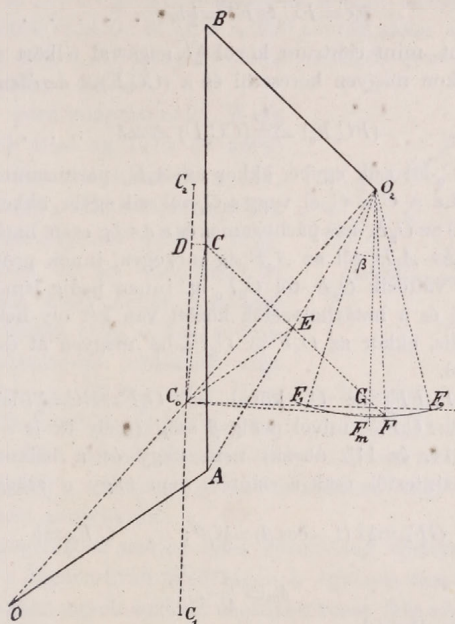
$$\sin \beta = 2 \frac{b}{l} \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \dots \dots \dots (3)$$

Rendesen $2b$ többszörte nagyobb az l -nél (rajzunkban a szemléltetés a fordítottat kívánta), míg az α nem nagyobb mint 0.1π ; megközelítőleg írhatjuk

$$\beta = \frac{b}{2l} \alpha^2 \dots \dots \dots (3a)$$

3. Az egyenes vonalú mozgástól való eltérés közelítő számítása.

A C középpont tényleges pályájának a $C_1C_0C_2$ vertikálistól való eltérését kifejezzük (115. ábra) a C -nek a C_1C_2 egyenestől való $\overline{CD}=d$



115. ábra.

távolsága és a C_0C egyenesnek ezen C_1C_2 egyenessel képezett $(\overline{CC_0D})\angle=\delta$ szöge segítségével; mindig áll:

$$d = \overline{C_0C} \cdot \sin \delta \dots \dots \dots (4)$$

A d és δ határértékeit az (1) és (2)-egyenletekből nyerhetjük, de az analitikai eljárás hosszadalmas lévén, geometriait követünk.

a. A δ maximumának (δ_m -nek) meghatározása.

α) Legyen (115. ábra) O_1ABO_2 a láncz tetszőleges helyzete és $C_0F_1F_0$ a $C_1C_0C_2$ egyenesre merőleges egyenes, továbbá $\overline{O_2F}$ a BC -hez párhuzamos és vele egyenlő egyenes; akkor $BCFO_2$ egyenközényt alkot, melyben $\overline{O_2B} = \overline{FC} = b$.

Húzza az $\overline{AO_2}$ egyenest, az AEC és az O_2EF háromszögek egybevágók, mivel AC (mely a CB -vel egyenlő és vele párhuzamos) egyenlő

az $\overline{O_2F}$ -el, továbbá a $\overline{BO_2}$ -höz párhuzamos \overline{CF} az E -ben felezve az $\overline{AO_2}$ -t, az \overline{AE} egyenlő az $\overline{O_2E}$ -vel, végre a \overline{CE} a $\overline{BO_2}$ -nak, azaz a \overline{CF} -nek is a fele és így \overline{CE} egyenlő az \overline{FE} -vel.

Az E -t egybekapcsolva C_0 -lál, az $\overline{AO_1O_2}$ háromszögben $\overline{O_1C_0} = \overline{C_0O_2}$ és az előbbieket szerint $\overline{AE} = \overline{EO_2}$, ezért $\overline{C_0E} = \frac{1}{2}\overline{O_1A} = \frac{1}{2}b$.

E szerint a $\overline{CC_0F}$ háromszögben:

$$\overline{EC} = \overline{EC_0} = \overline{EF} = \frac{1}{2}b, \quad (5)$$

ezért az E pont mint centrum körül $\frac{1}{2}b$ sugárral félkört írva le, ez a C, C_0, F pontokon megyen keresztül és a $(\overline{CC_0F}) \nrightarrow$ derékszög.

Ebből:

$$(\overline{FC_0F_0}) \nrightarrow (\overline{CC_0D}) \nrightarrow \delta \quad (6)$$

Ha C a C_0 -lál esik egybe, akkor az A_0B_0 párhuzamos az O_2F_0 -hoz és a δ zérus; ha a C a C_1 -el, vagy a C_2 -vel esik egybe, akkor az A_1B_1 és az A_2B_2 (114. ábra) az O_2F_1 -hez párhuzamos és a δ szög ezen határhelyzetekben szintén zérus. Az A_1B_1 -től az A_0B_0 -ig mozogva, innen pedig az A_2B_2 -ig, az O_2F iránya változik O_2F_1 -től O_2F_0 -ig, innen pedig ismét O_2F_1 -ig.

A középső és a határhelyzetek között van két oly helyzet, melyben az \overline{AB} vertikális, ekkor az O_2F az O_2F_m -be megyen át és δ maximális, δ_m értéket ér el.

Mivel $\overline{F_1F_mFF_0}$ az O_2 körül az $O_2F = BC = \frac{1}{2}l$ -lel leírt körív, áll $\sin \delta_m = \overline{GF_m} : \overline{C_0F_m}$; mivel pedig β szög (mely itt is a kapcsoló rúd amplitudója, 114. és 115. ábrák) nem nagy és a balancierek mozgás közben a vízszintestől csak a szintén nem nagy α szöggel térnek el, közelítőleg

$$\overline{GF_m} = \frac{1}{2}l(1 - \cos \beta) = \frac{1}{4}l\beta^2; \quad \overline{C_0F_m} = b$$

és így:

$$\delta_m = \frac{l\beta^2}{4b},$$

avagy, a (3a) segélyével.

$$\delta_m = \frac{b}{16l} \alpha^4 \quad (7)$$

b. A d maximumának (d_m -nek) meghatározása.

A (4) szerint $d < \overline{C_0C}$; ámde, mivel mindig (114. ábra) $\overline{C_0C} < \overline{C_0C_2} = \overline{A_1E_0} = b \sin \alpha < b$, α és szintén mindig $\delta \leq \delta_m$, áll az egyenlőtlenség:

$$d_m < b \cdot \alpha \cdot \delta_m,$$

vagy (7) szerint:

$$d_m < \frac{b^2}{16l} \alpha^5 \quad (8)$$

Jegyzet. Rendesen közelítőleg $\alpha = 1:3$; $b:l = 3:2$ és ekkor $d_m < b:2592$

Ha pl. $b = 3$ meter, d_m az 1:15 milliméteren alúl marad, mely már a középső rúd játékerével egyenrendű.

4. WATT egyenesben vezetője. WATT parallelogrammja. A gyakorlati kivitel egyszerű esete.

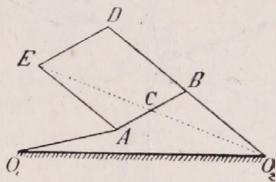
Legyen (116. ábra) O_1ABO_2 az ezen § 1, 2, 3 pontjaiban tárgyalt kine-

matikai láncz, de O_2B tagja B -n túl D -ig egyenesen és mereven terjedjen, úgy, hogy $BD = O_2B$. Az ABD -t a DE és az EA merev tagokkal deformálható, A, B, D, E helyeken és csuklókkal ellátott egyenközénynyé (a tulajdonképeni WATT-féle parallelogrammá) egészítjük ki. E szerint ezen esetben

$$O_1A = O_2B = BD = AE; \text{ ezenkívül } AB = ED.$$

Akkor az $O_2C = CE = \frac{1}{2}O_2E$ és így az E pont mozgása a C -éhoz hasonló pályát ír le és ha O_1 és O_2 a szilárd pontok, akkor a C és az E egyszerre fogják leírni pályáiknak hosszú inflexiók részeit és mindkettő alkalmas egyenes vezetésre.

Ezen parallelogramnak WATT (1736—1819) által az 1775 év körül adott gyakorlati alkalmazását a 117. ábra tünteti elő; benne a kinematikai tagok jelölése ugyanaz mint a megelőző sémában és így elegendő, ha megjegyezzük, hogy E -hez a gőzgép dugattyúrúdjának vége, C -hez a condensátor szivattyúja rúdjának vége van kapcsolva; az E -ben és a C -ben lévő csapok tengelyei a rajz síkjára merőlegesek és oly hosszúak, hogy a hozzájuk erősített, fentemlített két rúd a rajz síkjához párhuzamos síkban mozoghat, a nélkül, hogy az első rúd a szilárd O_1 pontot érinthetné vagy a második rúd az A mozgását zavarhatná.



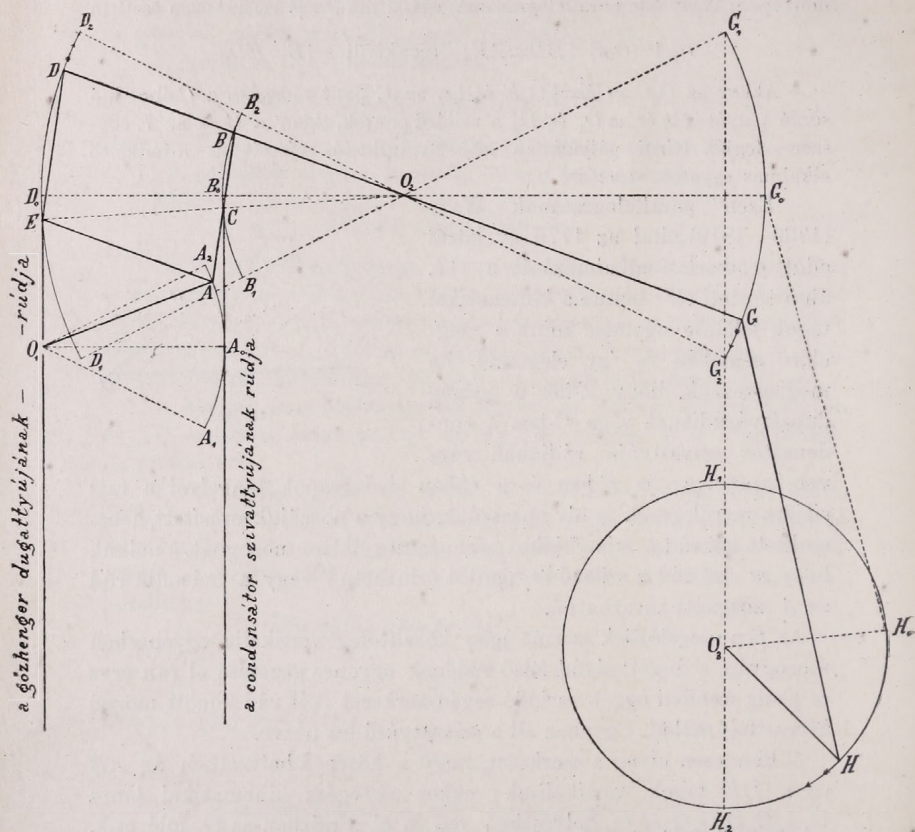
116. ábra.

Az E a megelőzők szerint igen közelítőleg vertikális egyenesben mozogván, a dugattyúrúd felső végének egyenes vezetése el van érve és pedig minden egyéb surlódó segédszerkezet (két rúd között mozgó keresztfej) nélkül. Ugyanez áll a szivattyúrúdra nézve.

Rendesen olyan a szerkezet, hogy a középső helyzetben az AB és a DE tagok vertikálisak; ekkor az egész kinematikai láncz $O_1A_0B_0D_0O_2G_0H_0O_3$ helyzetben van és E_0 a rajzban az O_1 fölé esik. Szélső helyzetei $O_1A_1B_1D_1O_2G_1H_1O_3$, illetve $O_1A_2B_2D_2O_2G_2H_2O_3$. A DG főbalancier (a himba) G végpontja a $G_1G_0GG_2$ körív mentén mozog; ezen mozgásnak köralakúvá való átváltozását az ábra jobb oldali része világosan tünteti elő, csak hogy a gyakorlatban, a körmozgásnak egyenletesebbé tévése czéljából az O_3 középpont helyét rendszeren úgy választják, hogy az a gG_0 felező pontjából a G_1G_2 -höz húzott párhuzamos vonalnak és a G_0 körül G_0H_0 sugárral leírt körívnek metszőpontja legyen. E viszonyok további, inkább a géptan keretébe tartozó tárgyalásától itt eltekinthetünk.

Jegyzet. A géptanra alkalmazott kinematika még sokféle (közelítő) egyenes vezetést ismer (v. ö. a 201. §. 39. és 39a. feladatát, a WATT-féle egye-

nesben vezetőjének TSCHEBYTSCHOFF által létesített módosítását s i. t.), de ezek tárgyalása e mű keretén kívül esik.



117. ábra.

155. §. A PEAUCELLIER-féle egyenesben vezető (inverseur).

Sok ideig az a vélemény volt elterjedve, hogy vezetőrudak (azaz oly rudak, melyek között az illető kinematikai tag ú. n. keresztfeje kénytelen mozogni [mint pl. a 147. §. 2. példájában a B pont ily keresztfejet képvisel]) vezetése nélkül nem lehet köralakú mozgást szigorúan egyenes vonalúvá alakítani, hanem csak közelítőleg, a hosszszű inflexióval bíró görbék segélyével (v. ö. a megelőző §. 1. pontját).

PEAUCELLIER francia tábornok azonban (1864-ben mint hadmérnök-kapitány) e kérdést egyszerűen és szigorúan oldotta meg.

Adva van (118. ábra) a négy egyenlő tagból álló $ABCD$ deformálható paralelogramm, melynek B és D csúcsai a szilárd O ponthoz az OB és OD merev rudak segítségével vannak kapcsolva. Az O, A, B, C, D pontokban csuklók (csapok) vannak; a B és D pontok O körüli köröket írhatnak csak le, de a $(BOD) \angle = 2\varepsilon$ szög még tetszőleges és mozgás közben változó. Legyen $OB=OD=a$ és $AB=AD=DC=CB=b$.

1. Könynyű bizonyítani, hogy a paralelogramm A és C pontjai által leírt pályáknál az O -val egy vonalon fekvő A és C pontok von sugarainak szorzata állandó. A 118. ábra szerint áll:

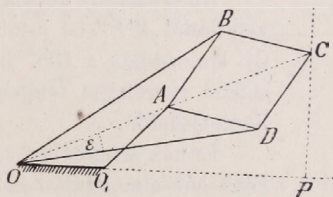
$$OCD\text{-ből: } b^2 = \overline{OC}^2 + a^2 - 2a \overline{OC} \cos \varepsilon;$$

$$OAD\text{-ből: } b^2 = \overline{OA}^2 + a^2 - 2a \overline{OA} \cos \varepsilon;$$

ezekből:

$$(b^2 - a^2) : \overline{OC} = \overline{OC} - 2a \cos \varepsilon;$$

$$(b^2 - a^2) : \overline{OA} = \overline{OA} - 2a \cos \varepsilon;$$



118. ábra.

ezen különbsége:

$$(b^2 - a^2) [(1 : \overline{OC}) - (1 : \overline{OA})] = \overline{OC} - \overline{OA};$$

e szerint:

$$\overline{OA} \cdot \overline{OC} = a^2 - b^2 = \text{állandó} \quad \dots \quad (1)$$

2. A C mozgása történjék az OP -re merőleges CP egyenesen; könnyű kimutatni, hogy akkor az A pont oly körben tartozik mozogni, mely az A és az O pontokon megyen keresztül és O_1 középpontú, hol még $\overline{OO_1} = \overline{O_1A}$. Ugyanis, $OP = c = \text{állandó}$; legyen a $(COP) \angle = \vartheta$;

$$\overline{OC} = c : \cos \vartheta \quad \text{és így (1) szerint} \quad \overline{OA} = \frac{a^2 - b^2}{c} \cos \vartheta; \quad (2)$$

ez oly kör egyenlete, melynek átmérője $(a^2 - b^2) : c$, középpontja O_1 [231. lap, (8)].

3. Az 1 és 2. pontok eredményeit tartva szemmel, kapcsoljuk össze az A pontot az AO_1 merev forgatvány segítségével valamely adott forgás O_1 középpontjával; a lánc többi tagjai változatlanok maradjanak.

Ha most A kénytelen körmozgást végezni O_1 körül, akkor a C pont szigorúan a CP egyenesben kénytelen mozogni és így a körmozgásnak egyenessé alakítása szigorral el van érve.

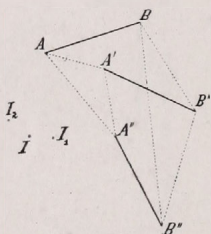
PEAUCELLIER egyenesben vezetője a gyakorlati gépeknél kevesebb alkalmazást talál, mint WATT mechanizmusa, mert ez utóbbi kevesebb tagból áll és kisebb tért foglal el.

4. Rendszerek sík mozgásainak összetevése és szétbontása.

1. Geometriai tárgyalás.

156. §. *Sík elmozdulások (párhuzamos tengelyű forgások) összetevése egy forgássá és viszont.*

1. A sík rendszer bizonyos helyzetében legyen A és B a mozgás tárgyalására kiszemelt pontok helyzete (119. ábra); a rendszer egy másuttán két elmozdulást szenvedjen, az egyik az AB -t átviszi $A'B'$ -re, a másik az $A'B'$ -t az $A''B''$ helyzetbe.



119. ábra.

Az eredmény ugyanaz, mintha AB közvetlenül $A''B''$ -be jutott volna; de minden ily elmozdulás a 135. §. szerint a mozgás síkjára merőleges tengelyű forgás által helyettesíthető.

Ennek értelmében az egymásra következő két elmozdulást helyettesző két forgás mindig összetehető (helyettesíthető) egy forgás által, melynek tengelye az összeteteendő forgásokéval párhuzamos.

Így a 119. ábrában I_1 és I_2 az összeteteendő elmozdulások (forgások) középpontjai, I az eredő forgás középpontja.

2. Az eredő forgás jellemzőinek az összeteteendőkből való meghatározására nézve jelezze I_1 a sík alak (a rendszer szelvényének) azon pontját, melyben az első, ϑ_1 szögű forgás tengelye a mozgás síkját metszi; I_2 és ϑ_2 ugyanily adatok a másik forgásra nézve (120a. ábra).

A sík alak elmozdulását ezen hozzátartozó I_1 és I_2 pontok által fogjuk meghatározni.

Az I_1 körül történő ϑ_1 forgás által az I_1I_2 eljutott az I_1I_2' helyzetbe, s így az I_2 tengely az I_2' helyzetbe. Ha most a második forgás létesül, ez az I_2' körül, ϑ_2 szöggel fog történni, és az I_1I_2' egyenes ennek folytán az I_1I_2'' helyzetbe jut. Az eredeti helyzet az I_1I_2 ; a két forgás után a helyzet I_1I_2'' .

Az 1. pont szerint mindenkor található oly forgás, mely az I_1I_2 -öt átviszi az I_1I_2'' helyzetbe.

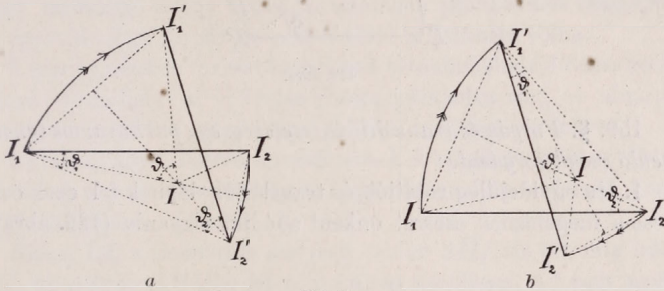
Ezen forgás középpontja legyen I és a forgás szöge, mint a rajzból azonnal észreveszszük: $\vartheta = (I_1II_1') \sphericalangle = (I_2II_2') \sphericalangle = \vartheta_1 + \vartheta_2$.

E szerint: *párhuzamos tengelyek körül történő forgások egy harmadik forgás által helyettesíthetők, melynek tengelye az előbbi tengelyhez pár-*

huzamos és forgásszöge az összezteendő két forgás szögének összegével egyenlő.

Ezen tétel kiterjeszthető tetszőleges számú párhuzamos tengelyű forgásokra; ezek mind egyetlen egy forgássá tehetők össze.

3. Önként következik, hogy ezen tétel mindjárt meg is fordítható, azaz, minden forgás úgy tekinthető, mint a mely két, vagy általános-ságban véve, tetszőleges számú párhuzamos tengelyű forgás által helyettesíthető azaz ilyenmű forgásokra szétbontható.



120. ábra.

157. §. A rendszer véges elmozdulásainak sorrendje lényeges az elmozdulások eredményére nézve. A sorrend megfordításánál a fellépő különbség transláció.

A pont elmozdulásainak sorrendje az eredő elmozdulásra nézve közömbös [18. §. 3. pontja], a merev rendszernél ez másként van.

Ennek szemléltetésére szolgáljon a 120. ábra *a* és *b* rajza, melyekben ugyanaz a két forgás, egyszer egyenes (az $_1$ indexű után a $_2$ indexű forgás), másodszor fordított sorrendben van összetétele.

Daczára annak, hogy az eredeti helyzet $I_1 I_2$ ugyanaz, az össze-tevések eredménye a két $I_1' I_2'$ egyenes, mely egymástól különböző fekvésű, de mivel az eredő forgás szöge itt $\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2$ ugyanaz mindkét esetben, a két véghelyzet egymáshoz párhuzamos és így csak transláció (136. §.) lehet e helyzetek különbsége.

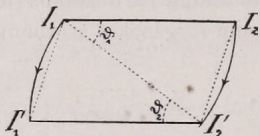
158. §. Kivételes eset. Egyenlő nagyságú, de ellentett jelű két for-gás eredménye transláció.

Az $I_1 I_2$ egyenes (121. ábra) az e §. címében nevezett esetben, a két forgás alkalmazása után, $I_1' I_2'$ helyzetbe jő, mely az eredetihez párhuzamos, és így az eredmény egyszerű transláció, mely $\vec{I_1 I_1'}$ vagy $\vec{I_2 I_2'}$.

Szóval: Párhuzamos tengelyek körül történő egyenlő nagyságú, de ellentett előjelű két forgás az egész rendszerben egyszerű trans-

lációt létesít; és viszont: minden transláció szétbontható párhuzamos tengelyű két egyenlő nagyságú, de ellentett előjelű forgásra.

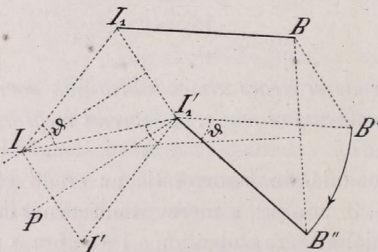
Ha a forgások egymásutánját megfordítjuk, a transláció nagysága ugyanaz marad, de iránya anynyiban változik, a menynyiben az ekkor származó $I_1I_1'I_2$ egyenközénben I_1 és I_2 -nél a hegyes, I_1' és I_2' -nél a tompa szögek lesznek.



121. ábra.

159. §. Forgás és transláció összehasonlítása egy párhuzamos tengelyű, egyenlő szögű forgássá.

1. Ha egyidejűleg rotációk és translációk lépnek fel, ezek összehasonlítása a megelőzők szerint önként adódik. Ugyanis (122. ábra), az



122. ábra.

I_1B egyenes a transláció által az I_1B' , és a reá következő I_1' körüli θ szögű forgás által az $I_1'B''$ helyzetbe jő. Észreveszszük, hogy az I körüli forgás által az I_1I_1' translációt és az I_1' körüli forgást helyettesíthetni.

2. Az I_1 , B és az I pontok a merev rendszer meghatározott három pontja, melyek egymáshoz való relatív helyzete változatlan marad. Az I_1I_1' transláció és az I_1' körüli forgás az I helyzetét következőképpen változtatja: a). A közös transláció az I -t átviszi I' -be. b). Az I_1' körüli forgás ellenben visszahozza őt I' -ből eredeti I helyzetébe, ha I tényleg az eredő forgás középpontja.

Ebből következik:

$$(II_1I) \rightarrow (B'I_1B'') \rightarrow (I_1II_1) \rightarrow \dots \quad (1)$$

azaz: az eredő forgás szöge egyenlő az összehasonlító forgásával.

3. Az 1. és 2. szerint az adott I_1I_1' translációból és a ϑ forgásszögből, az I következőleg szerkeszthető: Alkossunk az I_1I_1' vonal mint alap fölött oly egyenszárú háromszöget, melynek csúcsszöge a ϑ -vel egyenlő; ekkor e háromszög csúcsa az eredő forgás középpontja; ha a ϑ forgásszög ellenkező (negatív), akkor az I az I_1I_1' transláció másik oldalán fekszik.

160. §. *Forgás szétbontása translációra és párhuzamos tengely körüli egyenlőszögű forgásra.*

A megelőző §. értelmében minden forgás úgy tekinthető, mintha az egy transláció és egy másik, az adothoz párhuzamos tengelyű és vele egyenlő szögű forgás összetevéséből keletkezett volna.

Eszerint minden forgást az említett kétnemű elmozdulásra szabad bontani; de mihelyt az új forgás középpontja adva van, az elmozdulás ezen nevezett két componense teljesen meg van határozva.

Ugyanis, adva legyen a rendszernek ϑ szögű forgása az I körül (122. ábra) és a rendszernek azon I_1 pontja, melyre a forgás középpontját áthelyezni kívánjuk.

Ekkor I_1I_1' a transláció, melynek értéke $2\overline{II}_1 \cdot \sin \frac{1}{2}\vartheta$, míg iránya az II_1 -től számított ϑ szög felező vonalára merőleges; a forgás azután az I_1' -be áthelyezett középpont körül történik.

161. §. *Forgás szétbontása forgásra és translációra két közös tengelyű, de ellentett nagyságú forgás segítségével.*

Miután a 158. §. értelmében minden translációt egyenlő nagyságú de ellentett előjelű két forgás eredményének szabad tekintenünk, az I körüli forgást meg következőleg is tehetjük át a rendszer I_1 (illetve I_1' helyzetű) pontjába (122. ábra):

Adjunk a rendszernek a meglévő, I körüli ϑ szögű forgásához még a rendszer I_1 pontja körüli, egyenlő és pedig ϑ szögű, de ellentett irányú két forgást; e két forgás elmozdulási eredménye zérus ugyan, de a most fellépő három forgást következőleg kombinálhatni:

a. Az I körüli $+\vartheta$ szögű forgás az I_1B -t az I_1B'' helyzetbe hozza.

b. Az I_1 körüli $-\vartheta$ szögű forgás az II_1B -t $I'I_1B'$ -helyzetbe hozza, mely az eredeti II_1B helyzettől csak az I_1I_1' közös translációval különbözik; azaz az a és b alatti két forgás eredménye az I_1I_1' transláció.

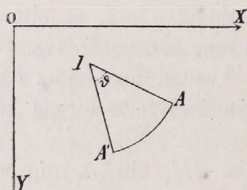
c. Az I_1 körüli $+\vartheta$ szögű forgás az $I'I_1B'$ -t visszahozza az II_1B'' véghelyzetbe.

II. Analitikai tárgyalás.

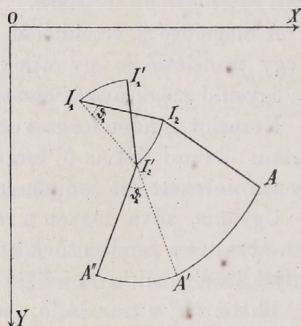
162. §. Az egy és a két síkbeli véges forgás által létesített elmozdulás analitikai kifejezése.

Jeleljék (123. ábra) a, b a véges forgás I középpontjának koordinátáit a szilárd XY rendszerben, ϑ a forgás szögét; a, b, ϑ a forgás három jellemzője.

1. A merev rendszer tetszőleges A pontjának koordinátái az elmozdulás kezdetén x, y ; annak végén



123. ábra.



124. ábra.

x', y' ; ezek [a Math. repertórium 50. §. (1) formulája szerint]:

$$\left. \begin{aligned} x' - a &= (x - a) \cos \vartheta - (y - b) \sin \vartheta \\ y' - b &= (x - a) \sin \vartheta + (y - b) \cos \vartheta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

az elmozdulás maga: $AA' = [(x' - x)^2 + (y' - y)^2]^{\frac{1}{2}}$

2. Ha két forgás következik be egymásután, legyenek (124. ábra) $a_1, b_1, \vartheta_1; a_2, b_2, \vartheta_2$ e két forgás jellemző adatai; x, y a síkbeli alak tetszőleges A pontjának eredeti összszerendezői.

a) Az első I_1 körüli forgás után ezek átmentek x', y' értékekbe:

$$\left. \begin{aligned} x' &= a_1 + (x - a_1) \cos \vartheta_1 - (y - b_1) \sin \vartheta_1 \\ y' &= b_1 + (x - a_1) \sin \vartheta_1 + (y - b_1) \cos \vartheta_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

A második forgás I_2 középpontjának eredeti koordinátái a_2, b_2 ; ezek az első forgás után átmennek az I_2 -höz tartozó a'_2 és b'_2 értékekbe, melyek:

$$\left. \begin{aligned} a'_2 &= a_1 + (a_2 - a_1) \cos \vartheta_1 - (b_2 - b_1) \sin \vartheta_1 \\ b'_2 &= b_1 + (a_2 - a_1) \sin \vartheta_1 + (b_2 - b_1) \cos \vartheta_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

b) Ha most a második forgás, azaz jelenleg az a'_2, b'_2 összszerendező I_2 pont körül történő ϑ_2 szögű forgás következik be, az x', y' átmennek, a (2) séma értelmében x'', y'' -be, melyek:

$$\left. \begin{aligned} x'' &= a'_2 + (x' - a'_2) \cos \vartheta_2 - (y' - b'_2) \sin \vartheta_2 \\ y'' &= b'_2 + (x' - a'_2) \sin \vartheta_2 + (y' - b'_2) \cos \vartheta_2 \end{aligned} \right\},$$

vagy helyetteszve x' -t, y' -t (2)-ből és a'_2 -t, b'_2 -t (3)-ból, kis rövidítés után:

$$\left. \begin{aligned} x'' &= a_1 + (a_2 - a_1) \cos \vartheta_1 - (b_2 - b_1) \sin \vartheta_1 + (x - a_2) \cos (\vartheta_1 + \vartheta_2) - \\ &\quad - (y - b_2) \sin (\vartheta_1 + \vartheta_2); \\ y'' &= b_1 + (a_2 - a_1) \sin \vartheta_1 + (b_2 - b_1) \cos \vartheta_1 + (x - a_2) \sin (\vartheta_1 + \vartheta_2) + \\ &\quad + (y - b_2) \cos (\vartheta_1 + \vartheta_2). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

163. §. A két forgás sorrendjének megfordításából származó transláció.

Azon esetben, a midőn előbb a második (a_2 indexű) és azután az első (az a_1 indexű) forgást létesítettük volna, azaz a forgások sorrendjét megfordítottak volna, a származó kifejezések az előbbi §.-éiből közvetlenül nyerhetők, ha mindenütt az a_1 indexet a a_2 indexxel felcseréljük, és megfordítva.

Az A pont coordinátái e két forgás után:

$$\left. \begin{aligned} x'' &= a_2 + (a_1 - a_2) \cos \vartheta_2 - (b_1 - b_2) \sin \vartheta_2 + (x - a_1) \cos (\vartheta_1 + \vartheta_2) - \\ &\quad - (y - b_1) \sin (\vartheta_1 + \vartheta_2); \\ y'' &= b_2 + (a_1 - a_2) \sin \vartheta_2 + (b_1 - b_2) \cos \vartheta_2 + (x - a_1) \sin (\vartheta_1 + \vartheta_2) + \\ &\quad + (y - b_1) \cos (\vartheta_1 + \vartheta_2). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Az x'' , y'' és az $x^{(1)}$, $y^{(1)}$ értékei összehasonlításából eredő különbségek:

$$\left. \begin{aligned} x^{(1)} - x'' &= (a_2 - a_1) [1 - \cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2 + \cos (\vartheta_1 + \vartheta_2)] + \\ &\quad + (b_2 - b_1) [\sin \vartheta_1 + \sin \vartheta_2 - \sin (\vartheta_1 + \vartheta_2)]; \\ y^{(1)} - y'' &= (b_2 - b_1) [1 - \cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2 + \cos (\vartheta_1 + \vartheta_2)] - \\ &\quad - (a_2 - a_1) [\sin \vartheta_1 + \sin \vartheta_2 - \sin (\vartheta_1 + \vartheta_2)]. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Ezen különbségek függetlenek az x , y összszenvedezőkől és e szerint a rendszer valamenynyi pontjára nézve ugyanazok. Az $x^{(1)} - x''$ és $y^{(1)} - y''$ annak a translációnak derékszögű vetületei, mely a forgások sorrendjének a megfordításából származik (157. §.)

Rövidség kedvéért írva:

$$\left. \begin{aligned} a_{12} &= a_1 + (a_2 - a_1) \cos \vartheta_1 - (b_2 - b_1) \sin \vartheta_1 - a_2 \cos (\vartheta_1 + \vartheta_2) + b_2 \sin (\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ b_{12} &= b_1 + (a_2 - a_1) \sin \vartheta_1 + (b_2 - b_1) \cos \vartheta_1 - a_2 \sin (\vartheta_1 + \vartheta_2) - b_2 \cos (\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ a_{(12)} &= a_2 + (a_1 - a_2) \cos \vartheta_2 - (b_1 - b_2) \sin \vartheta_2 - a_1 \cos (\vartheta_1 + \vartheta_2) + b_1 \sin (\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ b_{(12)} &= b_2 + (a_1 - a_2) \sin \vartheta_2 + (b_1 - b_2) \cos \vartheta_2 - a_1 \sin (\vartheta_1 + \vartheta_2) - b_1 \cos (\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

a megelőző §. (4) és ezen §. (1) egyenleteinek alakja:

$$\left. \begin{aligned} x'' &= a_{12} + x \cos (\vartheta_1 + \vartheta_2) - y \sin (\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ y'' &= b_{12} + x \sin (\vartheta_1 + \vartheta_2) + y \cos (\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ x^{(1)} &= a_{(12)} + x \cos (\vartheta_1 + \vartheta_2) - y \sin (\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ y^{(1)} &= b_{(12)} + x \sin (\vartheta_1 + \vartheta_2) + y \cos (\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

164. §. Kivételes eset: Egyenlő nagyságú, ellentett előjelű két forgásból származó transláció.

Legyen $\vartheta_1 = -\vartheta_2 = \vartheta$.

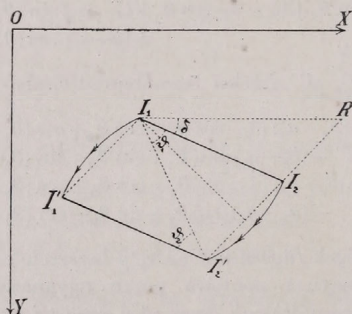
1. A megelőző §. (3) és (4) formulái ez esetben

$$\left. \begin{aligned} x''-x=a_{12} &= -(a_2-a_1)(1-\cos \vartheta) - (b_2-b_1)\sin \vartheta \\ y''-y=b_{12} &= -(b_2-b_1)(1-\cos \vartheta) + (a_2-a_1)\sin \vartheta \end{aligned} \right\};$$

$$\left. \begin{aligned} x'''-x=a_{(12)} &= +(a_2-a_1)(1-\cos \vartheta) - (b_2-b_1)\sin \vartheta \\ y'''-y=b_{(12)} &= +(b_2-b_1)(1-\cos \vartheta) + (a_2-a_1)\sin \vartheta \end{aligned} \right\};$$

szóval: egyenlő nagyságú, de ellentett előjelű két forgás folytán a rendszer minden pontja *egyenlő translációt* szenved (v. ö. a 158. §-ot), melynek componensei $x''-x=a_{12}$, és $y''-y=b_{12}$, illetve, a forgások megfordított sorrendje mellett: $x'''-x=a_{(12)}$, $y'''-y=b_{(12)}$; némi rövidítés után értékük:

$$\left. \begin{aligned} a_{12} &= -2 \sin \frac{1}{2} \vartheta [(a_2-a_1) \sin \frac{1}{2} \vartheta + (b_2-b_1) \cos \frac{1}{2} \vartheta] \\ b_{12} &= +2 \sin \frac{1}{2} \vartheta [(a_2-a_1) \cos \frac{1}{2} \vartheta - (b_2-b_1) \sin \frac{1}{2} \vartheta] \\ a_{(12)} &= +2 \sin \frac{1}{2} \vartheta [(a_2-a_1) \sin \frac{1}{2} \vartheta - (b_2-b_1) \cos \frac{1}{2} \vartheta] \\ b_{(12)} &= +2 \sin \frac{1}{2} \vartheta [(a_2-a_1) \cos \frac{1}{2} \vartheta + (b_2-b_1) \sin \frac{1}{2} \vartheta] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$



125. ábra.

A transláció *absolut* értéke mindkét esetben ugyanaz; az (1)-ből:

$$\begin{aligned} [(x''-x)^2 + (y''-y)^2]^{\frac{1}{2}} &= [(x'''-x)^2 + (y'''-y)^2]^{\frac{1}{2}} = \\ &= [(a_2-a_1)^2 + (b_2-b_1)^2]^{\frac{1}{2}} 2 \sin \frac{1}{2} \vartheta = 2l_{12} \sin \frac{1}{2} \vartheta, \end{aligned} \quad (2)$$

hol $l_{12} = \overline{I_1 I_2}$, az I_1 és I_2 forgási középpontok egymástól való távolsága.

2. *Rövidebb eljárás:* Ugyanezt az eredményt nyerjük, ha közvetlenül a 158. §. vagy ezen §. ábrájából indulunk ki és megfontoljuk, hogy a rendszer minden pontjának elmozdulása az $I_1 I_1' = \overline{I_2 I_2'}$ translációval egyenlő.

A 125. ábrából $\overline{I_2 I_2'} = 2l_{12} \sin \frac{1}{2} \vartheta$; továbbá, hogy vetületeit találhasuk, jegyezzük meg, hogy az $I_2 I_2'$ irány a pozitív X tengellyel $\frac{1}{2} \pi + \delta + \frac{1}{2} \vartheta$ szöget képez; e szerint a transláció derékszögű vetületei

$$-2l_{12} \sin \frac{1}{2} \vartheta \sin (\delta + \frac{1}{2} \vartheta) \quad \text{és} \quad +2l_{12} \sin \frac{1}{2} \vartheta \cos (\delta + \frac{1}{2} \vartheta), \quad (3)$$

hol a δ szögre nézve áll:

$$l_{12} \cos \delta = (a_2 - a_1); \quad l_{12} \sin \delta = (b_2 - b_1). \quad (4)$$

A forgások sorrendjét *megfordítva*, az ekkor származó $\vec{l}_2 T_2$ irány a pozitív X tengelylyel $(\frac{1}{2}\pi + \delta - \frac{1}{2}\vartheta)$ szöget képez és ekkor a transláció vetületei

$$-2l_{12} \sin \frac{1}{2}\vartheta \sin(\delta - \frac{1}{2}\vartheta) \quad \text{és} \quad +2l_{12} \sin \frac{1}{2}\vartheta \cos(\delta - \frac{1}{2}\vartheta) \quad (5)$$

A (3) és (5) rendre megegyeznek az (1) első és második egyenlet-párjával.

A sorrend megfordítása folytán a translációban keletkező különbségnek vetületei a (3)- és az (5) komponenseinek (3)–(5) különbségeivel egyenlők:

$$\begin{aligned} +4l_{12} \sin \frac{1}{2}\vartheta \cos \delta \sin \frac{1}{2}\vartheta &= 4(a_2 - a_1) \sin^2 \frac{1}{2}\vartheta; \\ +4l_{12} \sin \frac{1}{2}\vartheta \sin \delta \sin \frac{1}{2}\vartheta &= 4(b_2 - b_1) \sin^2 \frac{1}{2}\vartheta, \end{aligned} \quad (6)$$

mely eredményt a megelőző §. (2) formulái is adják ez esetben.

165. §. *Az eredő forgás jellemzői, kifejezve az összezteendő két forgás jellemzőiből.*

Keressük most azt a még ismeretlen forgást, mely önmagában véve oly síkbeli elmozdulást létesít, a melyet az előbbi §§-ok két forgása eredményez.

1. Jeleljék a , b ezen ismeretlen forgás középpontjának az összszerendezőit, ϑ a forgás szögét.

Akkor, ezen *egy* forgást alkalmazva a 162. §. (1) formulája szerint, a rendszer A pontjának x , y coordinátái átmennek x' , y' -be:

$$\begin{aligned} x' &= a + (x - a) \cos \vartheta - (y - b) \sin \vartheta \\ y' &= b + (x - a) \sin \vartheta + (y - b) \cos \vartheta \end{aligned} \quad (1)$$

Ha ezen a , b , ϑ jellemzőjű forgás valóban helyettesíti az előbbi kettőt, akkor ezen coordinátáknak a 163. §. (4) formulája x'' és y'' összszerendezőivel egyenlőknek kell lenniök, azaz:

$$\begin{aligned} a + (x - a) \cos \vartheta - (y - b) \sin \vartheta &= a_{12} + x \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) - y \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2); \\ b + (x - a) \sin \vartheta + (y - b) \cos \vartheta &= b_{12} + x \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) + y \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2); \end{aligned} \quad (2)$$

mely egyenletek a síkbeli alak *minden, tetszőleges* x , y összszerendezőjű pontjára nézve csak úgy állhatnak fenn, ha az x és y együtthatói és az állandó tagok az egyenletek mindkét oldalán egymással egyenlők, azaz ha

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_1 + \vartheta_2 \\ a_{12} &= a - a \cos \vartheta + b \sin \vartheta = a(1 - \cos \vartheta) + b \sin \vartheta \\ b_{12} &= b - a \sin \vartheta - b \cos \vartheta = b(1 - \cos \vartheta) - a \sin \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Ezekből könnyen nyerjük:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{a_{12} - [a_{12} \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + b_{12} \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)]}{4 \sin^2 \frac{1}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \\ b &= \frac{b_{12} + [a_{12} \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) - b_{12} \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2)]}{4 \sin^2 \frac{1}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \end{aligned} \right\} \dots \dots (4)$$

$$\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2.$$

Ezen egyenletek által tényleg kifejeztük a helyettesítő (egyenértékű vagy eredő) forgás a , b , ϑ jellemzőit az összeteteendő forgások a_1 , b_1 , ϑ_1 , a_2 , b_2 , ϑ_2 adataiból.

2. A talált eredményhez még úgy is eljuthattunk volna, hogy az x'' és y'' idézett kifejezéseiből az eredő forgás középpontjának a , b koordinátáit abból a feltételtől kerestük volna, hogy e pont helyzete, a két összeteteendő forgás után, eredeti helyzetével megegyezik; szóval, alkalmazva x'' , y'' kifejezéseit azon ismeretlen a , b öszszrendezőjű pontra, melyre nézve $x''=x=a$, $y''=y=b$, nyerjük:

$$\left. \begin{aligned} a &= a_{12} + a \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) - b \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ b &= b_{12} + a \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) + b \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{aligned} \right\} \dots \dots (5)$$

melyek a (3)-al egyenértékű egyenletek.

Ha forgások sorrendjét megfordítjuk, a fentírt formulákban a_{12} , b_{12} helyébe $a_{(12)}$, $b_{(12)}$ teendő.

Jegyzet. A 162—165. §§. eredményei minden nehézség nélkül általánosíthatók tetszőleges számú forgások öszszetevésére; az eljárásokat egygyel kevesebbszer kell ismételni, mint a menynyi az öszszeteendőők száma.

166. §. *Elemi forgások öszszetevése; az eredmény az elmozdulások sorrendjétől független. Általánosítás.*

A megelőző §§. megfontolásai és eredményei bármily értékű véges forgásokra nézve érvényesek; de fennállanak még végtelen kicsiny (elemi) forgásokra nézve is, csakhogy ekkor tetemesen egyszerűsödnek.

1. Ha egy $d\vartheta$ szögű elemi forgás lép fel, akkor a másodrendű csekély menynyiségek elhanyagolásával a 162. §. (1) egyenleteibe ϑ helyébe $d\vartheta$ -t írva:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - (y - b) d\vartheta \\ y' &= y + (x - a) d\vartheta \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

és így az a , b középpontú, $d\vartheta$ szögű forgás által az x koordináta változott $-(y-b)d\vartheta$ -, az y koordináta $+(x-a)d\vartheta$ menynyiséggel.

2. Ha két elemi forgás van adva, melyek középpontjai a_1 , b_1 ; a_2 , b_2 ; szögei $d\vartheta_1$, $d\vartheta_2$ akkor a másodrendű kicsiny menynyiségek elhagyásával a 162. §. (3), (4) és a 163. §. (1), (4) formulái:

$$\left. \begin{aligned} a'_2 &= a_2 - (b_2 - b_1) d\vartheta_1 \\ b'_2 &= b_2 + (a_2 - a_1) d\vartheta_1 \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} a_{12} &= (b_1 d\vartheta_1 + b_2 d\vartheta_2) = a_{(12)} \\ b_{12} &= -(a_1 d\vartheta_1 + a_2 d\vartheta_2) = b_{(12)} \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

$$\left. \begin{aligned} x'' &= x + b_1 d\vartheta_1 + b_2 d\vartheta_2 - y(d\vartheta_1 + d\vartheta_2) = x'' \\ y'' &= y - a_1 d\vartheta_1 - a_2 d\vartheta_2 + x(d\vartheta_1 + d\vartheta_2) = y'' \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Ez az eredmény, ugyanis, hogy $a_{12} - a_{(12)} = 0$, $b_{12} - b_{(12)} = 0$ vagy $x'' = x''$, $y'' = y''$, azt fejezi ki, hogy a forgások sorrendjének megfordításából származó transláció (158 és 164. §§.) itt csak *másodrendű* kicsiny lehet és e szerint elhanyagolható; ezért: *rendszerek elemi sík elmozdulásai összetevésénél az eredő elmozdulás az elmozdulások sorrendjétől független.*

A (2) tekintetbe vételével a 165. §. (4) egyenleteiből az eredő forgás a , b , $d\vartheta$ jellemzői

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{a_1 d\vartheta_1 + a_2 d\vartheta_2}{d\vartheta_1 + d\vartheta_2}; & b &= \frac{b_1 d\vartheta_1 + b_2 d\vartheta_2}{d\vartheta_1 + d\vartheta_2}; \\ d\vartheta &= d\vartheta_1 + d\vartheta_2. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

3. Legyen n számú elemi forgás adva: jellemzői a_1 , b_1 , $d\vartheta_1$; a_2 , b_2 , $d\vartheta_2$, a_n , b_n , $d\vartheta_n$.

Az 1. pont szerint az e forgások által létesített koordináta-változások:

$$\left. \begin{aligned} -(y-b_1)d\vartheta_1 - (y-b_2)d\vartheta_2 - \dots &= -\sum (y-b_k)d\vartheta_k \\ +(x-a_1)d\vartheta_1 + (x-a_2)d\vartheta_2 + \dots &= +\sum (x-a_k)d\vartheta_k \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Az ezen forgásokat helyettesző eredő elemi forgás a , b , $d\vartheta$ jellemzőinek olyanoknak kell lenniük, hogy az általuk létesített koordináta-változások az (5) értékekkel egyenlők, azaz:

$$-\sum (y-b_k)d\vartheta_k = -(y-b)d\vartheta; \quad +\sum (x-a_k)d\vartheta_k = +(x-a)d\vartheta,$$

mely egyenletek az x , y minden tetszőleges értékeire csak úgy állhatnak fenn, ha a határozatlan együtthatók módszere szerint [165. §. 1. pontja]:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\sum a_k d\vartheta_k}{\sum d\vartheta_k}; & b &= \frac{\sum b_k d\vartheta_k}{\sum d\vartheta_k} \\ d\vartheta &= \sum d\vartheta_k \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

miáltal az eredő forgás keresett jellemzői kifejezvék.

167. §. *Síkbeli (párhuzamos tengelyek körüli) szögsebességek összetevése. Az eredő szögsebesség jellemzői.*

A szögsebesség az elemi forgásszög osztata a hozzátartozó (a leírására szükséges) időelemmel.

Ha az a_1 , b_1 ; a_2 , b_2 ; a_n , b_n középpontú forgások t időpillanatban ω_1 , ω_2 , ω_n szögsebességekkel történnek, akkor az egyes elemi forgások:

$$d\vartheta_1 = \omega_1 dt; \quad d\vartheta_2 = \omega_2 dt; \quad \dots \quad d\vartheta_n = \omega_n dt \quad (1)$$

Ha a , b , $d\vartheta$, ω az eredő elemi forgás jellemzői, akkor:

$$d\vartheta = \omega dt \quad (2)$$

Mivel az A ponttal együtt mozog az X, Y , koordináta-rendszer, az x , és y , függetlenek az időtől.

Az A pont φ_x és φ_y gyorsulási összetevői a (2) szerint két-két részből állanak; az első tagok az O , pont gyorsulási összetevői az XY -re nézve; a második tagok pedig az O, A távolság X -, illetve Y tengelyek menti, $[x, \cos \vartheta - y, \sin \vartheta]$ és $[x, \sin \vartheta + y, \cos \vartheta]$ értékű vetületeinek gyorsulásait jelentik, de azon esetben, midőn bennük csak ϑ a változó.

A (2) ezen utóbbi tagjai e szerint az A azon gyorsulásának componentjei, mely keletkeznék, ha az O , kezdőpont szilárd volna és A az X, Y , koordináta-tengelyekkel együtt forogna az O , körül az $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$ momentán szögsebességgel.

Ámde: az O , is a síkbeli mozgó merev rendszer egyik pontja, míg A ezen rendszer másik pontja; ezért a (2) formulák tétele:

Rendszer sík mozgásánál valamely (A) pontjának φ_A gyorsulása egyenlő más (O), pontjának φ_o , gyorsulásával, hozzáadva (geometriai-lag) azt a gyorsulást, melyet az A pont felvesz, ha az a szilárdnak vett O , pont körül a mindenkorii momentán szögsebességgel, ω -val forog.

Jegyzet. Jelelje $O, A = r$, akkor az r , momentán szögsebessége és szöggyorsulása az O , körül megegyezik a merev rendszer momentán szögsebességével és szöggyorsulásával, míg r , maga az időtől független. Ezért, ha O ,-t szilárdnak vesszük, az A radiális (r , menti) és rotációs (r , re merőleges) gyorsulási összetevője [44. §. (7)].

$$-r, \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2, \quad \text{és} \quad r, \frac{d^2\vartheta}{dt^2}.$$

Magát a tételt következő geometriai egyenlet fejezi ki:

$$\varphi_A = \varphi_o, + \left[r, \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right] + \left[r, \frac{d^2\vartheta}{dt^2}\right] \dots \dots \dots (3)$$

169. §. *A sebességek momentán centrumának gyorsulása. A gördülés sebessége. Geometriai eljárás.*

Legyen (127. ábra) MN az alapgörbe; továbbá t időkor MN a gördülő görbe helyzete, I a momentán centrum, ω a szögsebesség; $t + \Delta t$ kor pedig ezek $M'N'$, I' és $\omega + \Delta\omega$. A pozitív X tengely a közös érintőben és a gördülés mentén fekszik, az Y tengely az alapgörbe pozitív normálisában; végre II' ív $= \Delta s$. Az I -vel t -kor egybeeső pontja az MN -nek $t + \Delta t$ -kor I' -ben van, az II' , ív oly sebességgel leszzen leírva, melynek határértéke

$$\lim \left(\frac{II'}{\Delta t}\right) = \lim \overline{II'}, (\omega + \Delta\omega) = u; \quad \dots \dots (1)$$

ezen sebesség az IX érintőre merőleges és értéke t -kor zérus. E szerint a momentán centrum sebessége t -tól $t + \Delta t$ -ig növekedett zérustól u -ig és

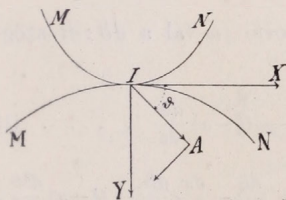
Ha a rendszer valamely pontjára nézve ez a két összetevő zérus, akkor az ily pont a *gyorsulás momentán centruma*; helyzetét a (2) egyenletek adják, ha baloldalukat zérussá teszszük.

I. Az A rulettájának íveleme (128. ábra) az A pontban IA sugárral van leírva és az IA -ra merőleges; a φ_A gyorsulásnak összszetevője ezen ív AI normálisra mentén [mely az X tengellyel $\pi - \vartheta$, az Y tengellyel $\pi - (\frac{1}{2}\pi - \vartheta)$ szöget képez]: $\varphi_x \cos(\pi - \vartheta) + \varphi_y \cos(\frac{1}{2}\pi + \vartheta) = +\omega c \sin \vartheta + \omega^2 r$. Ha az A oly pont, melynek normális gyorsulása zérus, akkor az

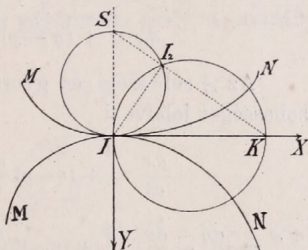
$$\omega c \sin \vartheta + \omega^2 r = 0, \quad \text{vagy a} \quad cy + \omega(x^2 + y^2) = 0 \quad (3)$$

feltétel azon pontok x, y koordinátáit határozza meg, melyek t időkor csak tangenciális gyorsulással bírnak.

A (3) oly kör egyenlete, mely I -ben az MN -nel érintkezik és mely $x=0, y=-\frac{c}{\omega}$ helyen, az S pontban (129. ábra) metszi az Y tengely



128. ábra.



129. ábra.

folytatását; a kör minden pontjának normális gyorsulása t -kor zérus lévén, e componens közönséges kifejezése: $\frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^2 r^2}{\rho}$ is zérus, miből véges $AI=r$ távolságoknál $\rho=\infty$. E szerint az e körön lévő rendszerbeli pontok rulettáinak görbülete t -kor zérus, azaz e ruletták ekkor inflexiós (áthajló) ponttal bírnak, a miért is ezt a kört *inflexiós kör*-nek (az *áthajló pontok körének*) nevezik.

Az I momentáncentrum trajektoriája t -kor forduló csúspontot mutat. (Math. repertórium 62a. §., 70. lap e . pontja).

II. Az A rulettájának érintője t -kor merőleges az AI -ra és így $\frac{1}{2}\pi + \vartheta$ és ϑ az irányszögei (128. ábra); gyorsulásának tangenciális componense (2)-ből $\varphi_x \cos(\frac{1}{2}\pi + \vartheta) + \varphi_y \cos \vartheta = -\omega c \cos \vartheta + r \frac{d\omega}{dt}$; e szerint azon görbe, melynek pontjai t -kor csak normális gyorsulással bírnak, az:

$$(x^2 + y^2) \frac{d\omega}{dt} - \omega cx = 0 \quad (4)$$

egyenletnek tartoznak megfelelni. Ez pedig az Y -tengelyt I -ban érintő kör, mely az X tengelyt $y=0, x=\omega c: \frac{d\omega}{dt}$ helyen, azaz K -ban metszi (129. ábra).

Jegyzet. A két kör metszéspontja. I_2 (129. ábra), megfelel a (3) és (4) egyenleteknek, de ha ezek együttesen fennállanak, azt mondják, hogy e pont tangenciális és normális gyorsulása zérus, avagy hogy a (2) bal oldalai zérus értékűek.

Az I_2 e szerint a gyorsulás momentán centruma.

171. §. *A gyorsulások momentán centruma. Analitikai eljárás. Egyszerűsítés. Geometriai szerkesztés. A gyorsulás, vonatkoztatva e centrumra.*

Miként a 137 és 166. §§-okban a sebességekre nézve, úgy itt a gyorsulásokra nézve is könnyen találhatunk oly pontot, melynek t időbeli (azaz momentán) gyorsulása zérus.

1. Jeleljék ξ, η a sebességek momentán centruma koordinátáit, x, y a rendszer tetszőleges A pontjaét a szilárd X, Y rendszerre vonatkoztatva; akkor a 137. §. (2) formulája szerint:

$$dx = +(\eta - y) d\vartheta; \quad dy = -(\xi - x) d\vartheta$$

Az A sebességi és gyorsulási összetevői (ω -val a $d\vartheta:dt$ szögsebességet jelelve):

$$\frac{dx}{dt} = +(\eta - y) \frac{d\vartheta}{dt}; \quad \frac{dy}{dt} = -(\xi - x) \frac{d\vartheta}{dt} \quad \dots \quad (1)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{d\eta}{dt} - \frac{dy}{dt} \frac{d\vartheta}{dt} + (\eta - y) \frac{d^2\vartheta}{dt^2} \right); \quad \frac{d^2y}{dt^2} = - \left(\frac{d\xi}{dt} - \frac{dx}{dt} \frac{d\vartheta}{dt} - (\xi - x) \frac{d^2\vartheta}{dt^2} \right),$$

avagy, a derékszögű sebességi összetevők eliminációjával

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= +(\eta - y) \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + (\xi - x) \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 + \frac{d\eta}{dt} \frac{d\vartheta}{dt}; \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -(\xi - x) \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + (\eta - y) \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 - \frac{d\xi}{dt} \frac{d\vartheta}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (2)$$

A rendszer mozgását és így az $x, y, \xi, \eta, \vartheta$ mennyiségeket az idő ismert függvényeinek tekintjük. Az x, y oly értékei, melyek a gyorsulás (2) egyenleteinek jobb részeit zérussá teszik, azon pontokat határozzák meg, melyek a gyorsulás momentán (instantán) centrumai, és a görbe, melyen fekszenek, a gyorsulás momentán középpontjainak görbéje.

Ezen görbe egyenletét nyerjük, ha az (2.) egyenletek baloldalait

zérussá teszszük és a ξ -t, η -át, $\frac{d\xi}{dt}$ -t, $\frac{d\eta}{dt}$ -t, $\frac{d\vartheta}{dt}$ -t, $\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$ -t a t -vel kifejez-

zük és az egyenletekből a függetlent (itt a t -t) elimináljuk; marad az x és y között oly összefüggés, mely a feltételt, hogy a gyorsulás zérus legyen, mindig kielégíti.

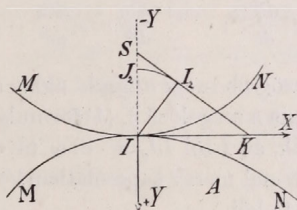
2. Kifejezéseink lényegesen egyszerűsödnek, ha az XY rendszer kezdőpontját a sebességek momentán centrumába, I -be tesszük át (130. ábra) és az X tengelyt a közös érintő pozitív irányába (a gördülés mentén) fektetjük: legyen c az I érintkező pont sebessége a gördülés folytán (169. §.); ekkor:

$$\xi=0, \quad \frac{d\xi}{dt}=c; \quad \eta=0, \quad \frac{d\eta}{dt}=0, \quad \dots \quad (3)$$

miáltal a gyorsulás centrumára vonatkoztatott (2) egyenletekből:

$$y \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + x \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 = 0; \quad x \frac{d^2\vartheta}{dt^2} - y \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 = c \frac{d\vartheta}{dt} \quad \dots \quad (4)$$

Az első egyenlet oly II_2 egyeneset képvisel, mely átmegy a sebességek I momentán centrumán és az OX érintővel — arc $\operatorname{tg} \left\{ \frac{(d\vartheta)^2}{dt^2} : \frac{d^2\vartheta}{dt^2} \right\}$ szöget képez; a másik egyenlet pedig oly egyeneset, mely a coordi-



130. ábra.

náta-tengelyeket $IK = c \frac{d\vartheta}{dt} : \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$ és $IS = -c : \frac{d\vartheta}{dt}$ távolságokban metszi, az X tengellyel $+\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left\{ \frac{d^2\vartheta}{dt^2} : \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \right\}$ szöget képez és e szerint az előbbi egyenesre merőleges.

Ezen két egyenes (I_2) metszéspontja (130. ábra) a gyorsulásnak keresett momentán centruma. (V. ö. a megelőző §. *Jegyzetét*).

3. Jelelje r_2 a tetszőleges A pont távolságát a φ gyorsulás I_2 centrumától (130. ábra); a merev rendszer szögsebessége és szöggyorsulása bármely vele mozgó r_2 vonalra nézve ugyanaz lévén, végre pedig az I_2 gyorsulása zérus lévén, a 168. §. (3) tételének alakja itt (az A index elhagyásával)

$$\varphi = r_2 \omega^2 + r_2 \omega' \quad \dots \quad (5)$$

E szerint a φ gyorsulás úgy tekinthető, mint az $\overline{AI_2}$ menti $r_2 \omega^2$ centripetális (radiális, középre tartó) és a reá merőleges forgató (a növekvő ϑ -k menti) $r_2 \omega'$ összetevők eredője.

Ez az eredő a mindenkori r_2 vezérsugárral η_2 szöget képez; a φ és a $\operatorname{tg} \eta_2$ értéke az (5)-ből:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= r_2 [\omega'^2 + \omega^4]^{\frac{1}{2}} \\ \operatorname{tg} \eta_2 &= \omega' : \omega^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

E szerint a rendszer azon pontjai, melyeknek gyorsulása t -kor egyenlő értékkel bírnak, az I_2 körüli középponti körökön fekszenek s e pontok gyorsulásának iránya a hozzájuk húzott r_2 vezérsugarakkal ugyanazon η_2 szöget képez.

Analóg viszonyok érvényesek a magasabbrendű gyorsulásoknál (V. ö. a 174. §. (5) és a 177. §. (5) és (6) formuláit).

172. §. *A gyorsulás centruma állandó forgásnál. A sebesség centrumának gyorsulása.*

A rendszer tetszőleges A pontjának gyorsulási összetevői a megelőző §. (2) és (3) egyenletei s a 130. ábra koordináta-tengelyei szerint:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -y \frac{d^2\theta}{dt^2} - x \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = x \frac{d^2\theta}{dt^2} - y \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - c \frac{d\theta}{dt}. \quad (1)$$

1. Ha a forgás ω szögsebessége állandó, akkor a szöggyorsulás zérus és a gyorsulás centruma a megelőző §. (4) formulái értelmében a negatív Y tengelyen fekszik, az I -től $IJ_2 = -c : \omega$ távolságban (130. ábra).

A tetszőleges MN -nel merev kapcsolatban lévő A pont gyorsulási összetevői ekkor az (1)-ből:

$$\varphi_x = -x\omega^2; \quad \varphi_y = -y\omega^2 - c\omega; \quad \dots \dots \dots (2)$$

miből:

$$\varphi_y : \varphi_x = [y + (c : \omega)] : x.$$

Ámde ezen esetben az $\overline{J_2A}$ vonal vetületeinek viszonya ugyanaz mint az A gyorsulásaié: ezért az A gyorsulása az AJ_2 vonalban van és így a rendszer valamenynyi pontjának gyorsulása az $\omega = \text{constans}$ esetben a J_2 állandó helyzetű gyorsulási centrumom megyen keresztül.

2. A sebességek I centrumát itt is a gördülő görbe egy pontjának tekintjük; sebessége a rajz által elötüntetett mozgásállapot pillanatában zérus; de gyorsulása a zérustól különböző, ezt nyerjük, ha az (1) egyenleteibe az I koordinátáit, $x = 0$ t, $y = 0$ -t teszszük. Származik:

$$\varphi_{ix} = 0, \quad \varphi_{iy} = -c\omega \quad \dots \dots \dots (3)$$

szóval: a sebességek momentán-centrumának gyorsulása mindig merőleges a közös érintőre és $-c\omega$ értékű [169. §. (3)].

Ha a pozitív Y -tengelyt az alapgörbe görbületi középpontja felé

húzzuk (mint a 130. ábrában) és a gördülést úgy hajtjuk végre, hogy az érintkező I pont mindig a *positiv* X mentén haladjon, azaz, hogy c mindig *positiv*, akkor:

α . Ha a gördülő görbe az alapgörbe *domború* (külső) oldalán gördül, a ϑ növekszik, az $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$ *positiv*, a $-\omega c$ *negativ* azaz a $-Y$ tengely felé van fordítva.

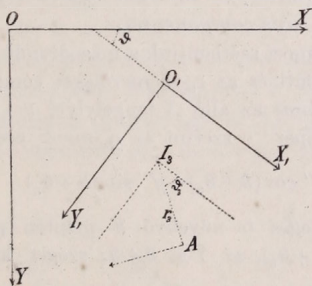
β . Ha a gördülő görbe az alapgörbe *homorú* (belső) oldalán gördül, a ϑ fogy, az ω *negativ*, a $-\omega c$ *positiv* és a $+Y$ tengely felé van fordítva.

6. Merev rendszer sík mozgásának magasabb rendű gyorsulásai.

173. §. A másodrendű gyorsulás analitikai előütetése. E gyorsulás centruma.

1. A rendszer tetszőleges A pontjának derékszögű koordinátái egyenletét [141. §. (1)] az idő szerint háromszor differentiálva:

$$x''' = p''' + x, (\cos \vartheta)''' - y, (\sin \vartheta)'''; \quad y''' = q''' + x, (\sin \vartheta)''' + y, (\cos \vartheta)''' \quad (1)$$



131. ábra.

hol:

$$\left. \begin{aligned} (\cos \vartheta)''' &= +\omega^3 \sin \vartheta - 3\omega\omega' \cos \vartheta - \omega'' \sin \vartheta \\ (\sin \vartheta)''' &= -\omega^3 \cos \vartheta - 3\omega\omega' \sin \vartheta + \omega'' \cos \vartheta \end{aligned} \right\} \dots \dots (2)$$

Könynyű bebizonyítani, hogy a másodrendű gyorsulásnak is meg van a maga középpontja, I_3 (131. ábra). Jeleljék ξ_3, η_3 ezen harmadrendű sebesség I_3 középpontjának derékszögű koordinátáit az X, Y mozgó rendszerben; jellemző egyenleteik:

$$0 = p''' + \xi_3 (\cos \vartheta)''' - \eta_3 (\sin \vartheta)'''; \quad 0 = q''' + \xi_3 (\sin \vartheta)''' + \eta_3 (\cos \vartheta)''', \quad (3)$$

melyekből a ξ_3 és η_3 meghatározható.

Az (1) és (3) különbsége:

$$\begin{aligned} x''' &= (x - \xi_3) (\cos \vartheta)''' - (y - \eta_3) (\sin \vartheta)''' \\ y''' &= (x - \xi_3) (\sin \vartheta)''' + (y - \eta_3) (\cos \vartheta)''' \end{aligned} \quad (4)$$

2. Ha (131. ábra) az X, Y -hoz párhuzamos, de I_3 kezdetű koordináta-rendszerre vonatkoztatva, x_3 és y_3 illetve r_3 , ϑ_3 az A pont derékszögű, illetve polárkoordinátái, akkor $x - \xi_3 = x_3 = r_3 \cos \vartheta_3$, $y - \eta_3 = y_3 = r_3 \sin \vartheta_3$ és:

$$\begin{aligned} x''' &= r_3 [\cos \vartheta_3 (\cos \vartheta)''' - \sin \vartheta_3 (\sin \vartheta)'''] = r_3 \omega_3 \cos (\vartheta_3 + \lambda_3) \\ y''' &= r_3 [\cos \vartheta_3 (\sin \vartheta)''' + \sin \vartheta_3 (\cos \vartheta)'''] = r_3 \omega_3 \sin (\vartheta_3 + \lambda_3) \end{aligned} \quad (5)$$

hol az ω_3 és λ_3 a mozgó rendszer valamenynyi pontjára nézve ugyanazon két mennyiséget jelent, melyek meghatározására az

$$\omega_3 \cos \lambda_3 = (\cos \vartheta)'''; \quad \omega_3 \sin \lambda_3 = (\sin \vartheta)''' \quad (6)$$

egyenletek szolgálnak.

Az A pont eredő másodrendű gyorsulása (harmadrendű sebessége):

$$[(x''')^2 + (y''')^2]^{\frac{1}{2}} = \varphi_2 = r_3 \omega_3, \quad (7)$$

mely e szerint az $\overline{I_3 A} = r_3$ távolsággal egyenesen arányos.

174. §. *A másodrendű gyorsulásnak saját középpontjára vonatkozó centripetális és rotatórius componensei.*

A φ_2 gyorsulást most szétbontjuk a másodrendű gyorsulás I_3 centrumától számított r_3 -menti és az r_3 -re merőleges componenseire.

a) Az r_3 (131. ábra) az álló X -tengellyel $\vartheta + \vartheta_3$, az Y -tengellyel $\frac{1}{2}\pi - (\vartheta + \vartheta_3)$ szöget képez: e szerint az r_3 menti componens

$$x''' \cos (\vartheta + \vartheta_3) + y''' \sin (\vartheta + \vartheta_3) \quad (1)$$

b) A r_3 -ra merőleges (a növekvő ϑ mentén pozitívnek számított) irány az X -el $\frac{1}{2}\pi + (\vartheta + \vartheta_3)$, az Y -al $\vartheta + \vartheta_3$ szöget képez; az r_3 -re merőleges componens

$$-x''' \sin (\vartheta + \vartheta_3) + y''' \cos (\vartheta + \vartheta_3) \quad (2)$$

c) Felhasználva a megelőző §. (5) egyenleteinek jobb oldalait, az x''' és y''' értékei illetén helyetteszése és némi rövidítés után az (1) és (2) componensek:

$$r_3 \omega_3 \cos (\lambda_3 - \vartheta); \quad r_3 \omega_3 \sin (\lambda_3 - \vartheta) \quad (3)$$

Tekintetbe véve a megelőző §. (6) és a (2) egyenleteit, nyerjük:

$$\begin{aligned} \omega_3 \cos (\lambda_3 - \vartheta) &= \cos \vartheta (\cos \vartheta)''' + \sin \vartheta (\sin \vartheta)''' = -3\omega\omega'; \\ \omega_3 \sin (\lambda_3 - \vartheta) &= \cos \vartheta (\sin \vartheta)''' - \sin \vartheta (\cos \vartheta)''' = -\omega^3 + \omega'' \end{aligned}$$

és végre az (1)- és (2)-ből a keresett két componens:

$$-3r_3 \omega\omega'; \quad r_3 (\omega'' - \omega^3) \quad (4)$$

E szerint a másodrendű gyorsulás (megfelelőleg az elsőrendűnek, 171. §. 3. pontja) egyik componense, ugyanis $-3r_3\omega\omega'$ a másodrendű gyorsulások I_3 középpontja felé fordított centripetális gyorsulás, a másik, nevezetesen $r(\omega''-\omega^3)$ ezen elsőre merőleges és a növekvő ϑ mentén pozitívnek vett forgató gyorsulás.

A másodrendű gyorsulás eredője és ennek az r_3 -al képezett η_3 szöge:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_3 &= r_3 [9\omega^2\omega'^2 + (\omega'' - \omega^3)^2]^{\frac{1}{2}}; \\ \operatorname{tg} \eta_3 &= -(\omega'' - \omega^3) : 3\omega\omega'. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

E szerint a rendszer azon pontjai, melyeknek másodrendű gyorsulásai t -kor egyenlők, I_3 körül középponti köröket képeznek, és e körök területén lévő egyes pontok ezen gyorsulása a hozzájuk az I_3 -ból húzott sugárral állandó η_3 szöget képez.

Jegyzet. Ha az ω' szöggyorsulás állandó, az (5)-ből

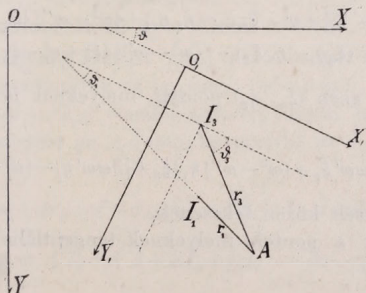
$$\varphi_2 = r_3 \omega [9\omega'^2 + \omega^4]^{\frac{1}{2}} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \eta_3 = \omega^2 : 3\omega' \dots \dots \dots (6)$$

az eredő másodrendű gyorsulás és hajlásszöge tangensének értéke.

Ha a szögsebesség, ω , állandó, akkor $-r_3\omega^3$ az egyedül fennmaradó rotatórius gyorsulás, mely a nevezett concentrikus körök érintőjébe esik.

175. §. *A másodrendű gyorsulásnak a sebességek középpontjára vonatkoztatott tangenciális és normális összetevője.*

A másodrendű gyorsulás mindig a mozgás síkjában lévén, szabad ezt a sebességek momentán centrumára, I_1 -re is vonatkoztatni (132. ábra); a φ_2 -nek normális componense az AI_1 (a pálya normálisa-) mentén, tangenciális összetevője erre merőleges irányban fekszik.



132. ábra.

1. Jeleljék $\overline{I_1A} = r_1$ a mozgó rendszer tetszőleges A pontjának távolságát az I_1 -től, ϑ_1 az r_1 és az X , tengely közötti szöget; továbbá a másodrendű gyorsulás I_3 középpontjából mint kezdetből kiinduló, az X, Y ,

mozgó tengelyekhez párhuzamos tengelyekre vonatkozólag legyenek az I_1 derékszögű coordinátái ξ_1, η_1 , ellenben polárcoordinátái ϱ_1, ψ_1 , míg ugyanazon rendszerben az A coordinátái, mint a 173. §-ban, ξ_3, η_3 , illetve r_3, ϑ_3 .

a) Az r_1 irányszögei a szilárd X és Y tengelyekhez $(\vartheta + \vartheta_1)$ és $\frac{1}{2}\pi - (\vartheta + \vartheta_1)$; e szerint a φ_2 -nek normális componense:

$$\varphi_{2,n} = x''' \cos(\vartheta + \vartheta_1) + y''' \sin(\vartheta + \vartheta_1) \quad (1)$$

b) Az r_1 -re merőleges (a növekvő ϑ mentén pozitívnek számított) egyenesnek irányszögei $\frac{1}{2}\pi + (\vartheta + \vartheta_1)$ és $(\vartheta + \vartheta_1)$; ezért a tangenciális componens:

$$\varphi_{2,t} = -x''' \sin(\vartheta + \vartheta_1) + y''' \cos(\vartheta + \vartheta_1) \quad (2)$$

c) Tekintettel az x''' - és y''' -nek a 173. §. (5) formuláiban felírt értékeire, az (1)- és (2)-ből:

$$\varphi_{2,n} = r_3 \omega_3 \cos(\vartheta_3 + \lambda_3 - \vartheta - \vartheta_1); \quad \varphi_{2,t} = r_3 \omega_3 \sin(\vartheta_3 + \lambda_3 - \vartheta - \vartheta_1) \quad (3)$$

2. E gyorsulások másként is tüntethetők elő, mivel ϑ_1 és ϑ_3 kifejezhetők az I_1 és az A coordinátái segítségével (l. az 1. pontot és a 132. ábrát):

$$r_3 \cos \vartheta_3 = \xi_3; \quad r_3 \sin \vartheta_3 = \eta_3; \quad r_1 \cos \vartheta_1 = \xi_3 - \xi_1, \quad r_1 \sin \vartheta_1 = \eta_3 - \eta_1.$$

Ezekből és a 174. §. (3) és (4) egyenletei szerint:

$$\begin{aligned} r_1 r_3 \cos(\vartheta_3 - \vartheta_1) &= \xi_3^2 - \xi_3 \xi_1 + \eta_3^2 - \eta_3 \eta_1; \\ r_1 r_3 \sin(\vartheta_3 - \vartheta_1) &= \xi_3 \eta_3 - \eta_3 \xi_1 - \xi_3 \eta_3 + \xi_3 \eta_1 \end{aligned}$$

$$\omega_3 \cos(\lambda_3 - \vartheta) = -3\omega\omega' \quad \omega_3 \sin(\lambda_3 - \vartheta) = -\omega^3 + \omega''.$$

Ezek értelmében az (1) és (2), illetve a (3) összetevők:

$$\begin{aligned} r_1 \varphi_{2,n} &= -3\omega\omega' (\xi_3^2 + \eta_3^2 - \xi_3 \xi_1 - \eta_3 \eta_1) + (\omega^3 - \omega'') (\xi_3 \eta_1 - \eta_3 \xi_1) \\ r_1 \varphi_{2,t} &= -3\omega\omega' (\xi_3 \eta_1 - \eta_3 \xi_1) - (\omega^3 - \omega'') (\xi_3^2 + \eta_3^2 - \xi_3 \xi_1 - \eta_3 \eta_1) \end{aligned} \quad (4)$$

3. A rendszer azon (ξ_3, η_3) pontjai, melyeknek normális gyorsulása zérus, a

$$-3\omega\omega' (\xi_3^2 + \eta_3^2) + [3\omega\omega' \xi_1 + (\omega^3 - \omega'') \eta_1] \xi_3 + [3\omega\omega' \eta_1 - (\omega^3 - \omega'') \xi_1] \eta_3 = 0 \quad (5)$$

egyenlet által képviselt körön fekszenek.

Ellenben azok a pontok, melyeknek tangenciális gyorsulása zérus, megfelelnek a

$$\begin{aligned} -(\omega^3 - \omega'') (\xi_3^2 + \eta_3^2) - [3\omega\omega' \eta_1 - (\omega^3 - \omega'') \xi_1] \xi_3 + \\ + [3\omega\omega' \xi_1 + (\omega^3 - \omega'') \eta_1] \eta_3 = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

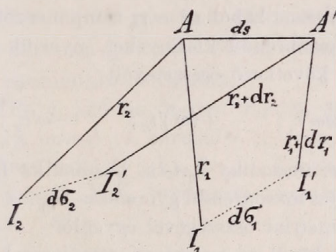
egyenlet által előtüntetett körnek.

Mind a két egyenletnek megfelelnek a $\xi_3 = \xi_1, \eta_3 = \eta_1$, és a $\xi_3 = 0, \eta_3 = 0$ pontok is; azaz, mindkét kör keresztül megyen az elsőrendű sebes-

ségek momentán centrumán és a harmadrendű sebességek (másodrendű gyorsulások) momentán centrumán s így e két kör metszi egymást.

176. §. Síkbeli mozgás másodrendű gyorsulásának geometriai előtűntetése.

Jeleljék (133. ábra) A valamely rendszerbeli pont helyét, I_1 a sebesség-, I_2 gyorsulás (a másodrendű sebesség) momentán centrumát; ω a rendszer szögsebességét, ω' szöggyorsulását, továbbá legyen $\overline{I_1 A} = r_1$, $\overline{I_2 A} = r_2$; ezek vonatkoznak a t időpillanatra; ellenben A' , I_1' , I_2' , $\omega + d\omega$, $\omega' + d\omega'$, $\overline{I_1' A'} = r_1 + dr_1$, $\overline{I_2' A'} = r_2 + dr_2$ a $t + dt$ időpillanatra. Az A pont pályájának íveleme $\overline{AA'} = ds$; az I_1 -é $\overline{I_1 I_1'} = d\sigma_1$, az I_2 -é $\overline{I_2 I_2'} = d\sigma_2$.



133. ábra.

Az A pont φ gyorsulását az $\overrightarrow{AI_2}$ mentén fekvő $r_2 \omega^2$ és az erre merőleges $r_2 \omega'$ componensekből állónak tekinthetni (171. §. 3. pontja); az A' pont gyorsulása $\varphi + d\varphi$, ennek componense az $\overrightarrow{A'I_2'}$ mentén $(r_2 + dr_2) [\omega^2 + d(\omega^2)]$, erre merőlegesen $(r_2 + dr_2) (\omega' + d\omega')$.

Az A pont másodrendű gyorsulását nyerjük, ha a φ és a $\varphi + d\varphi$ teljes (irány- és nagyság szerint vett) különbségét a dt -vel osztjuk.

1. E célból szétbontjuk az $(r_2 + dr_2) [\omega^2 + d(\omega^2)]$ componenst (melynek iránya az $(r_2 + dr_2) = \overline{I_2' A'}$ vonalba esik) oly három összetevőre, melyek elseje $\overrightarrow{AI_2}$ -höz, második a $\overline{AA'}$ -hez, harmadika az $\overline{I_2 I_2'}$ -höz párhuzamos.

All:

$$-(r_2 + dr_2) [\omega^2 + d(\omega^2)] = \overrightarrow{A'I_2'} [\omega^2 + d(\omega^2)]; \quad \dots \quad (1)$$

$$-(r_2 + dr_2) = \overrightarrow{A'I_2'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AI_2} + \overrightarrow{I_2 I_2'} = -\overline{ds} - \overline{r_2} + \overline{d\sigma_2}. \quad \dots \quad (2)$$

Amde:

$$ds = \overline{I_1 A} \cdot \omega dt = r_1 \omega dt; \quad d\sigma_2 = c_2 dt,$$

hol c_2 a gyorsulás I_2 középpontjának haladó sebessége.

E szerint az (1) centripetális gyorsulás három componense:

$$-[\omega^2 + d(\omega^2)] r_1 \omega dt; \quad -[\omega^2 + d(\omega^2)] r_2; \quad +[\omega^2 + d(\omega^2)] c_2 dt.$$

Levonva a másodikból a $-\omega^2 r_2$ componenst, s dt -vel osztva, nyerjük a magasabbrendűek elhagyásával a centripetális gyorsulás időbeli változásának következő összetevőit:

$$-\omega^3 r_1; \quad -(\omega^2)' r_2; \quad +\omega^2 c_2; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

melyek elseje az $\vec{AA'}$, másodika az $\vec{AI_2}$, harmadika az $\vec{I_2 I_2'}$ mentén fekszik.

2. Az $(r_2 + dr_2)$ $(\omega' + d\omega')$ componenst pedig (melynek iránya az $(r_2 + dr_2)$ -re, azaz az $\vec{I_2 A'}$ -re merőleges) az $\vec{AA'}$ -re, az $\vec{I_2 A}$ -ra, és az $\vec{I_2 I_2'}$ -re merőleges három irány szerint bontjuk szét.

Felhasználva az (2) egyenletet, e componens nevezett összetevőit:

$$+(\omega' + d\omega') r_1 \omega dt; \quad +(\omega' + d\omega') r_2; \quad -(\omega' + d\omega') c_2 dt.$$

Levonva ezek másodikából az $\omega' r_2$ -componenst, osztva dt -vel, és elhanyagolva a magasabbrendű kicsinyeket, nyerjük e forgató gyorsulás időbeli változásának következő összetevőit

$$+\omega \omega' r_1, \quad +(\omega')' r_2; \quad -\omega' c_2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

melyek elseje $\vec{AA'}$ -ra, másodika $\vec{I_2 A}$ -ra, harmadika $\vec{I_2 I_2'}$ -re merőleges.

3. Az A pont teljes másodrendű gyorsulása, φ_2 , a (3) és (4) formulák componenseinek geometriai összegével egyenlő.

E componensék közül az egymásra merőlegesek páronként egyesíthetők; az első párra nézve

$$\omega r_1 \sqrt{\omega'^2 + \omega^4} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \eta = \omega' : \omega^2$$

az eredő és ennek az $\vec{AA'}$ -val (az A pont pályája érintőjével) képezett hajlásszöge tangense számára; a második párra nézve

$$r_2 \sqrt{4\omega^2 \omega'^2 + \omega''^2} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \zeta = \omega'' : (\omega^2)'$$

az eredő és ennek az r_2 -vel képezett hajlásszöge tangense számára; végre a harmadik párból lesz:

$$c_2 \sqrt{\omega'^2 + \omega^4} \quad \text{és} \quad -\operatorname{tg} \eta = -(\omega' : \omega^2)$$

az eredő és ennek az $\vec{I_2 I_2'}$ -vel (az I_2 pont pályája érintőjével) képezett hajlásszöge tangense számára; ez az utóbbi eredő ugyanaz valamenynyi rendszerbeli pontra nézve.

Jegyzet. Ezen §. eredményeit analitikailag is nyertük volna, ha a 173. §. (4) egyenleteiből kiindulva, az x''' és y''' componensek vetületeit kerestük volna az A pont elmozdulása, az r_2 - és az I_2 elmozdulása valamint az ezekre merőleges irányok mentén. E számítás tényleges megértését az olvasónak ajánljuk.

177. §. *A merev rendszer tetszőleges rendű gyorsulásai és ezek momentán centrumai.*

A 171. §. eredményeit azonnal általánosíthatni.

Ugyanis, a 168. §. (1) egyenleteit:

$$x=p+x, \cos \vartheta -y, \sin \vartheta; \quad y=q+x, \sin \vartheta +y, \cos \vartheta, \dots \quad (1)$$

az idő szerint n -szer differenciálva, az

$$x^{(n)}=p^{(n)}+x, (\cos \vartheta)^{(n)}-y, (\sin \vartheta)^{(n)}; \quad y^{(n)}=q^{(n)}+x, (\sin \vartheta)^{(n)}+y, (\cos \vartheta)^{(n)} \quad (2)$$

kifejezések az n -ed rendű sebességek vagy az $n-1$ -ed rendű gyorsulások összetevői.

Ha az egyenletek bal oldalait zérusnak vesszük, azon pont x , és y , koordinátáira nézve nyerünk két meghatározó egyenletet, melyben az $(n-1)$ -edrendű gyorsulás zérus, azaz, mely az $n-1$ -edrendű gyorsulások momentán centruma.

1. Jeleljék, a 173. §. jelölése szerint rendre $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \xi_3, \eta_3, \dots, \xi_n, \eta_n$ az első, a második, a harmad-, az n -edrendű sebességek momentán centrumának, azaz $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$ -nek, koordinátáit a merev rendszerrel együtt mozgó X, Y , rendszerre vonatkozólag; ezek feltételei egyenletei $[n=1, 2, \dots, n]$:

$$0=p^{(n)}+\xi_n (\cos \vartheta)^{(n)}-\eta_n (\sin \vartheta)^{(n)}; \quad 0=q^{(n)}+\xi^{(n)} (\sin \vartheta)_{(n)}+\eta_n (\cos \vartheta)^{(n)} \quad (3)$$

Továbbá, ha a ξ_n -t, η_n -t, azaz az I_n pontot egy polárkoordináta-rendszer kezdetének választjuk és az A pontnak e rendszerre vonatkozó összközpontozói itt r_n, ϑ_n , az X, Y -re nézve pedig x, y , akkor:

$$\begin{aligned} x-\xi_n &= r_n \cos \vartheta_n; & y-\eta_n &= r_n \sin \vartheta_n; \\ \text{míg: } (\cos \vartheta)^{(n)} &= \omega_n \cos \lambda_n; & (\sin \vartheta)^{(n)} &= \omega_n \sin \lambda_n; \end{aligned} \quad (4)$$

alakban írható, hol ω_n egy n -ed rendű szögsebességgel egyenjellegű mennyiség, és λ_n szög [173. §. (6)].

Levonva (3)-at (2)-ből, a (4) jelölésekkel nyerjük:

$$x^{(n)}=r_n \omega_n \cos (\vartheta_n + \lambda_n); \quad y^{(n)}=r_n \omega_n \sin (\vartheta_n + \lambda_n); \dots \quad (5)$$

ezekből az $n-1$ -ed rendű gyorsulás:

$$\varphi_{n-1}=r_n \omega_n, \dots \quad (6)$$

mely egyenletrendszer értelmében egy tetszőleges A pont $n-1$ -ed rendű gyorsulása mindig arányos az ugyanazon rendű gyorsulások I_n momentán centrumától való r_n távolságával; továbbá, ha ψ a szilárd X s a mozgó X , tengelyek közötti szög s így az AI_n egyenes a nyugvó X tengellyel $\vartheta_n + \psi$ szöget képez, akkor ugyanez az AI_n az $(n-1)$ -edrendű gyorsulással az állandó $\lambda_n - \psi$ szöget képezi; ez érvényes valamenynyi A pontra nézve.

178. §. *Állandó viszonyt és állandó irány-különbséget mutató magasabb rendű gyorsulások.*

Legyen I_m az m -ed, I_n n -ed rendű sebességek ($m-1$ -ed és $n-1$ -ed rendű gyorsulások) középpontja és legyen valamely tetszőleges A rendszerbeli pontnak távolsága ezekről r_m és r_n .

A megelőző §. (6) egyenlete szerint:

$$\varphi_{m-1} = r_m \omega_m; \quad \varphi_{n-1} = r_n \omega_n \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

A φ_{m-1} és φ_{n-1} gyorsulás az álló X tengelylyel a megelőző §. (5) kifejezései szerint

$$\vartheta_m + \lambda_m \quad \text{és} \quad \vartheta_n + \lambda_n$$

szögeket képeznek és így az egymással képezett szög

$$(\varphi_{m-1}, \varphi_{n-1}) \angle = \vartheta_n - \vartheta_m + \lambda_n - \lambda_m \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

1. A mozgó pontrendszer azon pontjai, melyekre nézve a φ_{m-1} és φ_{n-1} gyorsulások állandó, k viszonyban állanak egymáshoz, eleget tesznek az

$$\varphi_{n-1} : \varphi_{m-1} = k = r_n \omega_n : r_m \omega_m \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

egyenletnek. Ámde az ω_m és ω_n mennyiségek csak ϑ -tól és annak időbeli differenciálquotienszeitől függenek, melyek csak az X, O, Y , merev koordinátarendszer fekvésére és az első és magasabbrendű szögsebességekre vonatkoznak; de ezek minden rendszerbeli pontra nézve ugyanazok lévén, az ω_n és ω_m is ugyanaz valamenynyi rendszerbeli pontra nézve.

E szerint a (3) redukálódik az

$$r_n : r_m = k \omega_m : \omega_n = \text{constans} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

egyenletre; ez pedig egy elemi geometriai tétel értelmében az I_m és I_n pontokhoz conjugált kört képvisel, melynek középpontja az I_m I_n egyenesen vagy folytatásán fekszik és mely a nevezett két pont között is metszi ezt az egyenest; e kör a nevezett pontok helye.

2. Ha azokat a rendszerbeli pontokat keressük, melyekre nézve a (2) szög állandóan ε értékű, akkor megfontolandó, hogy az r_m , ϑ_m ; r_n , ϑ_n ezen pontokra nézve különbözök, míg az ω_m , ω_n , λ_m , λ_n valamenynyi rendszerpontra nézve ugyanazok.

E szerint itt a feltétel

$$\vartheta_n - \vartheta_m = \varepsilon - \lambda_n + \lambda_m = \text{constans}, \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

mely egy elemi geometriai tétel értelmében az I_m és I_n pontokon áthaladó kört fejez ki; e kör mindegyik pontjában a φ_m és φ_n gyorsulás egymással ε szöget képez.

A (4) és (5) körök rendszerei (mint azt elemi geometriai megfontolások vagy a Math. repertórium 62. §. (5a) egyenletének alkalmazása mutatják) egymásra merőleges trajectoryák.

179. §. *A sík mozgás magasabb rendű gyorsulásainak néhány általános sajátsága.*

A φ_{m-1} és a φ_{n-1} gyorsulások összetevői a 177. §. (5) egyenletei szerint:

$$\left. \begin{aligned} x^{(m)} &= \varphi_{m-1} \cos (\vartheta_m + \lambda_m) \\ y^{(m)} &= \varphi_{m-1} \sin (\vartheta_m + \lambda_m) \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} x^{(n)} &= \varphi_{n-1} \cos (\vartheta_n + \lambda_n) \\ y^{(n)} &= \varphi_{n-1} \sin (\vartheta_n + \lambda_n) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Rövidség kedvéért legyen (tekintettel a megelőző §. (2) jelölésére):

$$\left. \begin{aligned} C_{m,n} &= x^{(m)} x^{(n)} + y^{(m)} y^{(n)} = \varphi_{m-1} \varphi_{n-1} \cos (\varphi_{m-1}, \varphi_{n-1}) = \\ &= r_m r_n \omega_m \omega_n \cos (\varphi_{m-1}, \varphi_{n-1}) \\ S_{m,n} &= x^{(m)} y^{(n)} - y^{(m)} x^{(n)} = \varphi_{m-1} \varphi_{n-1} \sin (\varphi_{m-1}, \varphi_{n-1}) = \\ &= r_m r_n \omega_m \omega_n \sin (\varphi_{m-1}, \varphi_{n-1}) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

miből:

$$C_{m,n} : S_{m,n} = \cotg (\varphi_{m-1}, \varphi_{n-1}) \quad (3)$$

[Jegyzet. Ha a $C_{m,n}$ és az $S_{m,n}$ viszonya állandó, akkor:

$$(\varphi_{m-1}, \varphi_{n-1}) \angle \vartheta_n - \vartheta_m + \lambda_n - \lambda_m = \text{constans}, \quad (4)$$

megegyezőleg a megelőző §. (5) egyenletével.]

Képezzük most a φ_{n-1} -nek a φ_{m-1} iránya mentén fekvő és az arra merőleges összetevőjét.

A φ_{n-1} a φ_{m-1} -el képez $(\varphi_{n-1}, \varphi_{m-1}) \angle$ szöget, a φ_{m-1} -re merőleges iránynyal pedig $(\varphi_{n-1}, \varphi_{m-1}) \angle \mp \frac{1}{2} \pi$ szöget; φ_{n-1} -nek ezen két összetevője:

$$\left. \begin{aligned} T_{m,n} &= +\varphi_{n-1} \cos (\varphi_{m-1}, \varphi_{n-1}) = + \frac{C_{m,n}}{\varphi_{m-1}} \\ N_{m,n} &= \mp \varphi_{n-1} \sin (\varphi_{m-1}, \varphi_{n-1}) = \mp \frac{S_{m,n}}{\varphi_{m-1}} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Milyen a geometriai helye az olyan pontoknak, melyekben a componensek egyike vagy másika egy meghatározott értékkel bír?

A (2) szerint:

$$T_{m,n} = r_n \omega_n \cos (\varphi_{m-1}, \varphi_{n-1}); \quad N_{m,n} = r_n \omega_n \sin (\varphi_{m-1}, \varphi_{n-1}),$$

hol az ω_n valamenynyi rendszerbeli pontra nézve ugyanaz, míg a felépő szög a megelőző §. (2) vagy e §. (4) formulája szerint: $(\varphi_{m-1}, \varphi_{n-1}) \angle = \vartheta_n - \vartheta_m + \lambda_n - \lambda_m$; benne csak a $(\vartheta_n - \vartheta_m)$ szög a változó; e szerint a feladat redukálódik az

$$r_n \cos (\vartheta_n - \vartheta_m + \lambda_n - \lambda_m) = \text{constans} \quad (6)$$

és az

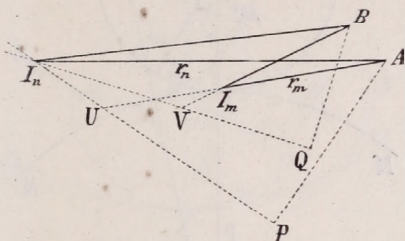
$$r_n \sin (\vartheta_n - \vartheta_m + \lambda_n - \lambda_m) = \text{constans} \quad (7)$$

egyenletek értelmezésére.

szúság; a $P, Q \dots$ pontok az I_n körül I_nP sugárral leírt körön fekszenek. Továbbá, mivel itt is $\lambda_n - \lambda_m = (I_mAP) \angle = (I_mBQ) \angle = \dots =$ $=$ állandó, azért az I_nP és az I_mA irányok által egymással képezett $(I_nUI_m) \angle$ szög állandó, valamenynyi, a második egyenletnek megfelelő $A, B \dots$ pontokra nézve; e szög értéke, mint előbb $\frac{1}{2}\pi + \lambda_n - \lambda_m$; ezért az U csúcs, mint 1-ben, oly köríven tartozik maradni, mely az I_n és I_m pontokon megyen keresztül.

Ezek alapján a keresett görbe következőleg szerkeszthető:

a) Az I_nP adott állandó hosszúsággal I_n körül kör képezendő, a kör P pontjához érintő húzandó, az I_m -ből ezen érintővel $\lambda_n - \lambda_m$ állandó szöget képező vezérsugár húzandó, mely az érintőt az A -ban metszi; e pont a keresett görbe egy pontja és $I_mA = r_m$; a többi pont épen így található.



135. ábra.

b) Vagy: az U szerkesztve lévén; az I_n, U, I_m pontokon át kört fektettünk, melyen az állandó szögű U csúcs mozog, míg szárai az I_n és I_m pontokon mennek keresztül. Az I_nU szár folytatása metszi az I_n középpontú, I_nP sugarú kört P -ben; a P -ben e körhöz húzott érintőt pedig az UI_m szár folytatása metszi A -ban, a keresett görbe egy pontjában; ugyanilyen az eljárás a görbe többi pontjaira nézve.

Jegyzet. Ha $m=1$ és $n=2$, akkor $\varphi_{m-1} = v = a$ sebesség, és $\varphi_{n-1} = \varphi =$ az elsőrendű gyorsulás; akkor az általános eredmények átmennek a 168—172. §§-okban az elsőrendű gyorsulás esetében találtakra.

7. A sík mozgás pólusgörbéinek és rulettáinak görbületi viszonyai.

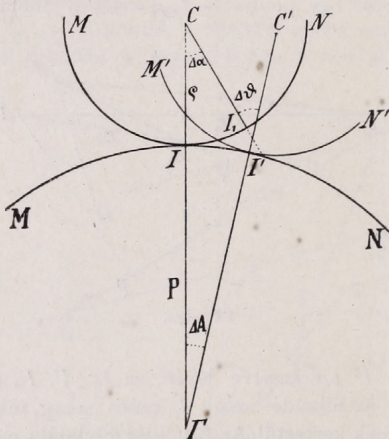
180. §. Az alapgörbe és a gördülő görbe görbülete, kifejezve a gördülés jellemzői által.

Jeleljék $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ a gördülés szögsebességét és $c = \frac{ds}{dt}$ a momentán centrum sebességét a közös érintő mentén, P az alapgörbe, ρ a gördülő görbe görbületi sugarát (136 és 137. ábrák). Bebonyíttjuk, hogy áll:

$$\frac{1}{\varrho} \pm \frac{1}{p} = \frac{\omega}{c}, \quad \dots \quad (1)$$

hol a felső (alsó) előjel érvényes, ha gördülő görbe az alapgörbe külső (belső) kerületén gördül.

1. *Ellentett homorúságok.* Legyen (136. ábra) C és Γ e két görbe görbületi középpontja az I érintkezés helyére nézve, mely itt egyszersmind a momentán centrum t -kor; $t + \Delta t$ -kor az I_1 pont átment I' helyzetbe, úgy, hogy $II' \text{ ív} = II_1 \text{ ív} = \Delta s$, és C átment C' -be, az CI_1 egyenes pedig $C'I'$ -be; ezen két helyzet különbsége a $\Delta\theta$ szög, mely a Δt időköznek megfelelő forgás szöge.



136. ábra.

Az ábra szerint:

$$\Delta\theta = \Delta\alpha + \Delta A = \Delta s \left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} + \frac{\Delta A}{\Delta s} \right).$$

Osztvá Δt -vel és átmenve a határértékre, azonnal ered:

$$\frac{\omega}{c} = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{p} \quad \dots \quad (1a)$$

2. *Egy oldalon lévő homorúságok.* Legyen (137. ábra) a két görbe homorúsága a közös érintő egyik oldalán és itt is $II \text{ ív} = II_1 \text{ ív} = \Delta s$; a CI_1 egyenes Δt idő múlva $C'I'$ helyzetbe jutott és így $\Delta\theta$ a Δt idő alatt bekövetkezett forgás szöge.

Az ábra szerint:

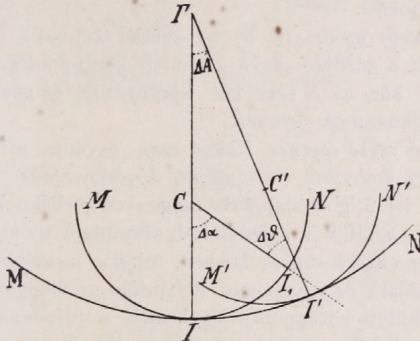
$$\Delta\theta = \Delta\alpha - \Delta A = \Delta s \left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} - \frac{\Delta A}{\Delta s} \right)$$

avagy, M -vel osztva, a határértékből

$$\frac{\omega}{c} = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{P} \quad \dots \quad (1b)$$

Jegyzet. Ha itt $P < \varrho$ volna, akkor a belső görbe volna az álló és a külső a gördülő; akkor c negatív volna az eredne, mint előbb

$$-\frac{\omega}{c} = \frac{1}{P} - \frac{1}{\varrho}.$$



137. ábra.

181. §. Az inflexió kör átmérője, az alap- és a gördülő görbe görbülete. Speciális esetek.

1. Más alakú formula. A gyorsulások momentán centruma, I_2 (171. §. 2. pontja) oly egyenesen fekszik, mely a $-Y$ tengelyt S pontban, az I -től $c: \omega = L$ távolságban metszi; hol L az inflexió kör átmérője (170. §. I., 129. ábra.).

A megelőző §. (1a) és (1b) egyenleteiből:

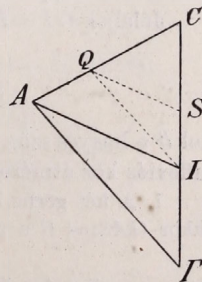
$$\frac{1}{L} = \frac{1}{\varrho} \pm \frac{1}{P}, \quad \dots \quad (1c)$$

hol a felső vagy alsó előjel az 1. vagy a 2. pontra vonatkozik.

Ez az (1c) egyenlet az S pont geometriai szerkesztésére igen alkalmas, ha a sebesség I momentán centrumát, a C és a Γ görbületi középpontokat ismerjük. Húzzunk IC , $I\Gamma$ és a rendszer tetszőleges A pontjából (138. ábra) AI egyeneseket; az I -ből a ΓA -hoz IQ párhuzamosat és Q -ból az AI -hoz QS párhuzamosat.

Ekkor az ábra szerint:

$$IC = \varrho; \quad O\Gamma = P; \quad (AIF) \triangle \sim (QSI) \triangle;$$



138. ábra.

ebből

$$IC:IC=AI:QI=PI:IS$$

avagy:

$$\frac{1}{IS} = \frac{IC}{IC \cdot IP} = \frac{q+P}{qP};$$

e szerint, tekintettel (1c)-re, $IS=L$ és S csakugyan a keresett pont.

Jegyzet: Ha C és I ugyanazon oldalán vannak, a P előjele megváltozik; ezen eset tárgyalását az olvasóra bizzuk.

2. Specidális esetek.

a) *Az alapgörbe egyenes.* Ift $P=\infty$, marad (1c)-ből $L=q$; e szerint az S pont egybeesik a gördülő görbe görbületi középpontjával. Ha ezenkívül a gördülő görbe kör, az S ezen kör középpontja és geometriai helye az alapgörbéhez párhuzamos egyenes.

b) *A gördülő görbe egyenes.* Ekkor ezen egyenes minden A pontja az alapgörbe egy *evolvensét* (*involutáját*, *développante-ját*) írja le [Math. repertorium 60. §.] míg az alapgörbe maga ezen görbéknek *evolútója* (*développée-já*). Ebből a lefejtők és a lefejtettek alaptulajdonságai folynak, mivel az IA gördülő egyenes, mozgása közben, mindig merőleges az evolvensre azaz az A rulettájára és egyszersmind érintője az alapgörbének; továbbá az evolvens görbületi középpontja egybeesik a mindenkori momentán-centrummal, mivel két egymásra következő ily érintő. metszőpontjának határhelye maga az érintkező pont.

182. §. A ruletta görbületi sugara. A gördülés sugara.

A ruletta normálisa mindig a pont mindenkori helyzetét a momentán centrummal egybekapcsoló egyenesben fekszik.

Valamely A pontnak (139 és 140. ábrák) legyenek $IA=r$ és $(XIA)==(XIIY)\sphericalangle+(YIA)\sphericalangle=\pi+\vartheta$ a polárkoordinátái, hol $\vartheta=(XIG)\sphericalangle$; Δt időköz alatt az A az AA' ívet írja le, miközben a t -kor AI_1 helyzetű egyenes $A'T'$ -be jut; e szerint $\Delta\vartheta$ a forgás szöge és II_1 ív $=II'$ ív $=\Delta s$ és $ds=c dt$, hol c a gördülés sebessége (169. §.). Az AI és $A'I'$ normálisak metszőpontja G , melynek határhelyzete az AA' ruletta görbületi középpontja.

Jeleljék $GI=R$; $IA=r$; bebizonyítjuk, hogy akkor:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{q} \pm \frac{1}{P} = \sin \vartheta \left(\frac{1}{r} \pm \frac{1}{R} \right); \dots \dots \dots (1)$$

hol ϑ a hegyes szög, melyet az IG a közös IX érintővel képez és L az inflexiós kör átmérője (181. §.).

1. A két görbe homorúsága a közös érintő két oldalán van (139. ábra) ekkor $GA=r+R$ a ruletta görbületi sugara és:

$$\lim \Delta \eta = \lim \frac{\Delta s \sin \vartheta}{r}; \quad \lim \Delta H = \lim \frac{\Delta s \sin \vartheta}{R};$$

mivel pedig az ábra szerint:

$$\lim \frac{\Delta \vartheta}{\Delta t} = \lim \left(\frac{\Delta \eta}{\Delta t} + \frac{\Delta H}{\Delta t} \right) = \lim \left(\frac{Ds}{\Delta t} \cdot \frac{\sin \vartheta}{r} \right) + \lim \left(\frac{Ds}{\Delta t} \cdot \frac{\sin \vartheta}{R} \right),$$

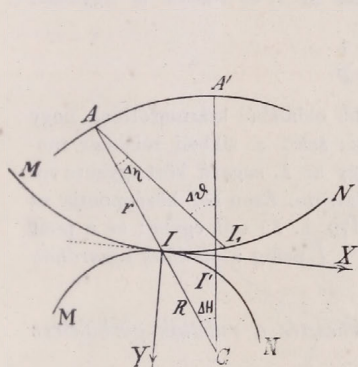
nyerjük

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{ds}{dt} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right) \sin \vartheta,$$

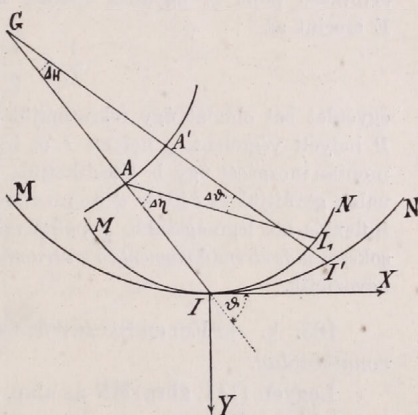
avagy a megelőző §§. (1a) és (1c) egyenletei értelmében:

$$\frac{\omega}{c} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{p} = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right) \sin \vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{p} = \frac{1}{L} = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right) \sin \vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2a)$$



139. ábra.



140. ábra.

Jegyzet. Ha az A rulettájának G görbületi középpontja a közös érintőnek ugyanazon oldalán fekszik, mint az A , akkor az R előjele megváltoztatandó.

2. Ha a két görbe homorúsága a közös érintő *egy* oldalán van (140. ábra), akkor $GA = R - r$ a ruletta görbületi sugara és

$$GI = R; \quad AI = r; \quad \Delta \vartheta = \Delta \eta - \Delta H; \quad II_1 \text{ iv} = II' \text{ iv} = \Delta s;$$

$$\lim \frac{\Delta \vartheta}{\Delta t} = \lim \left(\frac{Ds}{\Delta t} \cdot \frac{\sin \vartheta}{r} \right) - \lim \left(\frac{Ds}{\Delta t} \cdot \frac{\sin \vartheta}{R} \right),$$

avagy, a megelőző §§. (1b) és (1c) egyenletei értelmében

$$\frac{\omega}{c} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{p} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \sin \vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1b)$$

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{p} = \frac{1}{L} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \sin \vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2b)$$

de, a 182. §. jelölése tekintetbe vételével:

$$IA=r, \quad IC=\varrho, \quad PC=\varrho \cos \vartheta, \quad PA=r-\varrho \sin \vartheta;$$

ebből és (1a)-ból:

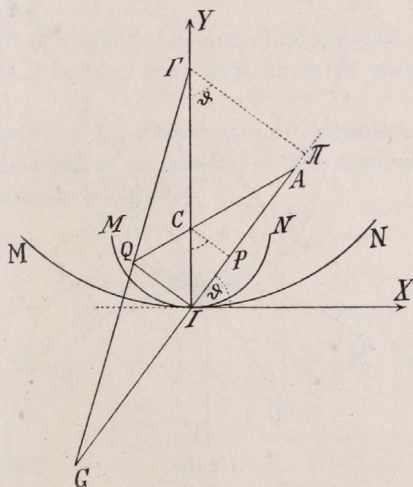
$$IQ=\frac{\varrho r \cos \vartheta}{r-\varrho \sin \vartheta}=\cos \vartheta \left\{ \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r} \sin \vartheta \right\}^{-1} \dots \dots \dots (1)$$

2. Hasonlóan:

$$IQ:III=GI:GH; \dots \dots \dots (2a)$$

De, a 182. §. jelölésével:

$$GI=R; \quad I\Gamma=P; \quad III\Gamma=P \cos \vartheta, \quad GH=R+P \sin \vartheta;$$



141. ábra.

ebből és (2a)-ból

$$IQ=\frac{PR \cos \vartheta}{R+P \sin \vartheta}=\cos \vartheta \left\{ \frac{1}{P} + \frac{1}{R} \sin \vartheta \right\}^{-1} \dots \dots (2)$$

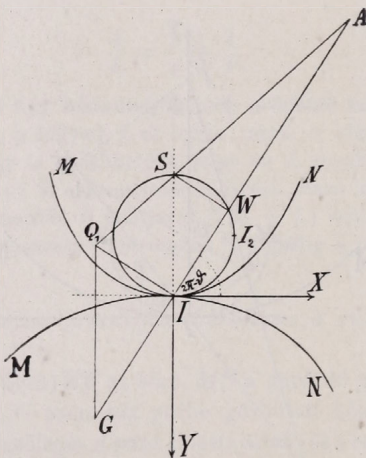
Mivel a 182. §. 2. pontjának (1b) formulája és az azt követő (a jelen 141. ábránál érvényesülő) jegyzet szerint $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r} \sin \vartheta = \frac{1}{P} + \frac{1}{R} \sin \vartheta$, a mi a jelen (1) és (2) formulák összehasonlításból is következik, azért a fent körvonalozott szerkesztés alapján talált G csakugyan az A rulettájának keresett görbületi középpontja.

Megjegyzendő, hogy ez a szerkesztés mindig érvényes, akár az alapgörbe és a gördülő görbe görbületi sugarai a közös érintőnek

két oldalán, akár egyik oldalán fekszenek, hol $\rho < P$ vagy $\rho > P$ lehet.

184. §. Az EULER-SAVARY-féle szerkesztés módosítása: a sebességek és a gyorsulások momentán centrumának ismerete elegendő.

Bebizonyítjuk, hogy a ruletta görbületi középpontját a következő szerkesztés is (142. ábra) adja meg: A sebességek momentán-centruma I és a gyorsulásoké I_2 legyen ismeretes, (az utóbbi helyett az inflexiós kör legmagasabb, S pontja); egybekapcsolva A -t S -el, és addig folytatva ezt, míg az I -ban az IA -ra emelt merőlegeset Q_1 pontban metszi; a Q_1 -ből pedig az SI -hez párhuzamosat húzva, míg az G -ben metszi az AI folytatását: az így talált G a keresett görbületi középpont.



142. ábra.

1. A szerkesztés szerint:

$$AG : AI = AQ_1 : AS = AI : AW;$$

ebből

$$AG = \frac{AI^2}{AW}, \text{ azaz: } r + R = \frac{r^2}{AW} \quad \dots \dots \dots (1)$$

2. Az A pontnak, rulettájára vonatkozó normális gyorsulási összetevője általánosságban [46. §. (5)] $\frac{\omega^2 r^2}{(r+R)}$; a 170. §. I. pontja szerint a gördülő mozgásnál: $\omega^2 r + \omega c \sin \vartheta$.

Egybekapcsolva ezt a két egyenlő értéket, nyerjük:

$$r^2 = (r+R) \left[r + \frac{c}{\omega} \sin \vartheta \right];$$

Egybekapcsolva I -t A -val, az IA -ra az I -ből merőlegesen húzunk, míg ez az AC folytatását Q -ban metszi. Az A , C , Q egy diameteren fekvő három pont. Egybekapcsolva továbbá a Q -t I -val, és folytatva az AI -vonalat: a két egyenes G metszéspontja az epicyclois A pontjához tartozó görbületi középpont.

2. A G görbületi középpontok helye az mGE görbe, mely az mHn epicyclois lefejtettje [Math. repertórium 60. §.]; könnyű bebizonyítani, hogy ez az mHn -hoz, illetve a KQF -hez hasonló és hasonló fekvésű epicyclois.

A Q pont ugyanis az A -val diametrálisan ellentett fekvésű pont lévén, a közben írja le a KQF epicycloist, mi alatt az A pont az mAH -t; e két görbe az MN kör kerületén egymáshoz képest az Fn ívvel (a gördülő kör kerülete felével) van eltolva.

A szerkesztés értelmében továbbá az AG és a DQ párhuzamosak és IGF és DQF hasonló háromszögek, azért:

$$IG : IQ = IT : ID = P : P + 2q = \text{állandó}, \dots \dots \dots (1)$$

hol P az alapkör, q a gördülő kör sugara.

Evvél ki van mutatva, hogy az mGE görbe a KQF -hez hasonló, és hasonló fekvésű, azaz, hogy az első oly epicyclois, mely keletkezik, ha a IE sugarú körön az $\frac{1}{2}EF$ sugarú kör gördül.

3. A 152. §. 2. pontja értelmében az mHn epicyclois egy $P+q$ sugarú AJC , körnek (belső kerületével) a IF sugarú alapkör külső kerületén történő gördülése által is létesíthető; az olvasó szerkeszsze az mHn -görbe A pontjának görbületi sugarát az 1. pont eljárása szerint az MN alap- és az M,N , gördülő kör alapján.

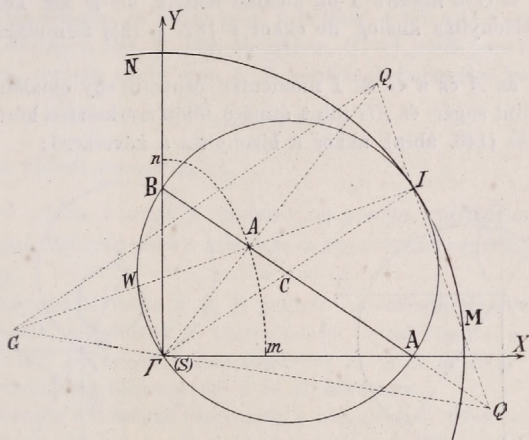
B. Ellipsis a 148. §. példája szerint oly kör pontjai írnak le, mely egy kétszer akkora sugarú kör belső kerületén gördül (101. ábra).

1. Legyen (144. ábra) Γ az MN alapkör, C az AB gördülő kör középpontja, I a momentán centrum, A az AB átmérőn fekvő valamely pont, melynek rulettája az mn ellipsis, hol $\Gamma m = BA$, $\Gamma n = AA$.

Egybekapcsolva A -t I -vel, I -ben az AI -re merőlegest emelve, ez Q -ban metszi az AC vonal folytatását. Egybekapcsolva most Q -t I -val, a QI vonal folytatása az IA egyenes folytatását G -ben metszi és ez a G az mn ellipsis A pontjához tartozó görbületi középpont.

2. Ugyanezt a feladatot az EULER-SAVARY-féle módosított eljárással is könnyen fejthetjük meg (184. §.). Egyenletesnek tekintve a belső kör gördülését és η -val jelezve azt a *hegyes* szöget, melyet az $AB = l$ átmérő az X tengelyvel képez, e tengelytől számított MI ív $= l\eta$; a gördülés (az I tovahaladásának) sebessége $c = l \frac{d\eta}{dt}$; a sík rendszer szögsebessége pedig $\omega = \frac{d\eta}{dt}$; e szerint az inflexiós kör átmérője itt: $IS = -\frac{c}{\omega} = -l$, azaz, e kör átmérője egybeesik az II -val, az S a I -val és így e gördülő kör itt egyszersmind az inflexiós kör (144. ábra).

Alkalmazva az idézett eljárást, kapcsoljuk egybe az I -t az A -val; az IA vonal folytatása W -ben metszi az inflexiós kört. Egybekapcsolva W -t az S végponttal, (mely itt mindig egybeesik a I -val) és I -ből az SW -hez IQ_1 párhuzamosat húzva míg az az SA (azaz itt a IA) vonal folytatását Q_1 -ben metszi, végre Q_1 -ből az IS átmérőhöz Q_1G párhuzamosat húzva míg az az IA folytatását G -ben metszi: nyerjük ismét G -t, mint az mn ellipsis A pontjához tartozó görbületi sugarat. (V. ö. a 203. §. 49. feladatát).



144. ábra.

186. §. Tétel a ruletták görbületéről.

Szerkesztve a tetszőleges A pontnak az I -től való IA távolságával mint sugárral az A középpont körül kört, továbbá az A -nak a G görbületi középponttól való GA -távolsággal mint átmérővel A és G pontokon átmenő kört, akkor a két kör E és F két metszéspontját egybekapcsoló EF húr, az ú. n. *chordális*, az inflexiós kör legmagasabb pontján áthaladva, e kört metszi.

1. Legyen (145. ábra) s a nevezett húrnak e körök középpontjait egybekapcsoló egyenessel való metszéspontja, míg, a 182 és 183. §§-ok jelölésével élve: $IA=r$; $IG=R$, $IS=L$; $Is=l$; $\vartheta=(X|TY) \nlessdot +(Y|IA) \nlessdot$, hol az X tengely az alap- és a gördülő görbe közös pozitív érintője.

Az ábra szerint:

$$(sA)(AG)=\overline{AE}^2=\overline{AI}^2, \text{ vagy: } (r-l)(r+R)=r^2,$$

miből:

$$rR-l(r+R)=0; \text{ azaz } +\frac{1}{l}=\frac{1}{r}+\frac{1}{R} \quad \dots \quad (1a)$$

Amde, a 182. §. (2a) formulája:

$$\frac{1}{L} = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right) \sin \vartheta,$$

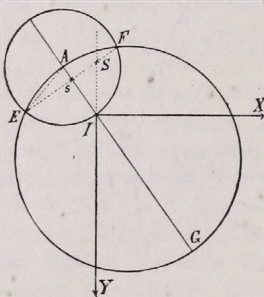
ezért:

$$l = L \sin \vartheta; \quad (2a)$$

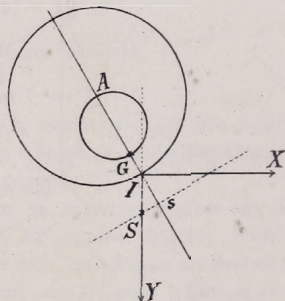
e szerint az s az S -nek vetülete IA -ra és az EF húr valóban áthalad ezen s ponton, mely a 182. §. 3. pontjának (3) egyenlete értelmében szintén az inflexiós körön fekszik.

2. Ha a G a *negatív* Y -ok oldalán fekszik, de a két kör egymást metszi, a bizonyítás analog, de ekkor a 182. §. (2b) formulája alkalmazandó.

3. Ha az A és a G az I momentán centrum egy oldalán fekszenek és az AI mint sugár- és AG mint átmérő fölött szerkesztett körök egymást nem metszik (146. ábra), akkor a bizonyítás a következő:



145. ábra.



146. ábra.

Jeleljék ismét

$$IA=r, \quad IG=R, \quad IS=L; \quad Is=l;$$

Legyen s helyzete olyan, hogy álljon, mint fent:

$$\overline{IA}^2 = (As)(AG),$$

vagy

$$r^2 = (r+l)(r-R), \quad \text{vagy:} \quad 0 = -rR + l(r-R);$$

azaz:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \quad (1b)$$

Ámde a 182. §. (2b) formulája:

$$\frac{1}{L} = - \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \sin \vartheta$$

és így:

$$l = -L \sin \vartheta \quad (2b)$$

hol a negatív jel azt mondja, hogy az s nem az I és A között, hanem az O másik oldalán van. Itt is s az inflexiós kör egy pontja.

Jegyzet. Ez a tétel az EULER-SAVARY-féle módosított szerkesztésben (184. §., 142. ábra) fellépő

$$r^2 = (r+R) \overline{AW}, \quad \text{vagy:} \quad \overline{IA}^2 = (GA) \cdot (AW)$$

összefüggést közvetlenül engedi származtatni.

[Ugyanis (170. l., 129 ábra) az inflexiós kör átmérője IS lévén, s is e kör kerületén fekszik, és pedig azon a helyen, a hol a GA egyenes e kört metszi; e szerint a 184. §. 142. ábrájában W -vel jelelt pont itt egybeesik az s ponttal, melyre nézve ezen §. 1. pontjának bekezdése szerint

$$\overline{AI}^2 = (GA) (As);$$

ez pedig az idézett összefüggés].

187. §. *Adva vannak a rendszer két pontja rulettáinak görbületi középpontjai, szerkesztessék a sebességi és a gyorsulási centrum. A feladat módosítása.*

1. Ismeretes lévén az A és B pontok rulettáinak AG_a és BG_b görbületi sugaraik, a kettőnek I metszőpontja mindenesetre a momentán centrum; mert IA és IB benne fekszenek az AG_a és BG_b vonalakban és egyszersmind merőlegesek az A és B rulettáira.

A gyorsulás momentán centrumát a megelőző §. tétele szerint nyerjük, ha először A pontra nézve szerkesztjük az $(EF)_a$ húrt és azután B pontra nézve az $(EF)_b$ húrt; az idézett tétel értelmében mindegyik húr áthalad az S ponton, mely e szerint ezen két egyenes metszőpontja. Evvel az inflexiós kör IS átmérője és vele együtt a gyorsulások momentán centruma is meg van határozva.

2. *A feladat módosítása.* Az A pont és rulettájának G középpontja helyett, adottnak tekinthető egy mozgó merev mn görbe és $AB_1B \dots$ beburkolója (190. §. 151. ábra). Ekkor ugyanis a görbe h_1 görbületi középpontja és e középpont rulettájának H_1 görbületi középpontja, az ott bizonyított tétel szerint ugyanazon geometriai viszonyok között vannak, mint előbb A és G , és a H_1 szerkesztése is ugyanily.

De ez az eljárás megtagadja a szolgálatot, ha az adott mn merev görbe egyenes; akkor h_1 a végtelenben van és a h_1 és H_1 és I -ből szerkesztendő két kör redukálódik két egyenesre, mely az I és a H_1 pontokban merőleges a H_1 h_1 egyenesre (a beburkoló normálisára).

Amde itt alkalmazandó az a tétel, hogy a H_1 és az I -ra vonatkozólag harmonikusan fekvő H pont [melyre nézve $\overline{H_1H} \cdot \overline{HI} = \overline{HI}^2$] az inflexiós körön fekszik és így az S pont a H -ból a H_1H vonalra emelt merőleges mentén van. [A trochóisok görbülete a közöséges cycloisokéból.]

(V. ö. a 204. §. 56b. számú feladatát, hol az ismert két ruletta kör.)

188. §. *A ruletták forduló pontjai.*

A görbék forduló csúcspontjaiban (Math. repertórium 62a. §., 70. lap e.) az érintő iránya hirtelen változik π -vel.

Ha a görbe két ága a forduló pontban húzott érintő két oldalán fekszik, a forduló pont (vagy az elágazás) *elsőrendű*, ha egy oldalán vannak, *másodrendű* [Math. repertórium 62a. §-ának e. és f. pontjai].

A 182. §. (2a) és (2b) formulái szerint áll:

$$\frac{1}{\rho} \pm \frac{1}{P} = \frac{\omega}{c} = \frac{1}{L} = \left(\frac{1}{r} \pm \frac{1}{R} \right) \sin \vartheta, \quad \dots \quad (1)$$

hol ρ a gördülő, P az alapgörbe és $R \pm r$ a ruletta görbületi sugara; a kettős előjel közül egyszerre a felső vagy az alsó érvényes a szerint, a mint a ρ és F a közös érintő különböző oldalain vagy egy oldalán fekszenek.

A ruletta görbületi sugara *zérus* értékű, azaz, forduló pont áll be, ha a görbét leíró A pont momentán sebessége, $r\omega$, a zérussal egyenlő; ez pedig bekövetkezik:

I. Ha $r=0$, azaz, ha az A pont a momentán centrummal esik egybe; ekkor a pont elemi (itt másodrendű kicsiny) elmozdulása a közös érintőre merőleges, és így a ruletta fordulópontjában húzott érintő is merőleges a közös érintőre (169. §., 127. ábra).

II. Ha $\omega=0$; akkor kell, hogy legyen $\rho \pm P=0$, azaz a felső előjel esetében a gördülő és az alapgörbe görbületi középpontjai egybeesnek, avagy az alsó előjel esetében a nevezett két görbe másféle másodrendű osculatióban van. Az $\omega=0$ feltétel még az egyszerre fennálló $\rho=\infty$ és $P=\infty$ értékekkel is elégíthető ki (V. ö. alább a III. 2. pontját). Ez egyszersmind oly helyzet, melyben az ω szögsebesség a zéruson menve át, *előjelét* kénytelen változtatni, és így az egész mozgó (gördülő) sikrendszer valamenynyi pontjának rulettái e helyzetben egyszerre mutatnak forduló pontot.

IIa. A II. alatt említett forduló pontok lehetnek első vagy másodrendű; ennek megállapítása észleljából az (1) irandó:

$$R \pm r = \frac{rR}{L \sin \vartheta} = \omega \frac{rR}{c \sin \vartheta} \quad \dots \quad (1a)$$

Ha $\omega=0$, azaz (1a) zérus, akkor az L (az inflexiós kör sugara) végtelen nagy és az $R \pm r$ görbületi sugár zérus. Az ekkor fellépő forduló pontok általánosságban első rendűek, mert $(R \pm r)$ előjelét úgy változtatja, mint ω . De, ha egyszerre $\omega=0$ és $\vartheta=0$, ez oly pontokra vonatkozik, melyek az IX közös érintővonalon fekszenek, hol I a momentán centrum; ily esetekben az (1a) határozatlan lesz, de azért az $(R \pm r)$ görbületi sugár véges lehet.

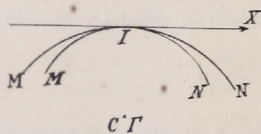
Lényeges azonban itt az, vajjon a ϑ , mikor az a zéruson megyen át, épen úgy változtatja-e előjelét, mint az ω ; ha *igen*, akkor az $R \pm r$ előjele e közben nem változik és a forduló pont másodrendű; ha *nem*, akkor $R \pm r$ is épen úgy változtatja az előjelét, mint ω és a forduló pont elsőrendű.

III. Ugyane kérdést a gördülő és az alapgörbe alakjából azonnal dönthetni el.

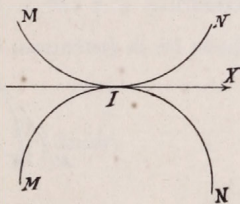
1. Ha a két görbe görbülete az érintkező I pontban véges és közös középpontú (147. ábra), akkor az MN -nel merev kapcsolatban lévőknek tekintett IX érintő egyenes gördülés közben *forgása előjelét nem változtatja* és így a ϑ is vagy csak növekszik, vagy csak fogy; ez áll még akkor is, ha az MN és MN görbékét felcseréljük.

Ezért itt valamenynyi rulettának csak elsőrendű forduló pontja van.

2. Ha az alap- és a gördülő görbe inflexióspontokkal bírnak és azokban gördülés közben érintkeznek (148. ábra), akkor egyszerre $\varrho = \infty$



147. ábra.



148. ábra.

és $P = \infty$ és az MN -nel merev kapcsolatban lévőknek tekintett IX a gördülés közben az I -ben forgásának irányát és egyszersmind a ϑ előjelét is változtatja; ezért itt, az I helyzetének megfelelőleg, valamenynyi pontjai a rendszernek fordulópontot mutatnak, de ezek közül az IX -en fekvők másodrendűek (mert ezeknél $\vartheta = 0$), a többiek elsőrendűek.

Az eredmény még akkor is érvényes, ha az MN és MN görbék egyike egyenes vonal.

IV. *Kivételes esetek.* A ruletták még akkor is mutatnak forduló pontokat, ha vagy az alapgörbe, vagy a gördülő görbe forduló ponttal bír (azaz a P vagy a Q zérus); de e mellett a mozgás oly formán történik, hogy e pontokon a rendszer nem forog hirtelen π szöggel, hanem a gördülés a közös érintőn az illető alap vagy gördülő görbe másik ága mentén, de az ω előjelének megváltoztatásával folytatódik.

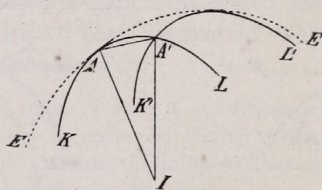
Ezen, részletesen még meg nem vizsgált forduló- valamint a csúcs-pontok eseteink tanulmányozását az olvasónak ajánljuk.

8. Síkban mozgó görbék beburkolói. Zárt ruletták területe.

189. §. *A sík mozgásnál származó envelope-ok. Geometriai és analitikai tárgyalás. Példa.*

1. *Geometriai eljárás.* Legyen (149. ábra) KL a merev görbe egyik, $K'L'$ másik helyzete, I a momentáncentrum és EE' a beburkoló; A' a KL és a $K'L'$ helyzetek metszéspontja és A a KL -nek azon pontja, mely az elemi elmozdulás után A' -ba jut.

Ha az elmozdulás végtelen kicsiny, az AA' húr iránya egybeesik az A -ban a KL görbéhez és ugyancsak az A -ban az envelope-hoz húzott érintő irányával. Másfelől az AA' merőleges az I -ből húzott IA sugarra, ezért a görbe és beburkolója mindenkor érintkező pontjában, A -ban a közös (az envelope és a görbe) érintőre emelt AI normális mindig keresztül megyen a momentán centrumon.



149. ábra.

Viszont: Az a pont, melyben a mozgó görbe beburkolóját érinti, a megfelelő momentán centrumból az envelope-ra bocsátott merőleges talppontja.

Jegyzet: Könynyű annak bebizonyítása, hogy a mozgó merev görbe egyes pontjai által leírt ruletták beburkolója identikus a görbének fent tárgyalt envelope-jával.

Ugyanis a görbe tetszőleges A pontja rulettájának íveleme az AA' húr határértékével esvén egybe, az A -hoz húzott érintője is az AA' határirányával, azaz a beburkoló A pontjához húzott érintőjével esik egybe; mivel pedig az A pont (t. i. a mozgó görbének azon pontja, mely az envelope-pal érintkezik) minden időpontra nézve más és más, azért ezen pontok rulettái valamenynyien, különböző időkben érintik közös beburkolójukat, mely e szerint identikus az EE -vel.

2. *Analitikai eljárás.* A KL görbét a merev pontrendszerrel mozgó X, Y rendszerre vonatkoztatva, (168. §.), legyen $F(x, y) = 0$ e görbe egyenlete; ellenben a síkban szilárd XY -rendszerre vonatkoztatva, az x , és y , koordináták a 168. §. (1) transformáló formulái segítségével a t időpillanatra érvényes x - és y -nal fejezhetők ki és így a görbe egyenlete

$$f(x, y, t) = 0, \dots \dots \dots (1)$$

mely az x -t és y -t mint koordinátákat, t -t pedig mint *paramétert* fogja tartalmazni, melynek változásával a görbe helyzete, de nem az alakja változik.

Az (1) görbék családjának envelope-ja [a Math. repertórium 61a. §-a szerint] az

$$f(x, y, t) = 0 \text{ és } \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

feltételekből adódik.

Az A érintkező pontnak megfelelő helyzetben, t időben, a KL görbéhez húzott érintő trigonometriai tangense:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}; \dots \dots \dots (3)$$

ámde ez itt az envelope érintője a KL görbe érintőjével esvén egybe, a (3) egyenlet a beburkolóra is érvényes.

Az A pont dt időelem alatt átment A' -ba; x, y koordinátái változtak $\frac{dx}{dt} dt$ - és $\frac{dy}{dt} dt$ -vel; a t idő (mely itt paraméter) dt -vel növekedett; ezért az (1) teljes növekedése

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \right\} dt = 0, \dots \dots \dots (4)$$

vonatkoztatva ezt az A helyzetre t -kor.

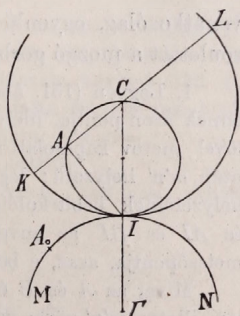
Ámde a beburkolónak A pontjára nézve a (2) szerint $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ és így, az $\overline{AA'}$ vonal határirányának trigonometriai tangense, a (4) tekintetbe vételével

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = -\frac{df}{dy} : \frac{df}{dx} = \operatorname{tg} \alpha \dots \dots \dots (5)$$

E szerint az envelope érintője egybeesik az A rulettájának érintőjével az A pontban, miért is ezen két görbe normálisa is az A pontban közös; mivel pedig a ruletta normálisa a mindenkor momentumcentrumon halad át, azért az envelope normálisára is ugyanez áll.

3. *Félde.* Az MN alapkörön gördül az KIL kör (150. ábra); keressük egy tetszőleges KL átmérője beburkolóját.

Itt a KL görbe egyenes; az I -ből reá bocsátott IA merőleges egyszersmind az envelope és A rulettájának a normálisa. Az A a keresett envelope egy pontja; többi pontjaira nézve ugyanezen szerkesztés érvényes. De Γ az alap-, C a gördülő kör középpontja; ha IC átmérővel az IAC kört szeskesztjük, akkor a



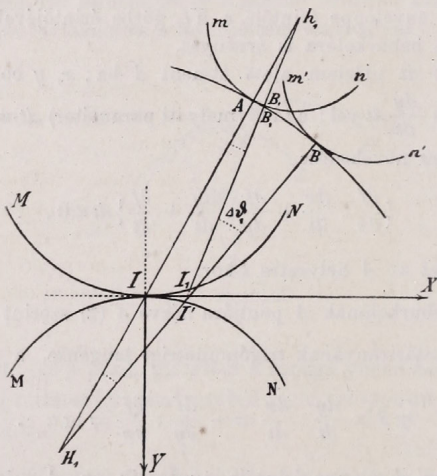
150. ábra.

geometria elemei szerint IK ív $= IA$ ív; ha még A_0 az alapgörbe azon pontja, melyet K érintett, akkor még: IA_0 ív $= IK$ ív $= IA$ ív, és így az A pont geometriai helyét még úgy is előállíthatjuk hogy az IAC kört gördítjük az alapkörön; a gördülés az A_0 -érintkező pontban kezdődik.

E szerint itt a keresett envelope oly *epicyclois*, melyet az adott KL átmérő negyedrészevel egyenlő sugarú körnek kerületi pontja az alapkörön való gördülése közben leír.

190. §. *Síkban mozgó merev görbe beburkolójának görbületi középpontja. Egyenesek beburkolói. A forduló pontok köre.*

Bebizonyítjuk a következő tételt: A síkban mozgó merev görbe envelope-jának görbületi középpontja, a beburkoló valamely pontjára



151. ábra.

vonatkozólag, egyenlő azon ruletta görbületi középpontjával, mely roulettát a mozgó görbe megfelelő görbületi középpontja ír le.

1. Legyen (151. ábra) MN a bázisgörbe, mn a gördülő görbe, I_1 ennek azon pontja, mely Δt időköz múlva I -el esik egybe, mn a gördülővel merev kapcsolatban lévő és vele mozgó görbe, mely Δt időköz után $m'n'$ helyzetű; legyen továbbá AB e görbe egymásra következő helyzeteinek beburkolója, A és B pontok maguk az érintkezés pontjai és AI és BI az envelope normálisai, végre H_1 ezek folytatásának metszőpontja, azaz, e beburkolónak keresett görbületi középpontja.

Mivel az A és B érintkező pontokban az AI és BI egyszerre mind az mn , illetve $m'n'$ görbe normálisai, továbbá, mivel az I_1 -ből az mn -re bocsátott I_1B_1 merőleges az IA folytatását h_1 -ban metszi: ezen h_1 a mozgó

görbe görbületi középpontja az mn helyzetben (az A pontra vonatkozólag).

Jelöljük a h_1 és a H_1 pontok polárkoordinátáit: $II_1=r_1$; $IH_1=R_1$; $(H_1IX) \sphericalangle = \vartheta_1$; továbbá $II_1 \dot{v} = II \dot{v} = \Delta s$, végre ω a szögsebesség és $c = ds:dt$ a gördülés sebessége (169. §.).

Az I_1B_1 vonal a Δt idő után $I'B$ -ben van, a szögváltozás $\Delta \vartheta_1$, mely a h_1 és a H_1 melletti kicsiny szögek összegével egyenlő; e szerint:

$$\lim \frac{\Delta \vartheta_1}{\Delta t} = \lim \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{\sin \vartheta_1}{r_1} \right) + \lim \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{\sin \vartheta_1}{R_1} \right),$$

$$\frac{d\vartheta_1}{dt} : \frac{ds}{dt} = \frac{\omega}{c} = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{R_1} \right) \sin \vartheta_1 \dots \dots \dots (1)$$

Ámde, ez a formula, a 182. §. 1. pontja szerint azon ruletta $(r_1 + R_1)$ görbületi sugarára nézve is érvényes, melyet az I momentán-centrumtól számított r_1 és ϑ_1 (ott r és ϑ) coordinátájú pont ír le; de ez a pont itt az mn görbe h_1 görbületi középpontja és így be van bizonyítva, hogy ezen h_1 pont rulettájának görbületi középpontja megegyezik a AB envelope H_1 görbületi középpontjával.

Jegyzet: Párhuzamos két mn és m_1n_1 görbére nézve az a jellemző, hogy megfelelő ívelemeknek egy és ugyanazon h_1 görbületi középpontjuk és mindig egymástól egyenlő távolságuk van; ezért az ily görbékre nézve a h_1 pont közös, és így beburkolóik görbületi középpontja a közös H_1 pont, miből ismét folyik, hogy ezek a beburkolók szintén párhuzamosak.

2. *Egyenesek beburkolói.* Ha az mn görbe egyenesbe megyen át, akkor h_1 pont a végtelenbe megyen, $r_1 = \infty$ és így a 182. §. (1a) és (2a) egyenletei szerint:

$$\frac{1}{R_1} \sin \vartheta_1 = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{P} = \frac{1}{L},$$

vagy

$$R_1 = L \sin \vartheta_1 \dots \dots \dots (2)$$

Ezen egyenlet szerint a merev rendszerrel mozgó valamenynyi egyenes beburkolóinak görbületi középpontjai minden időpillanatban oly körön fekszenek, melynek sugara a mindenkori inflexiós körével (182. §. 3. pontja) egyenlő, a közös IX érintő másik oldalán fekszik (mint az egyenesek) és az előbbi az I momentán centrumban érinti.

Ez az eredmény egyébként közvetlenül is adódik:

2a. Legyen (152. ábra): $H_1I = R_1$; $(H_1IX) \sphericalangle = \vartheta_1$; $II' = \Delta s$; akkor az $II'H_1$ elemi háromszög oldalaira nézve

$$II' : H_1I' = \sin \Delta \vartheta : \sin \vartheta_1;$$

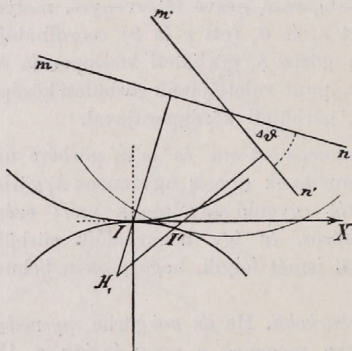
$$\lim (H_1I') = \lim \left(\frac{II'}{\sin \Delta \vartheta} \sin \vartheta_1 \right) = \lim \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta \vartheta} \sin \vartheta_1 \right)$$

azaz:

$$R_1 = c \frac{1}{\omega} \sin \vartheta_1 = L \sin \vartheta_1, \quad \dots \quad (2a)$$

mint (2) alatt.

2b. Ha az egyenesnek beburkolója valahol elsőrendű forduló pontot mutat (188. §.), ott görbületi sugara zérus és görbületi középpontja egybeesik a forduló ponttal és így ez az utóbbi a tekintetbe vett vonal azon meghatározott pontjával is esik egybe, mely körül a tekintetbe vett időpillanatban a momentán forgás történik. E szerint, tekintettel a 2. pont eredményeire, ez a forduló pont az egyenesek beburkolóinak görbületi középpontjai azon körén tartozik feküdni, mely az említett ponton mint momentán centrumon megyen keresztül. A kör a *forduló pontok köre*.



152. ábra.

Ha a rendszer egy egyenese kénytelen mindig egy ponton keresztül menni, akkor ez a pont egyszersmind ezen egyenes envelope-jának görbületi középpontja is, valamenynyi helyzetben és a forduló pontoknak valamenynyi körei haladnak rajta keresztül.

191. §. Az önmagukban zárt ruletták területe.

Oly sík mozgás, melynél a rendszer minden pontja önmagában zárt rulettát ír le, mindenesetre periodusos, azaz olyan, melynél a rendszer miután a helyzetek bizonyos egymásutánján (sorozatán) átfutott, ismét visszatér eredeti helyzetébe.

A 141. §. (1) egyenlete szerint

$$x = p + x \cos \vartheta - y \sin \vartheta; \quad y = q + x \sin \vartheta + y \cos \vartheta \quad \dots \quad (1)$$

az A pont koordinátái a szilárd XY koordináta-rendszerben, míg x, y , a sík rendszerrel mozgó koordinátái (95. ábra, 262. l.).

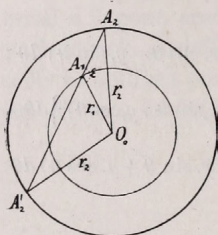
$$x_0 = -\frac{M}{4\pi}, \quad y_0 = -\frac{N}{4\pi};$$

összszrendezőkkal bír, míg sugara:

$$r^2 = \frac{F}{\pi} - \frac{F}{2\pi} + \frac{M^2 + N^2}{16\pi^2} \quad (6)$$

és így a kör egyenlete:

$$r^2 = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \quad (7)$$



153. ábra.

Ha (5)-ben az F paraméter különböző is, a megfelelő körök (x_0, y_0) , azaz O_0 közép-pontja, melynek helyzete csak M - és N -től függ, ugyanaz, azaz az (5) körök közös centrummal bírnak.

3. Különböző területű ruletták területkülönbsége.

Legyen F_1, F_2 két ruletta területe és r_1, r_2 a hozzátartozó két (7) körnek sugara (153. ábra). A_1 és A_2 e körök tetszőleges két pontja, mely az F_1 és F_2 területű rulettákat írja le.

A (6)-ból

$$F_2 - F_1 = \pi (r_2^2 - r_1^2) \quad (8)$$

Ez az egyenlet érvényes bármily két A_1 és A_2 pontra nézve, melyek távolsága az (x_0, y_0) , azaz az O_0 közös centrumtól r_1 és r_2 .

Az A_2A_1 folytatása A'_2 -ben metszi a nagyobb kört; írva

$$(A_2A_1O_0) \sphericalangle = \varepsilon, \quad A_1A_2 = l_1, \quad A_1A'_2 = l_2,$$

az ábrából:

$$r_2^2 = l_1^2 + r_1^2 - 2l_1r_1 \cos \varepsilon; \quad r_2^2 = l_2^2 + r_1^2 + 2l_2r_1 \cos \varepsilon.$$

Szorozva az elsőt l_2 -a, a másodikat l_1 -el, összegyük:

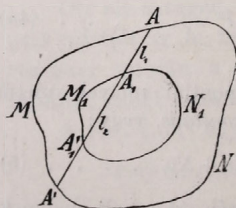
$$r_2^2(l_1 + l_2) = r_1^2(l_1 + l_2) + l_1l_2(l_1 + l_2),$$

azaz

$$r_2^2 - r_1^2 = l_1l_2,$$

és így végre:

$$F_2 - F_1 = \pi l_1l_2 \quad (9)$$



154. ábra.

3a. E tétel alkalmazása egyenlő rulettákra [HOLDITCH által]. Legyen (154. ábra) $MANA'$ valamely zárt görbe, melyet a rendszer A pontja leír; vegyük fel, hogy a görbe változatlan hosszúságú AA' húrjának A' végpontja ugyanazt a görbét írja le. Végre egy tetszőleges, a húron változatlan helyzetű A_1 pont legyen adva, úgy, hogy $A_1A = l_1$, $A_1A' = l_2$, és $M_1A_1N_1A'_1$ a húr mozgása közben az A_1 által leírt zárt görbe.

A tett feltevés és a (6) egyenlet értelmében az A és A' pontokat az O_0 -tól egyenlő

távolságúaknak kell tekintenünk; e szerint a 3. pont tétele itt érvényes. Ha az A és az A' pontok által leírt zárt egyenlő ruletták egyenlő F' területtel bírnak, míg az A_1 rulettájának F_1 a területe, akkor az F_1 és az F között lévő gyűrűszerű rész területére nézve (9) szerint áll:

$$F - F_1 = \pi l_1 l_2, \dots \dots \dots (9)$$

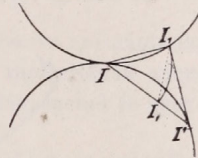
mely kifejezés az $MANA'$ görbe alakjától független.

9. Síkló mozgás és relativ mozgás a síkban. Fogazott kerek. Példák.

192. §. *A síkló mozgás jellemzője. Egyszerű és összetett síkló mozgás.*

1. Ha valamely szilárd MN (alap-) görbén egy másik vele mindig érintkező MN görbe olyformán mozog, hogy ezen utóbbinak egy meghatározott I_0 pontja mindig az alapgörbén marad, akkor e mozgás *egyszerű síkló mozgás*.

Ellenben, ha az érintkezés mindig megvan ugyan, de a síkló mozgáshoz még gördülés is járul, akkor ez *általános* (vagy sokszor jelző nélküli) *síkló mozgás*; itt a tetszőleges két időpillanathoz tartozó érintkező pontok között lévő ívek hossza sem egyenlő. (v. ö. a 140. §. 3. pontját).



155. ábra.

Jeleljék (155. ábra) I és I' az alapgörbe érintkező pontjait t - és $t + \Delta t$ -kor, I_1 az MN azon pontját, mely $t + \Delta t$ -kor I' -be jut. Legyen $II_1 = II$; akkor az $\vec{I_1 I'}$ elmozdulásnak az I körüli forgásból származó összetevője $\vec{I_1 I'}$, míg az II mentén fekvő s a síkló mozgásból önmagából származó összetevő $\vec{I_1 I'}$.

Ha az $I_1 I'$ elmozdulás elemi, akkor az $I_1 I$, az II_1 sugarú kör íveleme, míg I, I' az alapgörbe I pontjához húzott érintőbe esik.

E szerint:

$$\vec{II'} = \vec{II_1} + \vec{I_1 I'};$$

továbbá az egész (nem tisztán) síkló mozgás sebessége az $\vec{I_1 I'}$ elmozdulás sebességével egyenlő, azaz:

$$\lim \frac{\vec{I_1 I'}}{\Delta t} = \lim \frac{\vec{II}}{\Delta t} - \lim \frac{\vec{II_1}}{\Delta t} \dots \dots \dots (1)$$

Ebből még, mivel a határesetben $I_1 I$, merőleges az I, I' -re:

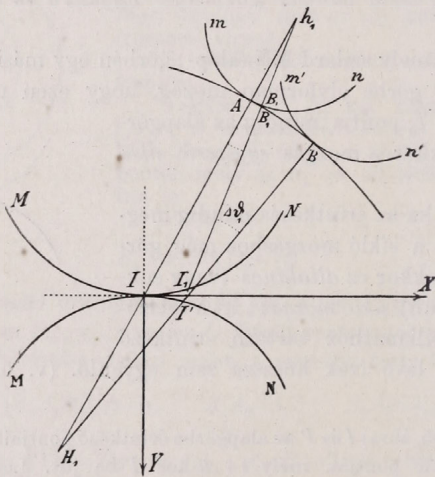
$$v^2 = (\omega ds)^2 + v_s^2$$

hol v az I_1 pont sebessége, v_s a tiszta síkló mozgásé és ω az I körüli szögsebesség.

193. §. *Tetszőleges merev görbe síkló haladása saját beburkolóján.*

Jeleljék a 190. §. szerint (151. ábra) MN az alap-, MN a gördülő görbét, AB az mn merev görbe beburkolóját, I és I' a momentán centrumokat, A és B a hozzátartozó érintkező pontokat; B , legyen az mn görbének azon pontja, mely Δt idő múlva B -be jut.

Az mn mozgásáról itt azt bizonyítjuk be, hogy az síklással egybekapcsolt gördülés az AB beburkolón.



151. ábra.

Ha a mozgás tiszta gördülés volna a beburkolón, akkor a mindenkori A , B , érintkező pont is momentán centrum volna, és így a merev sík rendszernek egyszerre két, I és A , vagy I , és B s i. t. momentán centruma azaz nyugvó pontja lenne, a mi csak nyugvó síkrendszernél lehetséges.

De a mozgás tiszta (egyszerű) síkló mozgás sem lehet, mert a mozgó mn görbe A érintkező pontja a beburkoló mentén helyzetéről helyzetre változik és a síkló mozgás sebessége itt a megelőző §. és a 190. §. (1) egyenlete szerint:

$$\lim \frac{\vec{B_1 B}}{\Delta t} = \lim \frac{\vec{I_1 B_1} \sin \Delta \theta}{\Delta t} = \omega \cdot \vec{I A} = c \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{R_1} \right) \cdot \vec{I A} \sin \theta_1 \quad (2)$$

[Ha a H_1 és h_1 középpontok az MN és MN közös érintője egy oldalán vannak, a 182. §. 1. pontjának Jegyzete érvényes].

Ezek szerint az mn mozgása szétbontható (151. ábra) egy A körüli forgásra, melynek forgásszöge a h_1 melletti elemi szög, és egy síkló mozgásra B_1 -től B -ig, melynek a H_1 melletti elemi szög a centrisszöge. Az első mozgás által a B , pont eljut az envelope B_1 pontjára, a második mozgás folytán az mn -nek B_1 -ben lévő B , pontja eljut B -ig.

194. §. *Relativ mozgás a síkban. Síkok relativ mozgása a síkban. Tétel a rendszerek síkbeli relativ mozgásáról.*

1. Legyen XY az álló, X, Y , a mozgó coordináta-rendszer; a tetszőleges A pontnak coordinátái ezen rendszerekhez képest x és y , illetve x , és y ; itt az A -t nem tekintjük a X, Y , rendszerrel merev kapcsolatban levőnek, hanem ehhez képest szintén tetszőleges mozgásban lévőnek.

A 141. §. (1) egyenletei értelmében:

$$\left. \begin{aligned} x &= p + x, \cos \vartheta - y, \sin \vartheta \\ y &= q + x, \sin \vartheta + y, \cos \vartheta \end{aligned} \right\} \text{ vagy } \left. \begin{aligned} x &= (x-p) \cos \vartheta + (y-q) \sin \vartheta \\ y &= -(x-p) \sin \vartheta + (y-q) \cos \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

A 79. §. definitiója szerint az x és y az A abszolút mozgásának, x , és y , az X, Y -tengelyekhez viszonyított relativ mozgásának coordinátái; ezek differentiálquotienisei a megfelelő sebességeket és gyorsulásokat adják.

Az X, Y , rendszerrel merev kapcsolatban lévő sík az álló XY rendszerhez képest bizonyos (abszolút) mozgást végez; míg az A pont ezen X, Y , rendszerhez képest is végez mozgást.

A felírt formulák a 83. §. formuláinak egyszerű esetei; itt valamenynyi fellépő mennyiség, ugyanis az x és y , az x , és y , a p és q és végre a ϑ változó.

A relativ mozgás coordinátái, sebességi és gyorsulási összetevői az abszolút mozgáséiból származtathatók és viszont, ha az X, Y , coordinátarendszer p , q , ϑ jellemzői mint az idő függvényei ismeretesek.

A differentiálásokat itt is az idézett §. módjára végezhetjük; a származó formulák felírását az olvasóra bízjuk.

Ily mozgásokra példát szolgáltat valamely hajó mozgása, melyet az álló XY rendszerre vonatkoztatjuk, a hajóval szilárd kapcsolatban van az X, Y , rendszer, melyhez a hajó sík fedélzetén mozgó valamely pont mozgását viszonyítjuk (V. ö. a 205. §. 69–71. feladatait).

2. Az XY szilárd síkban mozogjon egy X, Y , és egy X'', Y'' , sík; valamely az utóbbival merev kapcsolatban lévő A pont coordinátái e síkokban rendre legyenek x és y ; x , és y ,; x'' , és y'' ,; az utólsók a tett megjegyzés értelmében állandók.

Jeleljék p , q , ϑ , az X'', Y'' , rendszer O'' , kezdőpontjának coordinátáit az X, Y -rendszerben, akkor:

$$\left. \begin{aligned} x &= p + x, \cos \vartheta - y, \sin \vartheta \\ y &= q + x, \sin \vartheta + y, \cos \vartheta \end{aligned} \right\} \quad \text{és:} \quad \left. \begin{aligned} x &= p, + x, \cos \vartheta, - y, \sin \vartheta, \\ y &= q, + x, \sin \vartheta, + y, \cos \vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

mely egyenletek az $X, Y,$ rendszer abszolút mozgását engedik kifejezni, ha $p, q, \vartheta, p, q, \vartheta$ ismeretesek; vagy még az $X, Y,$ rendszernek az X, Y -hez viszonyított relatív mozgását s i. t.

Ily mozgásra példát szolgáltat egy robogó vasuti kocsí, melynek belsejében, mozgása síkjában egy sík alak tetszőlegesen mozog; a földdel az XY , a kocsival az $X, Y,$, a sík alakkal az $X, Y,$ tengelyrendszer áll merev kapcsolatban.

3. Ha a 2. alatt említett A pont az $X, Y,$ rendszerhez képest is mozog, akkor e pontnak többféle, az $X, Y,$ az $X, Y,$ s i. t. rendszerekhez viszonyított relatív mozgása van, melyeket sokszor első, másod- s i. t. rendű viszonyos mozgásnak is neveznek.

Ekkor a (2) formuláiban az $x,$ és $y,$ változóknak tekintendők, mi által a sebességek és gyorsulások kifejezései bonyolódottabbak lesznek.

Az ezen valamint a hasonló idetartozó esetek formuláinak kifejtését az olvasóra bizzuk.

4. A 81. §-ban két pont relatív mozgására nézve bebizonyított tétel itt szintén érvényes; ezt következőleg fejtezhetjük ki:

a. Az A pontnak az $X, Y,$ mozgó rendszerhez viszonyított relatív mozgása nem változik, ha mind a rendszernek, mind a pontnak, mindenkor sebességeihez a pontéval egyenlő értékű, de ellentett jelű sebességet adunk; ez által a pont nyugalomba jő, míg az $X, Y,$ rendszer mozgása ismert módon változott és így eredő mozgása a keresett relatív mozgást szolgáltatja.

b. Ez a tétel azonnal terjeszthető ki egy síkban mozgó két $X, Y,$ és $X, Y,$ rendszerre; ugyanis ha ezen két rendszer tényleges elemi elmozdulásaihoz egy közös harmadik elemi elmozdulást (mely mindig a két rendszernek közös momentán forgása által helyettesíthető) hozzáadunk, ez által a rendszerek egymáshoz viszonyított relatív mozgása nem változhatik.

Ez a közös harmadik elmozdulás úgy is választható, hogy az az egyik rendszer mindenkor tényleges elemi elmozdulásával (momentán forgásával) egyenlő értékű, de ellentett előjelű legyen; ez által ez a rendszer nyugalomba jő, míg a másik rendszer mozgása ismert módon lévén megváltoztatva, eredő mozgása a keresett relatív mozgással egyenlő.

A tételek alkalmazása gyakorlati esetekre [v. ö. a következő §-okat] a kezdőnek nagyon ajánlható.

legyen szilárd kapcsolatban; ezek képviseljék a kerek fogai profiljainak (a mozgás síkjával való metszőgörbéinek) általános alakját.

Ezen görbékre nézve az a feltétel áll, hogy elképzelve a köralakú kerületeket, ha az egyik görbe forog az O_1 körül, az a másikat O_2 körüli forgásra készíti; a fogak e szerint a mozgás átvitelére vonatkozólag a kerek K_1K_1 és K_2K_2 kerületeit, az ú. n. *eredeti (primitív) kerületeket* helyettesítik, de sokkal biztosabb kapaszkodást és evvel a mozgásnak is sokkal biztosabb átvitelét közvetítik, mint a mozgás mentén tangenciálisan érintkező kerületek.

2. Az M_1N_1 és M_2N_2 görbék egymáshoz viszonyított relatív mozgásának kipuhatólása czéljából [megelőző §. 4. pontja] tulajdonítsunk mindkét rendszernek az O_1 körül $-\omega_1$ szögsebességet; ez által az első kerék mindig nyugalomban marad, a másiknak középpontja $-\omega_1$ szögsebességgel forog O_1 körül és ezenkívül a K_2K_2 mint előbb, úgy most is még ω_2 szögsebességgel forog O_2 körül; a két keréknek egymáshoz viszonyított relatív mozgása ez által nem változott.

Az I érintkező pont, mely közös, most nyugalomba jött, míg O_2 pont az O_1 körül $-(a_1+a_2)\omega_1$ sebességgel mozog, mely az $a_1\omega_1=a_2\omega_2$ összefüggés szerint $-a_2(\omega_1+\omega_2)$ értékű. Az O_2 -nek ezen sebességét helyettesíthetjük az I körüli $-(\omega_1+\omega_2)$ szögsebességű momentán forgás segítségével, lévén $IO_2=a_2$ és így O_2 sebessége megint $-a_2(\omega_1+\omega_2)$.

E szerint a K_2K_2 -nak a K_1K_1 -hoz viszonyított relatív mozgásának momentán centruma az I , szögsebessége pedig az I körül $-(\omega_1+\omega_2)$; e relatív mozgás ennél fogva mindig *epicycloidális* (151, 152. §§.).

Ezért az $M_2A_2N_2$ görbének a most szilárdra tett $M_1A_1N_1$ -hez viszonyított elemi mozgása csak $-(\omega_1+\omega_2)$ szögsebességű momentán forgás lehet I körül, és mivel a két görbe mindig érintkezésben tartozik maradni, az M_2N_2 a közös érintő mentén végez *sikló* mozgást M_1N_1 -en s az A_2 pont sikló sebessége

$$-\overline{IA_2}(\omega_1+\omega_2) \dots \dots \dots (2)$$

értékű és az IA_2 közös normálisra merőleges.

[Az A_1 abszolút sebessége $O_1A_1 \cdot \omega_1$ és merőleges O_1A_1 -ra.]

A sikló mozgás csak ott zérus, hol IA_2 zérus, azaz a közös kerületi pontban, I -ban; de ott kívánatos, hogy a közös érintő ne essék egybe a K_1K_1 , K_2K_2 kerületek közös érintőjével, hanem vele véges szöget képezzen, mert különben csak a surlódás közvetíti a mozgás átvitelét.

3. Továbbá, mindig csak a relatív mozgást tárgyalva, a 2. pont értelmében M_1N_1 alapgörbének tekinthető és M_2N_2 a rajta sikló görbének (192. és 193. §§.); ezért az M_1N_1 görbe az M_2N_2 különböző hely-

zeteinek envelope-ja és közös normálisuk mindig átmegyén a mindenkor momentán centrumon.

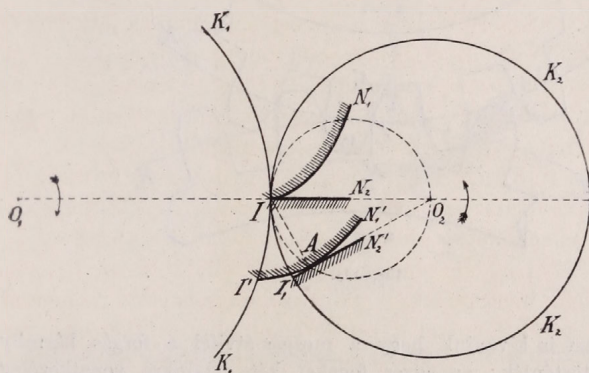
Végtelen számú ily M_1N_1 és M_2N_2 görbepár létezik, mely ezen feltételeknek megfelel, mert az A_1A_2 közös pontot a sík tetszőleges pontjában szabad választani, és a feltételeket mindig kielégíthetni.

A fogazás problémája e szerint a következő: adva van az egyik kerék fogainak alakja (profilje), kerestessék a második kerék fogainak hozzátartozó alakja (profilje).

A következőkben a fogak alakjainak (az egymáshoz tartozó fogprofilok) legegyszerűbb eseteivel foglalkozunk.

196. §. Az epicycloidális fogazás egyszerű esete. Egyenes oldalú fogak.

Legyen K_1K_1 a vezető,* K_2K_2 a vezetett keréknek primitív kerülete, O_1 és O_2 középpontjaik, I a közös érintkező pont (157. ábra). Kimutatjuk, hogy az epicyclois és az egyenes vonal egymáshoz tartozó két fogszelvény.



157. ábra.

1. Szerkesztjük a vezetett kerület IO_2 sugarával mint átmérővel az IAO_2 kört. Gördítsük ezt a K_1K_1 kerületen: az IN_1 epicycloist fogja leírni, melynek érintője az I -ban egybeesik az IO_2 -vel. Ezt az epicycloist a vezető kerékkel merev kapcsolatban lévőnek tekintjük.

Ha a vezető kerék véges forgást végezett, akkor IN_1 átment $I'N_1'$ -be; az IN_2 lap pedig, mely a vezetett kerékkel van merev kapcsolatban, I, N_2' -be. Az $I'N_1'$ pedig az az IAO_2 kör A pontja által leírt epicyclois, melynek érintője az IA -ra merőleges mivel I a forgás momentán centruma; de a szerkesztés szerint az I, O_2 is merőleges IA -ra, és így $I'N_1'$ és I, N_2' az A -ban közös érintővel bírnak.

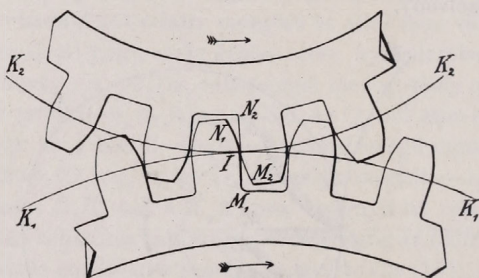
* Vezető kerék az, melynek mozgása át leszén víve a vezetett kerékre.

Az II' , II , IA körvek hossza a gördülő mozgás természeténél fogva egyenlő.

E szerint az IN_1 epicyclois és az IN_2 egyenes valóban avval a tulajdonsággal bírnak, hogy forgás közben mindig egymással érintkezésben maradnak és így az IN_1 epicyclois alakú vezető fognak megfelel az IN_2 egyenes lapú fog.

Ha K_2K_2 volna a vezető kerék, a fogak szelvényei (profiljai) felcserélődnek.

2. Ha azt kívánjuk, hogy a kerekek szerepe felcserélhető legyen, akkor a talált profileket következő módon kell kiegészítenünk: 1) az N_1I -epicyclois-ívet a K_1K_1 kerület belsejébe egy IO_1 irányú egyenes vonallal, az IM_1 -el, (158. ábra); 2) az N_2I -egyenes vonalat szintén a K_1K_1 kerület belsejébe az IM_2 epicyclois-ívvel, melyet a fent adott eljárás mintájára nyerjük, ha az O_1I kör sugarának felével mint sugárral szerkesztett kört a K_2K_2 kerületen gördítjük.



158. ábra.

Ha még azt is kívánjuk, hogy a mozgás-átvitel a forgás bármely irányában is történjék: az egyes fogakat két oldalukra vonatkozólag szimmetrikusan kell szerkeszteni; ez által létesül az 158. ábrában előtüntetett fogazás; itt a fogak profiljének azon részei, melyek a K_1K_1 , illetve a K_2K_2 kerületeken belül fekszenek, egyenes vonalak, melyek a megfelelő körök sugaraival mentén fekszenek, az azokon kívül fekvő részei pedig az 1. alatt részletezett eljárások szerint szerkesztett epicyclois-ívek.

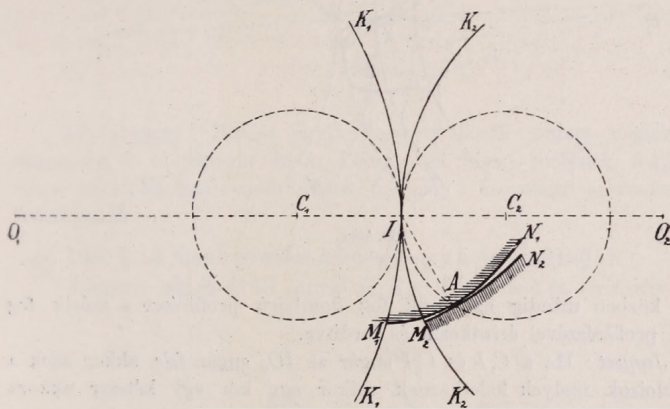
Mozgás közben a különböző fogpárok érintkezése olyan, hogy mindig egy domború felület érintkezik egy síklapúval és megfordítva; de csak síkrészek vagy csak domború részek egymással nem érintkezhetnek.

197. §. Epicycloidális fogazás. Általános eset.

Legyen ismét K_1K_1 az egyik, K_2K_2 a másik kerék eredeti kerülete; O_1 és O_2 középpontjaik, I az érintkezés pontja (159. ábra). Bebizonyítjuk, hogy epicyclois és hypocyclois egymáshoz tartozó két fogprofil.

1. Szerkeszszünk a K_2K_1 belsejében, az O_1O_2 egyenesen fekvő tet-szöleges C_2I sugárral kört, mely a két kerületet I pontban érinti. Le-gyen az IM_1 - és az IM_2 - és az IA körívek hosszúsága egyenlő. Ha az IA körívet a K_1K_1 kerületen gördítjük, akkor az A pont leírja az M_1N_1 epi-cycloist. Ha ugyanezt az IA kört a K_2K_2 kerület belsejében gördítjük: az A pont leírja az M_2N_2 hypocycloist.

Ha ez a gördülő kör a rajz által előtüntetett helyzetben van, akkor történjék a gördülése akár a K_1K_1 külső, akár a K_2K_2 belső kerületén, a momentán centrum a közös I pontban van; ezért az M_1N_1 és az M_2N_2 két görbe egymással az A pontban érintkeznek és AI a közös normálisuk.



159. ábra.

Ha most a kereknek forognak, e mozgás közben mindig áll IM_1 ív = IM_2 ív és így, ha az M_1N_1 epicyclois a K_1K_1 kerülettel, az M_2N_2 hypo-cyclois pedig a K_2K_2 kerülettel áll merev kapcsolatban, akkor e két görbe mozgás közben is más-más pontokban mindig érintkeznek.

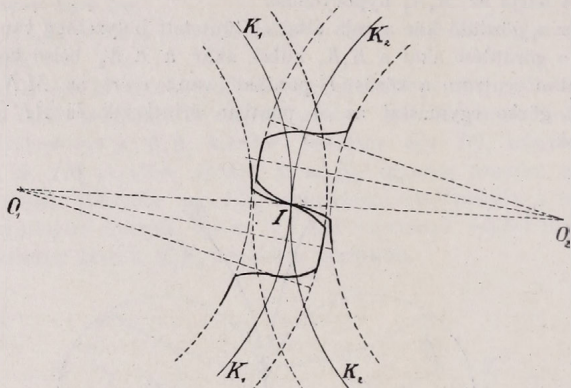
E szerint az M_1N_1 epicycloishoz mint fogprofilhoz az M_2N_2 hypo-cyclois, mint megfelelő másik fogprofil tartozik.

2. Ha az M_1N_1 profilt a K_1K_1 kerület belsejébe, az M_2N_2 -et pedig a K_2K_2 kerület felé akarjuk folytatni, akkor a szerkesztést, melyet a 159. ábra a K_2K_2 belsejére mutat, most a K_1K_1 belsejére kell végrehajtunk; e célból az előbb használttal egyenlő C_1I sugarú kört gördítettünk a K_1K_1 kerület belső és K_2K_2 kerület külső oldalán és azon pont pályáját keressük, mely a gördülés kezdetén egybeesik az M_1 illetve az M_2 ponttal; e két ruletta a fogprofilok keresett két folytatása.

E szerint az N_1M_1 epicycloisnak, mint fogprofilnak a K_1K_1 belsejébe való folytatása nem egyéb, mint a C_1I körnek a K_1K_1 belső kerületén való gördülése által létesített hypocyclois; ellenben az N_2M_2 hypo-

cycloisnak, mint fogprofilnek a K_2K_2 -ból kifelé való folytatása nem egyéb mint a C_1I körnek a K_2K_2 külső kerületén való görbülete által létesített epicyclois.

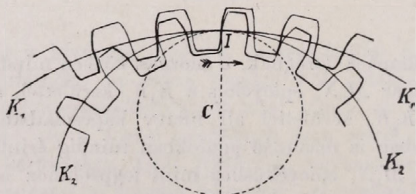
Az 160. ábra mutat ily eljárás szerint szerkesztett két fogat; itt is



160. ábra.

mozgás közben mindig az egyik fog domború profilrésze a másik fog homorú profilrésszel érintkezik és fordítva.

I. Jegyzet: Ha a C_1I és C_2I sugár az IO_2 sugár fele, akkor azok a hypocycloisok, melyek keletkeznek, mikor egy kör egy kétszer akkora



161. ábra.

kör belső kerületén görbül, egyenesekké fajúlnak [148. és 153. §§.]; ez az előbbi §-ban tárgyalt eset.

II. Jegyzet. A C_1I és C_2I sugarak az O_1I és O_2I sugarakhoz képest tetszőlegesen lehetnek ugyan; de czélszerű őket kisebbeknek választani mint az utóbbiak kisebbikét vagy legfeljebb evvel egyenlőnek, különben a hypocycloisokból pericycloisok lesznek, melyek domború részükkel érintik a szintén domború epicycloist (V. ö. a 198. §. Jegyzetét).

III. Jegyzet. Belső fogazás esetében (161. ábra), ha K_1K_1 és K_2K_2

bék normálisai is, és így a két lefejtő I -ban érintkezik (közös érintővel bír).

Bebizonyítjuk, hogy e két evolvens egymáshoz tartozó két fogprofil.

Ugyanis, ha M_1N_1 a K_1K_1 ; M_2N_2 a K_2K_2 kerékekkel van merev kapcsolatban s a forgás bekövetkezik, akkor ezen evolvensnek helyzete a mozgás tetszőleges pillanatában m_1i és m_2i ; ámdé az M_1N_1 -nel congruens m_1i görbe szintén az M_1P_1 kör evolvensé, melyet az m_1 pontból kezdett lefejtéssel nyerjük, hol még, miként önként következik az m_1M_1 ív $= iI$. Ugyanily megjegyzés áll m_2i -re nézve; ott: m_2M_2 ív $= iI$.

E szerint $H_1i = P_1m_1$; $P_2i = P_2m_2$ és így i -ben e két evolvens csakugyan a P_1P_2 mentén fekvő normálisakkal és reá merőleges közös érintővel bír.

Az érintkezés i pontja mozgás közben mindig a P_1P_2 közös körérintőn marad.

A lefejtett körök sugarainak viszonya az IO_1P_1 és az IO_2P_2 hasonló háromszögekből adódik:

$$O_1P_1 : O_2P_2 = O_1I : O_2I = a_1 : a_2, \quad \dots \quad (1)$$

mely viszony mondja, hogy a körök egyike mindig szabadon választható.

Jegyzet. A fogakat itt is symmetrikusan szerkesztik. A fogprofilok itt mindig *domborúak* lévén, csak domború felületek érintkezhetnek egymással s ez a gyakorlatban sokkal nagyobb mérvű fogkoptatást von maga után, mint az epicycloidális fogazás (v. ö. a 197. §. II. Jegyzetét).

A fogazás további eseteinek és részleteinek gyakorlati szempontból való tárgyalása e mű keretén kívül esik.

10. Feladatok merev rendszerek síkbeli mozgására.*

199. §. Feladatok a momentán centrumokra és görbéikre.

1. Valamely AB egyenes tetszőleges módon mozog a síkban; bizonyíttassék be, hogy a mozgás bármily pillanatában az egyenes valamenynyi pontjának sebességei egy parabolát érintenek, mely a mozgás síkjában van, melynek gyúpontja a momentán centrum, csúcspontja pedig az e^* centrumból az AB -re bocsátott merőleges talppontja. (V. ö. 306. §. 1. pontját, hol a térbeli mozgás megfelelő esete van tárgyalva.) V.

2. Valamely $AB = l$ változatlan hosszúságú egyenes két végpontja két egymással tetszőleges ε szöget képező OA és OB egyeneseken tartozik maradni (a 147. §. 1. példájának általánosítása).

Bizonyíttassék be, hogy a momentán centrumok görbéje oly kör,

* A feladatok végéhez illesztett rövidítések a forrást jelentik, melyből e feladatok merítvék.

Igy: *Sch* jelentése: *Schell W.*: Theorie der Bewegung und der Kräfte. Második kiadás. Első kötet. Leipzig 1879; *St. G.-é*: de *Saint-Germain A.*: Recueil d'exercices sur la Mécanique rationelle. Második kiadás. Paris, 1889; *Vi-é*: *Villié E.*: Compositions d'Analyse et de Mécanique. Paris 1885 és *Villié E.*: Traité de Cinématique. Paris, 1888. V-é: hogy a feladat sok helyen fordul elő (vulgaris); *A-é*: a szerzőtől származó feladat.

melynek középpontja az O , sugara $l: \sin \varepsilon$; továbbá, hogy az AB pontjai ellipsiseket írnak le. V.

3. Valamely állandó szög két szára két sík görbét tartozik mindig érinteni; bizonyítsák be, hogy a momentán centrum a két érintőpontban a görbékre emelt normálisak metszőpontja; továbbá hogy a két görbe egyszersmind a két szár beburkolója. V.

4. Valamely $AB=l$ hosszúságú vonal egyik A végpontja egy a sugarú körön tartozik mozogni, míg B végpontja az OX tengelyen siklik; a 140. §. szerint bizonyítsák be, hogy a momentán centrum helye a szilárd síkban (azaz a szilárd MN alapgörbe):

$$r(r-2a) \cos^2 \vartheta = l^2 - a^2, \dots \dots \dots (1)$$

hol $OI=r$; $(IOX) \angle = \vartheta$, I lévén e momentán centrum.

Ellenben a mozgó síkban e centrum helye (azaz az MN gördülő görbe):

$$l^2 + l(a-\varrho) \cos \eta = a\varrho, \dots \dots \dots (2)$$

hol $AI=\varrho$; $\angle (IAB) = \eta$. S. G.

5a. Ha a 3. feladatban az egyik görbe végtelen kis körre fajul, akkor a feladat a következő: az állandó szög egyik szára kénytelen egy meghatározott szilárd (kör-) ponton keresztül menni, míg a másik egy adott görbét folytonosan érinti. A momentán centrum itt a szilárd pontból a rajta átmenő szárra emelt merőleges és az érintkezés pontjából a másik szárra emelt normális metszőpontja. V.

5b. Ha a megelőző feladatban a szög az A csúcsú derékszög és a momentán centrum I , akkor a B érintkező és a C szilárd pontot egybe-kapcsoló egyenes hossza egyenlő AI -val, és a két egyenes egymást középpontjaikban metszik. Bizonyítsák be, hogy AI az adott (a szög a másik szarát érintő) görbe talppontgörbéjének érintője. Vi.

6. Valamely állandó szög két szára kénytelen mindig két ponton áthaladni. Bizonyítsák be, hogy a momentán centrumok görbéje oly kör, mely a szög csúcsán és a két szilárd ponton megyen keresztül. V.

7. A *conchois* görbét oly egyenesnek pontjai írják le, mely mindig egy meghatározott szilárd ponton megyen keresztül, míg egyik pontja egy meghatározott egyenesen tartozik maradni [107. §., 70. ábra, 183. l.] Bizonyítsák be, hogy a momentán centrumok görbéje oly parabola, melynek csúcspontja a szilárd pontba esik, melynek tengelye a meghatározott egyenesre merőleges, góczhúrja pedig ezen egyenesnek a szilárd pontból való távolsága. V.

8. A 147. §. 2. példájában, valamely merev AB egyenesnek egyik, A pontja körben, másik, B pontja a kör valamely átmérője (vagy annak folytatása) mentén tartozik maradni; bizonyítsák be, hogy momentán centrumok görbéjének (az alapgörbének) egyenlete derékszögű koordinátákban:

$$4a^2x^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - l^2 + a^2)^2;$$

ellenben (a 140. §. 2. pontja szerint) ha a körben mozgó A pont a polárkoordináták kezdete, az AB egyenes a mozgó koordináta tengely és $(IAB) \angle = \vartheta$, $AI = r$, hogy akkor:

$$(l^2 - a^2)(r^2 - l^2) = l^2(r - 2a)^2 \sin^2 \vartheta. \quad V.$$

9. Valamely síkbeli alak állandó szögsebességgel forog oly pont körül, mely a forgás síkjában ellipsist ír le egy szilárd centrum körül.

Hol van a sík alak momentán centruma, ha 1. a szilárd centrum az ellipsis középpontjával, 2. az ellipsis egyik gyúpontjával esik egybe? A.

10. A föld holdjának mozgásához analog a következő mozgás: Valamely síkbeli alak állandó szögsebességgel forog oly pont (tengely) körül, mely maga egy másik pont (a föld és a hold tömeg középpontja) körül körben mozog; ez a középpont pedig a nap körül, mint gyúpont körül ír le ellipsist (egyszerűbb esetben kört.) Hol fekszik a nevezett síkbeli alak momentán centruma, milyenek pontjainak pályái? V.

200. §. *Feladatok a gördülő mozgásra és a ruletták alakjára.*

11. Bizonyíttassék be, hogy a megelőző §. 2. feladatának mozgása létesíthető, ha egy kör egy kétszer akkora másik kör belső területén gördül, és hogy e szerint a gördülő kör sugara $l : 2 \sin \varepsilon$, mely kör mindig átmegyzen az O csúcson; végre, hogy az AB -vel kapcsolatban mozgó sík pontjai valamennyien ellipsiseket írnak le. V.

12. A *conchois*-t létesítő mozgás momentán centrumai görbéje (az alapgörbe) a 199. §. 7. feladatából ismeretes lévén, keressék a hozzátartozó gördülő görbe. [Itt ajánlandó a szilárd ponton átmenő vonalat egyik mozgó koordináta-tengely gyanánt venni és a mozgó x , y , koordináták kezdetét abba a pontba helyezni, mely mindig a szilárd egyenesen marad; a gördülő görbe egyenlete ekkor $[x^2 = a^2(x^2 + y^2)$ vagy $r, \cos^2 \vartheta = a]$. V.

13. A *conchois*-t létesítő mozgásnál a mozgó pontrendszer tetszőleges pontjának pályája meghatározására nézve legyen (70. ábra, 183. l.) a szilárd O pontból a szilárd BN_3 egyenesre bocsátott ON merőleges az X tengely és N talppontja a kezdet; e szilárd rendszerben x, y a tetszőleges pont koordinátái; legyen továbbá a B pont a mozgó X, Y , rendszer kezdete és a \overline{OB} vonal a pozitív X -, BB_2 a pozitív Y , tengely és x , y , a tekintetbe vett pont koordinátái e rendszerben; végre ϑ az X és az X , tengelyek között lévő (BON) szög, mely ON -től balfelé negatív, jobbfelé pozitív.

Ekkor:

$$x = x, \cos \vartheta - y, \sin \vartheta; \quad y = a \operatorname{tg} \vartheta + y, \cos \vartheta + x, \sin \vartheta,$$

melyekből a ϑ kiküszöbölésével nyerjük az (x, y) pont rulettája egyenletét.

Ha a pont a mozgó egyenesen fekszik, $y, = 0$ és e ruletta egyenlete:

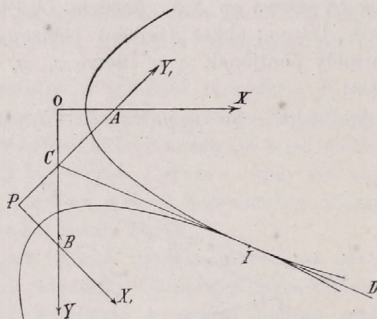
$$(a+x)^2(x^2-x^2) = x^2y^2,$$

mely az ú. n. NICOMEDES-féle (150 évvel K. e.) *conchois*okat képviseli. V.

a momentán centrumok helye és a mozgáshoz tartozó gördülő görbe; vizsgáltsák meg a merev síkbeli rendszer tetszőleges, az AB egyenesen kívül fekvő pontjának rulettája. A.

18. Valamely APB derékszög szárai egyike (165. ábra) mindig kénytelen az X tengelyen fekvő szilárd A ponton keresztül menni, másik szára az Y tengelyt oly B helyen metszi, hogy mindig álljon: $OA=PB$, azaz a PB szárnak e meghatározott B pontja mozgás közben mindig az Y tengelyen marad.

Bizonyítsák be, hogy a momentán centrumok görbéje és a gördülő görbe oly egyenlő két parabola, melyek fél góczhúrja az $OA=PB$; az elsőnek tengelye az OX , góczpontja A ; a másodiké PX , illetve B ; közös érintő-



165. ábra.

tőjük pedig az (ACB) \angle szöget felező CD egyenes. A P pont *strophoist* ír le, a mozgó parabola csúcsa ellenben *cissoist*. [Math. repertórium 65. §. A, 1. és 10. formulája.] V.

18a. A megelőző feladat még következőleg is fogalmazható: Ha valamely egyenes egy adott kört mindig érinti és egyik A végpontja ezen kör egy szilárd érintőjén síklik, akkor a momentán centrumok görbéje a térben oly parabola, melynek gyűpontja a kör középpontja. V.

18b. Egyenlő és symmetrikusan fekvő ellipsisek egyike gördül a másikon (166. ábra); bizonyítsák be, hogy az F_1 gyűpont a G_1 gyűpont körül, az F_2 a G_2 körül kört ír le, melynek sugara az ellipsisek fél nagy tengelye. V.

18c. Egyenlő és symmetrikusan fekvő hyperbolák egyike gördül a másikon (167. ábra). Ha F_1, F_2 az egyik, G_1, G_2 a másik hyperbola gyűpontjai, akkor F_1 a G_1 körül, F_2 a G_2 körül ír le köríveket (de nem egész köröket), melyek sugara a hyperbolák fél nagy tengelye. V.

19a. Valamely ε szögű csúcs két szára mindig tartozik egy a és b fél-tengelyű ellipsist érinteni; bizonyítsák be, hogy a csúcs geometriai helye a következő negyedfokú egyenletnek felel meg:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = [a^2 + b^2 - (x^2 + y^2)]^2 \operatorname{tg}^2 \alpha. \quad \text{V.}$$

19b. Bizonyítsák be, hogy a 199. §. 8. feladatában, az AB egyenesen fekvő, e vonal középpontjától b távolságban levő tetszőleges pont pályájának egyenlete:

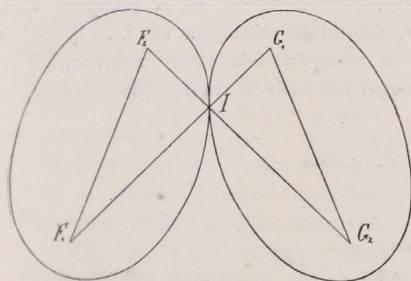
$$\left(\frac{1}{2}l-b\right)y = \left(\frac{1}{2}l+b\right)\sqrt{\left(\frac{1}{2}l-b\right)^2 - x^2} - \sqrt{a^2\left(\frac{1}{2}l-b\right)^2 - l^2x^2}.$$

Milyen pályát ír le az AB középpontja ($b=0$)? Bizonyítsák be, hogy az egyenlet ellipsziseket jelent, ha $l=a$. V.

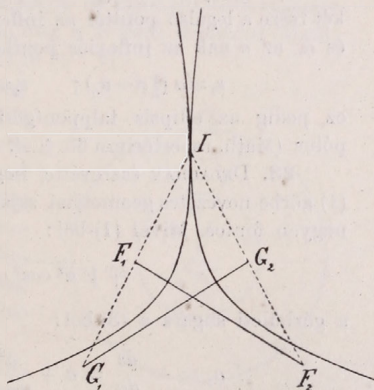
20. Valamely $r=a(1-\cos \vartheta)$ egyenletű cardoidis közöséges cyclois külső (domború) kerületén gördül, melynek nemző köre a sugarú; a két görbe csúcspontjai, egymásnak megfeleljenek. Legyen I a momentán centrum, C a nemző kör középpontjának I -hoz tartozó helyzete, CP a C -ből az alapegyenesre merőlegesen bocsátott a sugarú, és $(ICP) \angle = u$. Bizonyítsák be, hogy a cardoidis pólusa (behajló fordulópontja, 110c. ábra) oly görbét ír le, mely az

$$x=a(u-2\sin u+\sin u\cos u), \quad y=a(1-\cos u)^2$$

egyenletekből az u eliminációjával származik; a görbe érintőjének trigonometriai tangense: $dy:dx = -\operatorname{tg} u$.



166. ábra.



167. ábra.

Ha a cardoidis a cyclois belső (homorú) kerületén gördülne, pólusa a cyclois két végpontját egybekapcsoló (horizontális) egyeneset írná le.

Bizonyítsák be, hogy a cardoidis tengelyének (forduló pontját csúcsával egybekapcsoló egyenesnek) beburkolója

$$x=a[u-\sin u+(1-\cos u)\sin u\cos 2u], \quad y=a(1-\cos u)(1-\sin u\sin 2u)$$

egyenleteknek felel meg; érintőjének trigonometria tangense $dy:dx = -\cotg 2u$. S.G.

21. Valamely ellipszis, melynek tengelyei csak igen kis különbséget mutatnak, egyenes vonalon gördül. Miben különböznek a mozgás sajátosságai és a származó ruletták a kör-étől? A.

22. Valamely ellipszis szilárd egyenesen gördül; legyenek $2a$ és $2b$ tengelyei, ε a számbeli excentricitás, továbbá legyen α az I momentán

centrumtól az egyik góczponthoz, F'_1 -hez húzott egyenes és a szilárd alapegyenes normálisa között lévő szög; végre legyen a szilárd egyenes az X tengely. Bizonyítsassék be, hogy a nevezett góczpont pályájának egyenlete

$$y = a \cos \alpha \pm \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha - b^2}, \quad \dots \quad (1)$$

hol még $a=0$ és $y_0=a(1-\varepsilon)$ a kezdő állapothoz tartozó értékek. Értelmeztessek e pálya; keressessék inflexióshelye.

Mivel α egyszersmind ezen pálya mindenkor pontjához húzott érintőnek az X tengellyel képezett szöge, azért:

$$dx = dy \cotg \alpha = - \left\{ a \pm \frac{a^2 \cos \alpha}{\sqrt{a^2 \cos^2 \alpha - b^2}} \right\} \cos \alpha d\alpha, \quad \dots \quad (2)$$

ebből

$$ds = - \left\{ a \pm \frac{a^2 \cos \alpha}{\sqrt{a^2 \cos^2 \alpha - b^2}} \right\} d\alpha \quad \dots \quad (3)$$

A ds kifejezése integrálható; bizonyítsassék be, ha s_1 és s_2 e pálya-görbe két része a legalsó ponttól az inflexió pontig és innen a legfelsőbb pontig, és α_0 az α -nak az inflexió ponthoz tartozó értéke, hogy akkor

$$s_1 = a \left(\frac{1}{2} \pi - \alpha_0 \right); \quad s_2 = a \left(\frac{1}{2} \pi + \alpha_0 \right); \quad s_1 + s_2 = a\pi;$$

ez pedig az ellipsis talppontgörbéjének fél kerülete, ha a góczpont a pólus (Math. repertórium 65. §. A. 16. formulája mintájára 76. l.). S. G.

23. DELAUNAY észrevette, hogy a megelőző feladatban megvizsgált (1) görbe nevezetes geometriai sajátsággal bír, mely a capillaritás tanában nagyon fontos. Mivel (1)-ből:

$$\pm \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha - b^2} = a \cos \alpha - y,$$

a görbületi sugara a (3)-ból:

$$\varrho_1 = - \frac{ds}{d\alpha} = a + \frac{a^2 \cos \alpha}{y - a \cos \alpha}; \quad \overline{IF}_1 = \frac{y}{\cos \alpha};$$

hol még \overline{IF}_1 a góczpont rulettájának mindenkor normálisa. Ha most a rulettát az X tengely körül forgatjuk, a létesített forgási felületnek egyik normális metszete maga a ruletta, melynek ϱ_1 a görbületi sugara, másik erre merőleges metszetének görbületi sugara MEUSNIER tétele szerint [Math. repertórium 85. §.] $\varrho_2 = y : \cos \alpha$, azaz az \overline{IF}_1 .

A ϱ_1 és \overline{IF}_1 kifejezéseiből, ered: $\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{a}$, azaz, a főgörbületek összege állandó az egész felületre nézve; ez pedig egy folyadékban lebegő, vele nem elegyedő másik folyadék felszínének (capillaris felületének) egyenlete. S. G.

24. Ha megelőző feladatban az ellipsis parabolába megyen át, a góczpontra és a directrixre (mely itt a gyúpontról p távolságban van) a momentán centrumból bocsátott merőlegesek talppontjai az X tengelyhez szimmetrikus fekvésűek, geometriai helyük lánczgörbe [v. ö. a 153. §. 2. példáját; a megfejtés a 144. §. (4) differenciálegyenlete alapján történjék.] V.

25. A közös érintőjükhöz teljesen szimmetrikus két görbe gördül egymáson; a szimmetria a gördülés közben is megmarad; bizonyíttassék be, hogy a gördülő síkbeli alak pontjainak rulettái hasonlóak maradnak az alapgörbe megfelelő talppontgörbéjéhez. Így, ha A a gördülő alak egy pontja, A az álló síkban a hozzá szimmetrikus pont, akkor az A rulettája hasonló az alap (basis-) görbének az A -ra vonatkozó talppontgörbéjével. Végre bizonyíttassék be, hogy ezen esetben az inflexiós kör legmagasabb pontja, S a gördülő görbe görbületi sugara felező pontjában van. V.

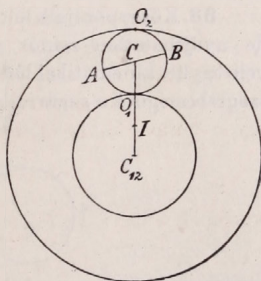
26. A 18. feladatban (165. ábra) fel van említve, hogy a midőn valamely APB derékszög egyik szára mindig kénytelen egy szilárd A ponton keresztül menni, míg másik szárának B pontja oly feltétellel írja le az OY egyenest, hogy álljon $OA=PB$, akkor a mozgás úgy tekinthető, mintha a egy parabolán gördülne egy hozzá szimmetrikus parabola mindenkor CD közös érintőjén; a góczhúrok fele $OA=PB=p$. Alkalmaztassék megelőző 25. feladat általános tétele erre az esetre és bizonyíttassék be, hogy a mozgó parabola csúcsa (pólusa) *cissoist*, míg a P pont *strophoist* [Math. repertórium 65. §. A 1. és 10. formulái] ír le. V.

27. Az epitrochoisok (151. §.) azon pontjai kerestetnek, melyekben a görbék inflexiót mutatnak. Az ily pontok az *inflexiós* körön [170. §.] fekszenek; mi a feltétele azoknak a rendszerbeli pontoknak, melyek gördülés közben az inflexiós körbe jutnak? Bizonyíttassék be, hogy csak a meghosszszabodott epicycloisoknál léphet fel az az eset, hogy a görbéhez húzott érintő a nyugvó kör középpontján megyen keresztül. V.

28. PASCAL csigavonalait valamely körrel mereven összefüggő sík pontjai írják le, midőn e kör belső kerületével egy ketszer kisebb kör külső oldalán gördül. A görbék sokszor a *kör conchoisai*-nak neveztetnek (v. ö. a 179. §. 1. pontját); fejtessék ki egyenletük; bizonyíttassék be, hogy a gördülő kör kerületi pontjai *cardidoisok*at írnak le. V.

29. Két a_1 és a_2 sugarú kör ω_1 és ω_2 szögsebességekkel forog közös C_{12} középpontjuk körül (168. ábra). A kettő között lévő $a_2 - a_1$ szélességű gyűrűs térben egy harmadik, $\frac{1}{2}(a_2 - a_1) = a$ sugarú kör gördülve mozog, úgy, hogy az O_1 és az O_2 érintési pontjainak sebessége a belső, illetve a külső kör kerületi pontjai sebességeivel legyenek egyenlők. Ha ω az AB kör szögsebessége I momentán centruma körül és ω_{12} a $C_{12}C$ egyenes szögsebessége C_{12} körül, akkor bebizonyítandó, hogy áll:

$$\omega = \frac{a_2\omega_2 - a_1\omega_1}{a_2 - a_1}; \quad \omega_{12} = \frac{a_2\omega_2 + a_1\omega_1}{a_2 + a_1} \quad IC = \frac{a_2\omega_2 + a_1\omega_1}{a_2\omega_2 - a_1\omega_1} (a_2 - a_1). \quad V.$$



168. ábra.

30. Vizsgáltassék meg a megelőző feladat azon speciális esetekben mikor

$$1) a_1\omega_1 = a_2\omega_2, \quad 2) a_1\omega_1 = -a_2\omega_2;$$

és adassék meg kinematikai értelmezésük. V.

31. Adva van egy parabola-alakú ruletta, tengelye az alapgörbe; bizonyíttassék be, hogy a gördülő görbe a körnek lefejtője. [A parabola subnormálisa állandó lévén, a gördülő görbe normálisainak távolsága a pólustól is állandó.] S. G.

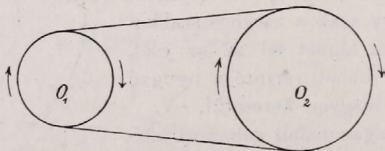
32. Az alapgörbe egy a sugarú kör; a ruletta pedig e kört A pontban érintő egyenes; bizonyíttassék be, hogy a gördülő görbe differenciálegyenlete polárkoordinátákban:

$$d\theta = \frac{(a-r) dr}{r\sqrt{2ar-r^2}}.$$

A görbének asymptotás pólusa van; az általa leírt ruletta az A -tól számított $+a$ és $-a$ távolságokig terjed. S. G.

201. §. *Feladatok kinematikai lánczokra (tagozatokra) és mechanikusokra.*

33. Középpontjaik körül forgatható két kör (kerék) egymással hajlítható, de nyújthatatlan zsinór vagy láncz segítségével van egybekapcsolva és vele együtt kinematikai lánczot alkot (169. ábra). Bizonyíttassék be, hogy a szögsebességnek a sugárral való szorzata mindegyik körre nézve ugyanaz. V.



169. ábra.

34. A köralakú excenter oly esetekben szolgál a körmozgásnak egyenessé való átalakítására, mikor a körmozgás sugara kicsiny. Legyen (170. ábra) O a körmozgás álló tengelye, melyre a C középpontú excenteres korong van erősítve. E korongot körülveszi a gg fémgűrű, melyen belül a korong siklik; ennek D_1 és D_2 pontjai merev rudakkal (vezényrudakkal) állanak kapcsolatban az AB rúd B pontjával, mely AB rúd mindig az ABO egyenes mentén tartozik maradni. Bizonyíttassék be, hogy az AB mozgása teljesen megegyezik oly mozgással, mely keletkezik, ha a B a C -vel volna merev rúddal egybekapcsolva és az OC mint forgatvány forogna O körül [v. ö. a 199. §. 8. feladatát].

Vizsgáltassék meg ezen esetben a D_1 és D_2 pontok mozgása; határozottassék meg továbbá a gg fémgűrű tetszőleges pontjának pályája. V.

34a. Valamely szilárd pontja körül síkban forogható rúd (emelő) egyik sima végével egy forgó köralakú excenter sima területére ráfek-

szik; vizsgáltsák meg az érintkező pontok geometriai helye és az a törvény, mely szerint az emelő iránya az időben változik. V.

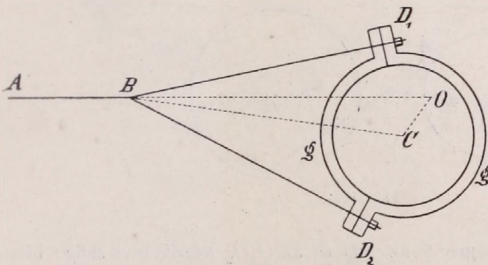
35. Fejeztessék ki a 199. §. 8. feladatában a rendszer tetszőleges D pontjának sebessége az A pont ω_a szögsebessége és a D koordinátái által. Legyen O az A pont által leírt kör középpontja (100a és 100b ábrák); téve $OA:AB=a:l=\kappa$, és $(AOB) \angle = \eta = \frac{1}{2}\pi - \vartheta$, bizonyítsák be, hogy a B végpont sebessége:

$$v_B = a\omega_a \left\{ \sin \eta + \kappa \frac{\sin \eta \cos \eta}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \eta}} \right\};$$

továbbá, hogy állandó ω_a szögsebesség mellett a B középsebessége egy körülfordulás közben:

$$\bar{v} = \frac{2}{\pi} a\omega_a,$$

mely az $a:l=\kappa$ viszonytól független. Sch.



170. ábra.

35a. Az alacsony nyomású gőzgépeknél a gőzhenger dugattyú-rúdja a balanciert (117. ábra, 292. l.) O_2 tengelye körül véges amplitudójú oscilláló mozgásban tartja; a balancier másik G vége egy GH tag (hajtórúd) közvetítésével az O_3H forgattyút O_3 körül körben mozgatja (117. ábra). Az O_2 és O_3 pontok szilárdak lévén, vizsgáltsák meg a GH mozgása. Közelebbről pedig állapítsák meg a különbség a GH mozgásában mely abból származik, hogy a G pont nem mozog az O_3 -ön átmenő egyenes mentén (mint a B pont a 147. §. 2. példájában), hanem egy O_2 középpontú íven, melynek G_1G_2 húrja folytatása az O_3 -an megyen keresztül. Részleteztessék e különbség, ha O_2G amplitudója kicsiny. V.

36. Két egyenlő a sugarú kör egymást derékszög alatt metszi; egy AB egyenes, melynek hossza a O_1 és O_2 két középpont egymástól való távolságával egyenlő, úgy mozog, hogy egyik végpontja az egyik, másik végpontja a másik kör kerületén marad. Bizonyítsák be, hogy az AB középpontja e mozgás közben BERNOULLI-féle lemniscátát ír le, melynek gyűpontjai a körök középpontjai (Math. repertórium 65. §. A. 7. formulák); továbbá, hogy a momentán centrumok görbéje oly egyen-

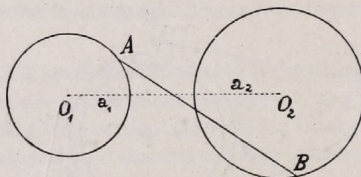
oldali hyperbola, melynek gyúpontjai szintén O_1 és O_2 [v. ö. a 38. feladat utolsó pontját]. V.

37. Valamely változatlan hosszúságú AB egyenes végpontjai két különböző sugarú, tetszőleges fekvésű körön maradnak (171. ábra). Jeleljék l az AB hosszát a_1 és a_2 a körök sugarait, $2a$ a körök O_1 és O_2 középpontjainak egymástól való távlat, ε a mindenkor momentán centrumhoz az O_1 és O_2 -ből húzott r_1 és r_2 vezérsugarak által bezárt szöget, akkor

$$4a^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \varepsilon, \\ l^2 = (r_1 - a_1)^2 + (r_2 - a_2)^2 - 2(r_1 - a_1)(r_2 - a_2) \cos \varepsilon;$$

a $\cos \varepsilon$ eliminációja adja a momentán centrumok görbéjét a bipolár r_1 és r_2 koordinátákban. V.

38. Legyen a megelőző feladatban O_1 a szilárd XY koordináta-rendszer kezdőpontja, és O_1O_2 a pozitív X tengely, míg az AB középpontja a sík pontrendszerrel mozgó X, Y , tengelyrendszer kezdete és az AB a pozitív X , tengely, továbbá α_1 és $\pi - \alpha_2$ az r_1 és r_2 által az O_1O_2 pozitív irá-



171. ábra.

nyával képezett szögek, végre ϑ az AB és az O_1O_2 között lévő szög; bizonyítsuk be, hogy akkor a mozgó koordináta-rendszerben x, y , összerendező pontnak rulettájára nézve a következő négy egyenlet áll fenn:

$$\left. \begin{aligned} x &= a_1 \cos \alpha_1 + \left(\frac{1}{2}l + x\right) \cos \vartheta - y, \sin \vartheta, \\ y &= a_1 \sin \alpha_1 + y, \cos \vartheta + \left(\frac{1}{2}l + x\right) \sin \vartheta, \\ a &= r_1 \cos \alpha_1 + r_2 \cos \alpha_2 + l \cos \vartheta, \\ 0 &= r_1 \sin \alpha_1 - r_2 \sin \alpha_2 + l \sin \vartheta. \end{aligned} \right\}$$

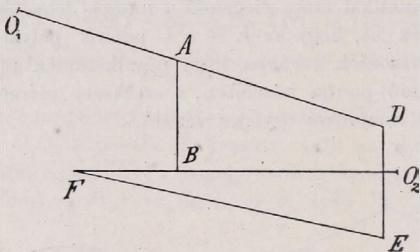
Az $\alpha_1, \alpha_2, \vartheta$ eliminációja megadja az x, y , pont rulettájának egyenletét r_1 - és r_2 -ben. Jellemeztessék a görbe általánosságban és bizonyítsuk be, hogy az AB egyenes (vagy folytatása) pontjainak rulettái hurkot képező, az O_1O_2 -höz szimmetrikus görbék, melyek kettős pontjai az O_1O_2 -ön fekszenek. Vége igazolassuk, ha a két kör egymást derékszög alatt metszi és $AB = O_1O_2$, hogy az AB középpontja számára a ruletta CASSINI-féle lemniscáta [Math. repertórium 65. §. A. 8. formulái]. V.

39. WATT egyenesben vezetője. Általános eset. A megelőző feladat feltevélei álljanak fenn; az O_1A, AB, BO_2, O_1O_2 tagok egy négytagú kinematikai lánczot alkotnak (172. ábra), O_1O_2 lévén a szilárd tag; a mechanizmus helyzete és mozgás-állapota egy tagjának helyzetéből és mozgás-állapotából meg van határozva.

egyenes vonalú (melyhez a gőzhenger dugattyúrúdjának vége kapcsolható). Ha $O_1D=l$, akkor a tagok méretei:

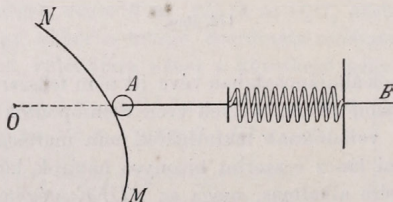
$$O_2F=EF=\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)l; \quad AD=O_2B=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)l; \quad AB=DE.$$

A középhelyzetben FE egybeesik FO_2 -vel és párhuzamos az O_1D akkori helyzetéhez; de mozgás közben sem ezen utóbbi két tag, sem az AB és DE tagok nem maradnak párhuzamosak egymáshoz.



173. ábra.

Vizsgáltassék meg az E pont mozgása e középhelyzet közelében és bizonyítsassék be, hogy az E mozgása az egyenes vonaltól sokszorta kisebb mértékben tér el, mint ugyanazon adott mozgás-paramétereknél a WATT-féle parallelogramm E pontjáé (154. §.). V.



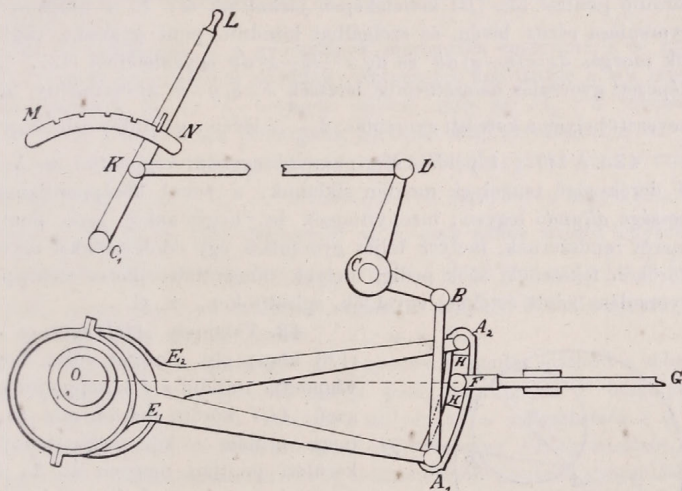
174. ábra.

40. Forgó mozgást tetszőlegestörvényű egyenesvonalú mozgássá alakíthatni, ha egy csak saját hossza mentén mozogható AB rúd egyik A végpontja egy forgó, tetszőleges alakú MN merev görbével (hengeres felülettel) tartozik érintkezésben maradni (174. ábra), mit a BA mentén ható rugó és az A -ban lévő kis csiga segítségével érhetni el. Fejeztessék ki az egyenes mozgás törvénye az MN görbe alakjából és az O körüli forgás szabályából. Számítsassék néhány egyszerű eset. V.

40a. STEPHENSON culissája (vezérlőműve).

A gőzgépek vezér-műveinek egy része arra szolgál, hogy a gőznek

a hengerbe nyomulását közvetítő tolóka mozgását bizonyos határok között tetszés szerint változtassa és ez által a gőznek eloszlását szabályozza. STEPHENSON vezér-műveinek gőzmozdonyoknál alkalmazott szerkezete lényegében véve a következő: Egy közös O tengelyű henger (175. ábra) két egyenlő, párhuzamos síkú, de egymással tetszőleges szöget képező excentert visz, melyek mindegyike E_1A_1 illetve E_2A_2 vezér-rudakat mozgat; ez utóbbiak A_1 és A_2 végpontjai az A_1A_2 kettős körívalakú culissához forgathatólag vannak erősítve. E körívek mentén a HH fémdarab siklik, mely az FG tolóka-rúd F végpontjához forgathatólag van erősítve; az FG csak saját hossza mentén mozoghat.



175. ábra.

Az A_1 -hoz forgathatólag az A_1B rúd van erősítve, mely a szilárd C körül forogható BCD könyökemelőtüvel áll kapcsolatban. Végre a DK rúd a szilárd O_1 körül mozogható O_1L emelőtüvel van egybekapcsolva, mely utóbbi a mély bevágásokkal ellátott MN fémes körív közvetítésével mindig szilárdan beállítható, és ezzel az A_1A_2 culissa tetszés szerint felemelhető vagy süllyeszthető.

Ha az LK emelőtü be van állítva, akkor a kinematikai láncznak $KDCB$ része mozdulatlan, míg az A_1 csak a most szilárd B körül körben mozoghat; ezzel valamenynyí mozogható kinematikai tag mozgása már meg van határozva.

Bizonyíttassék be PHILIPPS következő tétele: Az E_1A_1 és E_2A_2 rudak tengelyei folytatásának S metszőpontja, az O szilárd középpont és az A_1A_2 culissa I momentán centruma mindig egy egyenesen fekszenek.

Vizsgáltassék meg az FG rúd mozgása. V.

[Erre nézve a 171. §. (2) formuláiban:

$$x'' = (\eta - y) \vartheta'' + (\xi - x) \vartheta'^2 + \eta' \vartheta'; \quad y'' = -(\xi - x) \vartheta'' + (\eta - y) \vartheta'^2 - \xi' \vartheta',$$

tétessék $x = \xi$, $y = \eta$, és vétessenek tekintetbe a forgás momentán centrumának ξ' és η' sebességi összetevői; így nyerjük azt, hogy a keresett gyorsulás a rulettához tangenciális, a gördülő görbe görbületi középpontja felé van irányítva és $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{P}\right)$ értékű, hol $\frac{ds}{dt} = c$ az I érintkező pont sebessége az alapgörbén, ϱ a gördülő, P az alapgörbe görbületi sugara.] V.

45a. Bizonyítsák be, hogy a rendszer síkbeli mozgásánál azok a pontok, melyek sebességeinek irányai egy pontban találkoznak, körön fekszenek. V.

46. A sebességek és a gyorsulások momentán centruma I és I_2 a 171. §. (1) és (2) egyenleteiből adódnak; milyenek kell lennie a sík rendszer mozgásának, ha az I_2 helyzete szilárd, míg az $\overline{II}_2 = a$ távolság állandó? [Itt a momentán centrumok görbéje, azaz az alapgörbe az I_2 középpontú, a sugarú kör; ezenkívül a 182. §. (1a) formulája szerint mivel itt $P = a$, $\frac{\omega}{c} = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{a}$; továbbá, a 170. §. (3) és (4), vagy a 171. §. (4) vagy a 172. §. (2) formulái szerint az I_2 csak akkor szilárd helyzetű, ha ω szögsebesség állandó és itt $\omega = \frac{c}{a}$ értékű; ebből ered $\varrho = -\frac{1}{2}a$ és így a gördülő görbe oly kör, melynek sugara az alapkör felével egyenlő és mely az alap belső oldalán gördül.] Vi. és S. G.

47. Valamely l hosszúságú AB egyenes A pontja állandó v sebességgel mozog az X tengelyen, B pontja pedig mindig az Y tengelyen tartozik maradni (147. §. 1. példája); milyen az ω szögsebesség a ξ , η összerendezőjú momentán centrum körül és mekkora az AB egyenesben, de középpontjától p távolságban fekvő, x , y összerendezőjú pontnak gyorsulása?

$$\left[\text{Eredmény: } \omega = \frac{v}{\sqrt{l^2 - v^2 t^2}}; \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = 0; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{l \left(\frac{1}{2}l + p\right) v^2}{(l^2 - v^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} \right]. \quad \text{Vi.}$$

48. Kerestessék a 199. §. 8. feladatában a gyorsulások momentán centruma 1) ha OA forgása az O körül egyenletes; 2) ha B mozgása az Y tengelyen egyenletes. A.

203. §. *Feladatok az alapgörbe, a gördülő görbe és a ruletták görbületi viszonyaira.*

49. Bizonyítsák be, hogy a 199. §. 1. feladatában mozgó egyenes vonal pontjai pályaelemeinek görbületi középpontjai minden időpillanatban oly kúpszeleten fekszenek, mely a momentán centrumok görbéjét érinti; e kúpszelet ellipszis, parabola vagy hyperbola a szerint, a mint az egyenes az inflexiós körön kívül esik, ezt érinti vagy ezt metszi. V.

50. A 147. §. 1. példájában (99. ábra) tárgyalt AB vonal tetszőleges D pontja ellipszist ír le; bizonyítsák be, hogy ezen görbe görbületi középpontja még következőleg található: Az I momentán centrumot a

D ponttal egybekapcsoló egyenes folytatása E -ben metszi az Y tengelyt; e pontban emeltessék DE egyenesre EF merőleges, hol F a merőlegesnek a DO -val való metszópontja; ezen F -ből húzzunk az X tengelyhez párhuzamosat, míg az G pontban metszi az DE vonal folytatását. Ha még H az O -ból az EI folytatására emelt merőleges talppontja, akkor G pontra nézve áll:

$$\overline{ID}^2 = \overline{DG} \cdot \overline{DH}.$$

Milyen ezen és a módosított EULER-SAVARY-féle eljárás (185. §. B , 2.) összefüggése? V.

50a. Szerkesztessék a 202. §. 38. feladatának lemniscatájára nézve az EULER-SAVARY-féle eljárással (183, 184. §§.) a görbületi középpont; továbbá bizonyítsák be, hogy (171. ábra) az O_1A egyenesnek ω_1 - és az O_2B -nek ω_2 szögsebessége egymáshoz $\omega_1 : \omega_2 = -1 : \{3 - 2\sqrt{2} \cos(\angle O_1O_2)\}$ viszonyban állanak; végre keressék az $\omega_1 = \text{constans}$ esetben a gyorsulások momentán centruma. V.

51. Valamely parabola egyenes vonalon gördül (152. §. 2.), I a momentán centrum, F a parabola gőczpontja; bizonyítsák be, hogy egőczpont rulettájának görbületi sugara az IF sugárral egyenlő, de I -től számítva ellentett irányú, mint IF , és hogy ez a *lánzgörbe* jellemző sajátága. V.

52. A (200. §. 18. feladatának megfelelőleg az egybevágó és szimmetrikus parabolák egyike alap-, a másika gördülő görbének tekinthető. Szerkesztessék az alap-parabola görbületi középpontja azon bebizonyított tételek alapján (170. és 171. §§.), hogy az inflexiós kör egyik pontja a közös érintkező pont I ; az ezen átmenő átmérő másik végpontja, az S pont pedig ezen érintkező pontban a közös érintőre emelt normálison, az IY tengelyen az I -től L távolnyira (181. §.) fekszik. Bizonyítsák be, hogy a görbületi sugár az inflexiós kör ezen átmérőjével ellentett fekvésű és kétszeresen oly hosszú. V.

52a. Valamely síkbeli alak úgy mozog, hogy a vele egybekapcsolt szög szárainak egyike mindig érintője legyen egy logaritmikus spirálisnak, míg a másik szár mindig keresztül megyen a spirális kezdőpontján. Bizonyítsák be, hogy a momentán centrumok helye a mozgó alakban az adottal egyenlő spirális, a térben pedig egy egyenes; végre hogy az inflexiós kör sugara minden helyzetre nézve $\rho = r \cotg^2 \vartheta$, ha $r = ae^\vartheta$ a spirális egyenlete. (V. ö. a 153. §. 1. példáját). S. G.

53. A *conchois*-t létesítő síkbeli mozgás ismeretes lévén (107. §., 70. ábra és a 199. §. 7., a 200. §. 12., 13. feladatai) ennek gördülő mozgásra való visszavezetése után szerkesztessék meg a *conchois*nak, mint rulettának görbületi középpontja és bizonyítsák be, hogy valamenynyi, az OA egyenesen fekvő pont rulettái (valamenynyi *conchois*) inflexiós pontjai egy félkörös parabolán fekszenek, melynek egyenlete $x^3 = 2ay^2$, hol a az O szilárd pontnak ON távolsága a szilárd BN egyenestől. Vi.

54. Szerkesztessék a 200. §. 18. feladatabeli *strophois* görbületi középpontja az EULER-SAVARY-féle eljárás segélyével (183, 184. §§.) és bizonyítsák be, hogy a PB oldal középpontja *cissoist* ír le [melynek egyenlete $x^3 = y^2(a-x)$], keressék ennek is a görbületi középpontja. Vi. és S. G.

204. §. *Feladatok mozgó sík görbék envelope-jaira és zárt ruletták területeire.*

55. Bizonyítsassék be, hogy az 199. §. 2. vagy a 200. §. 11. feladatának feltételei szerint mozgó merev rendszer bármely egyenesének envelope-ja az

$$\begin{aligned}x &= a \cos^3 \eta + b \sin \eta \\ y &= a \sin^3 \eta + b \cos \eta,\end{aligned}$$

egyenleteknek felel meg, hol x, y a beburkoló bármely pontjának koordinátái, a a gördülő kör sugara, b tekintetbe vett egyenes távolsága a gördülő kör középpontjától, végre η az egyenes és az X tengely között lévő szög. V.

56. A 200. §. 17. feladatában bizonyítsassék be, hogy (164. ábra) az AB egyenes C metszéspontjainak helye (beburkolója) oly parabola, melynek tengelye az O szöget felezi és melynek góczhúrja $\frac{1}{2} \overline{PQ}$: \overline{OR} , R lévén a PQ középpontja. Vizsgáltsassék továbbá a rendszer bármely egyenesének envelope-ja. V.

56a. Bizonyítsassék be, hogy a 200. §. 18. feladatában a mozgó parabola tengelyének beburkolója az

$$x = \frac{1}{2} p \cotg^2 u - 2p \cos^2 u; \quad y = 2p \cotg u \cos^2 u$$

egyenletek által képviselt görbe, hol u a gördülés szöge. V.

56b. A 200. §. 18b és 18c. feladataiban az F_1 és F_2 gyúpontok rulettái körök, alkalmaztsassék a 187. §. tétele az inflexiós körnek és a többi ruletták görbületének meghatározására. (V. ö. a 187. §. végén említett feladatot). V.

57. Bizonyítsassék be, hogy a midőn egy merev háromszög két oldala két kört folytonosan érinti, a harmadik oldalnak beburkolója szintén kör (BOBILLIER tétele), továbbá, hogy e két oldal csúcsa PASCAL-féle csigavonalat ír le (200. §. 28. feladata). V.

58. Bizonyítsassék be, hogy valamely álló körön gördülő más körrel mereven egybekapcsolt egyenes beburkolója nem egyéb, mint a származó epicyclois lefejtője. S. G.

59. A 200. §. 22. feladatában az ellipsis directrixének (a tengelyre merőleges, a középponttól $a\varepsilon^{-1}$ távolságban lévő egyenesnek) envelope-ja a momentán centrumból reá bocsátott merőleges talppontjának geometriai helye. Ha β a directrix és az X tengely által bezárt szög, továbbá ξ és η az envelope koordinátái, akkor:

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{1}{\varepsilon} a \cos \beta + \frac{a^2 \cos^2 \beta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \beta + b^2 \sin^2 \beta}}; \\ d\xi &= d\eta \cotg \beta.\end{aligned}$$

Értelmeztsessék e görbe; bizonyítsassék be, hogy szögpontja is van, melyhez tartozó β_0 szögre és a kezdettől számított s_0 ívére nézve áll:

$$s_0 = \frac{a(1-\varepsilon^2) \sin \beta_0}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 \beta_0}} - \frac{a}{\varepsilon} [2\pi - \beta_0 - \arcsin(\varepsilon \sin \beta_0)]. \quad \text{S. G.}$$

60. Valamely sík rendszer egy körrel van merev kapcsolatban mely egy másik vele egyenlő, a sugarú körön gördül; a rendszer minden pontja egy teljes gördülés közben zárt görbét ír le. Mily görbén fekszenek a mozgó sík azon pontjai, melyek rulettái egyenlő F területtel bírnak? Eredmény: a keresett görbe a gördülővel közös középpontú $\left\{ \frac{F}{2\pi} - 2a^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$ sugarú kör. Vi.

61. A megelőző feladatban a gördülő kör kerületi pontjai *cardioid*okat írnak le; mekkora egy ily *cardioid*s területe? V.

62. Mekkora területet zár be az *astrois* négy ága? [v. ö. a 152. § 3. pontját és az 110b. ábrát.] V.

63. Vizsgáltassék meg az *epi*-, *peri*-, és *hypocyclois*ok területe általánosságban (152. §.) és különösen azon esetekben, midőn a körök sugarai az 1:2 vagy a 2:1 viszonyban állanak. V.

64. Terjesztessék ki a megelőző vizsgálat az *epi*-, *peri*-, és *hypotrochois*okra (151. §.) és mutattassék ki a fellépő hurkok befolyása a zárt terület nagyságára. V.

65. Mily területtel bírnak a gördülő görbe kerületi pontjainak rulettái, ha az alap- és a gördülő görbe egyenlő két ellipsis? Vagy, ha az alapgörbe ellipsis, a gördülő görbe vele egyenlő kerületű kör (illetve megfordítva)? A.

205. §. *Feladatok síkbeli relativ mozgásokra, síkló mozgásokra és kerekék fogazására.*

66. Két síkbeli rendszer ω_1 és ω_2 szögsebességgel forog O_1 és O_2 tengelyek körül, melyek egymástól való távolsága a legyen; keressessék 1. az első rendszernek a másikkal viszonyított relativ mozgásának momentán centruma és szögsebessége; 2. a második rendszernek az elsőhöz viszonyított relativ mozgásának momentán centruma és szögsebessége, 3. vezettessék vissza állandó ω_1 és ω_2 esetében ez a mozgás gördülésre és határozatassék meg az alap- és a gördülő görbe.

[Ha az ω_1 és ω_2 előjele egyenlő, az eredmények a következők: 1. a relativ szögsebesség $\omega_1 - \omega_2$ és a momentán tengely távolságai O_1 -től és O_2 -től oly viszonyban vannak, mint $\omega_2 : \omega_1$. 2. A relativ szögsebesség $\omega_2 - \omega_1$, a momentán tengely távolsái O_1 -től és O_2 -től oly viszonyban vannak, mint $\omega_1 : \omega_2$. 3. Az alap- és a gördülő görbe körök, melyek sugarai $a\omega_2 : (\omega_1 - \omega_2)$ és $a\omega_1 : (\omega_1 - \omega_2)$.

Ha az ω_2 előjele ellentett, a kifejezésekben is változtatandó ω_2 előjele. V.

67. Valamely pont állandó v sebességgel halad körben; mily sebességgel kell a kört valamely álmérője körül forgatni, hogy a pontnak abszolút sebessége a térben $2v$ legyen?

Milyen az abszolút mozgás pályája?

A pont loxodromát ír le. [Math. repertórium 76. §-ának 4. formulája.] V.

68. Valamely pont egy AB egyenesen állandó v sebességgel halad; egy észlelő az AB -n merőleges és ezen egyenes körül ω szögsebességgel egyenletesen forgó egyenesen megfigyeli a pontot; milyen ennek relativ mozgása az észlelőhöz képest? Milyen a relativ mozgás, ha v , vagy ω , vagy mindkettő nem egyenletes? V.

69. A átkelő görbe problémájánál [105. §.] vegyük fel, hogy a mozgó hajóval egy sík van változatlan kapcsolatban; a sík azon egyenes, mely a hajó hosszszírányával esik egybe, mindig az elérendő part egy szilárd B pontja felé van irányítva; határoztassék meg a hajó sebességi és gyorsulási momentán centruma és a B pontnak e síkhoz viszonyított relativ mozgása. A.

70. Az üldöző és futó görbénél [104. §.], vegyük fel, hogy az üldöző hajóval egy sík változatlan kapcsolatban van; a síknak a hajó hosszszírányával egybeeső egyenes mindig az üldözött B pont felé van fordítva; határoztassék meg a hajó sebességi és gyorsulási momentán centruma és a B -nek ezen síkhoz viszonyított relativ mozgása. A.

71. Valamely folyónak egymással szemközt fekvő két A és B pontjából egyidejűleg indul el két hajó; az egyik B -t, a másik A -t törekszik elérni; állandó sebességeik u_1 és u_2 legyenek.

Mindegyik hajó az AB vonal egyik oldalán fekvő egy-egy átkelő görbét fog leírni. Vizsgáltassék meg 1. A pontoknak tekintett két hajónak egymáshoz viszonyított relativ mozgása. 2. A síkrendszereknek tekintett hajófedélzetek egymáshoz viszonyított relativ mozgása és ennek részletesebb tulajdonságai (a pontok relativ pályái s i. t.). A.

72. Valamely sík görbén, mely szilárd O pont körül saját síkjában forog, akként mozog egy A pont, hogy a pont mindenkor helyzetében a görbéhez húzott érintő mindig párhuzamos maradjon az OX tengelyhez. Bizonyítottassék be, hogy a pontnak abszolút sebessége egyenlő a görbéhez viszonyított azon relativ sebességével, melylyel az O kezdőpontnak, a mozgó pont mindenkor helyzetében a görbéhez húzott normálisra való vetülete bír.

Eredmény: ha ρ a görbe görbületi sugara A -ban, a relativ sebesség:

$$v^2 = \omega^2 [\rho^2 + \overline{OA}^2 - 2\rho \cdot \overline{OA} \cos(\overline{AO}, \rho)]. \quad \text{S. G.}$$

73. Valamely kör egy másik körön gördülve siklik, de úgy, hogy a sikló mozgás sebessége (192. §.) a közös érintkező pontnak az alapgörbén való haladó sebessége egy állandó hányadrészt teszi ki. Milyenek a származó ruletták, ha 1. a gördülő kör az alapkör külső kerületén gördül; 2. a gördülő kör a nagyobb sugarú alapkör belső kerületén gördül; 3. a nagyobb sugarú gördülő kör, a kisebb sugarú alapkör külső kerületén gördül. A.

74. Vizsgáltassék meg részletesen a megelőző feladat azon esete, mikor az alapkör átmegegyen egyenes vonalba, és vezettetessék vissza ez a mozgás tiszta gördülésre; határoztassék meg az alap- és a gördülő görbe. A.

75. Vizsgáltassanak meg a 73. feladat mozgásai közben a gördülő kör

kerületi pontjai által leírt görbék és mutattassék ki az, miben térnek ezek el a közönséges cycloisoktól (149., 150., 152. §§.). A.

76. Két fogazott kerék egyikének fogai epicycloidális profillal bírnak, a másikéi csak egyeneslapúak, mint a 196. §. és a 157. ábra azt előtűnteti; de az első kerék fogai az epicycloisok szimmetrikus két negyedéből legyenek összetéve; fejeztessék ki a kétféle fog profiljeinek egymáshoz viszonyított sikló mozgása, mint az idő függvénye, ha a forgás egyenletes. V.

77. A fogak szerkezete epicycloidális legyen, a mint azt az 197. §. és a 160. ábra előtűnteti.

Vizsgáltsák meg ebben az esetben is a sikló mozgása a két profilnek, mint az idő függvénye, és pedig nem csak, ha a vezető fog domborúlata érintkezik a vezetettnek homorúlatával, hanem a megfordított esetben is. V.

78. Bizonyítsák be, hogy a belső fogazásnál (197. §. III. jegyzete, 161. ábra), ugyanazok a tételek érvényesek, mint a külső fogazásnál [196., 197. §§.], különösen a sikló mozgásra nézve; szerkesztessék ezen esetben is az a két fogprofil, melyek egyike itt hypocyclois, másik egyenes lapú; fejeztessék egyenletes forgás esetében a sikló mozgás sebessége, mint az idő függvénye. V.

79. A fogak profiljei kör-evolvensek [198. §, 163. ábra], a forgás egyenletes, milyen a két profilnek sikló mozgása? V.

80. A fogazás *belső* legyen; bizonyítsák be, hogy a kör-evolvenszerű profilek ezen esetben is szerkeszthetők; fejeztessék ki itt is, egyenletes forgásnál a sikló mozgás és határoztsassék meg a relatív mozgás alapján az egyik és a másik evolvens görbületi középpontja. V.

81. Az egyik fogazott kerék kerületén egyenlő távolságú pálczák legyenek a tengelyhez párhuzamosan erősítve, közöttük pedig hézagok legyenek. Ha a pálczák keresztmetszete elhanyagolhatóan csekély, akkor bizonyítsák be, hogy a másik kerék fogainak profiljei oly epicycloisok, melyek keletkeznek, ha a másik kerék primitív kerületén az elsőnek primitív kerülete gördül (csillagkerék). Milyen a sikló mozgás? V.

82. Ha a megelőző feladatban a hengeres pálczák keresztmetszeteit végeseknek tekintjük, tengelyeiket pedig az első kerék primitív kerületén egyenlő közökben lévőeknek, akkor bizonyítsák be, hogy a második kerék fogainak profiljei azok a görbék, melyek a megelőző feladat epicycloiseiból származnak, ha normálisainak, talppontjaiktól egyenlő (a pálczák sugárával egyenlő) távolságban lévő pontjaikat egybekapcsoljuk. Ejtessék meg a szerkesztés és határoztsassék meg a relatív mozgás. V.

83. Bizonyítsák be, ha a 201. §. 40. általános feladatában (174. ábra) az AB -nek sebességét állandónak kívánjuk, hogy akkor az MN közönséges,

$r = \frac{a}{2\pi}$ ϑ egyenletű ARCHIMEDES-féle spirális. A korong profilje rendszeren két szimmetrikus, szívalakú görbét alkotó spirálisrészből áll. Milyen itt a sikló mozgás? V.

84. Vizsgáltsák meg a megelőző feladatban említett profil alakja, ha az AB egyenes mozgása 1. egyenletesen gyorsuló; 2. egyszerű (rezgősszerű) harmonikus mozgás. Terjesztessék ki e vizsgálat bármily, a 90—100. §§-okban és a 101. §. feladataiban felemlített egyenes vonalú mozgásra. V.

85. Fejeztessék ki a 201. §. 40. és ezen §. 83, 84. feladataiban körvonalozott mozgásokra nézve a különbség, mely abból keletkezik, hogy a szilárd O pont (174. ábra) nem esik az AB vonal folytatásába. A.

B. MEREV RENDSZEREK GÖMBI (SPHÄRIKUS, SZILÁRD PONT KÖRÜLI)
MOZGÁSA.

A gömbi mozgásról általánosságban.

206. §. *A gömbi mozgás jellemző feltétele. E mozgás visszavezetése két pont mozgására.*

Ha a merev rendszer egyik pontja változatlan (szilárd) helyzetű, akkor a rendszer minden pontja csak oly gömbfelületen mozoghat, melynek állandó sugara e pontnak a szilárd ponttól való távolságával egyenlő, míg középpontja e szilárd ponttal egybeesik (132. §. 2. pontja).

Írjunk le a szilárd pont körül (mint középpont körül) tetszőleges sugárral gömbfelületet, melyet álló geometriai alaknak tekintünk.

Ezen felület a merev rendszert metszi, és a metszés által a gömbfelületen bizonyos geometriai alak lesz meghatározva, mely, mivel a merev rendszerrel változatlan kapcsolatban van, a saját helyzete által a rendszer helyzetét is meghatározza.

Ámde, magának ezen gömbfelületi alaknak e felületen való helyzetét két pontjának helyzete adja meg; e szerint, a helyett, hogy az egész rendszer mozgását vizsgálónk, elegendő, ha a szilárd ponttól egyenlő távolban lévő két pontjának mozgását tárgyaljuk.

(E célra egyébként tetszőleges, nem egy sugáron fekvő két pont is alkalmas, melynek egybekapcsoló vonala nem megyen a szilárd ponton keresztül; de a tárgyalás ekkor bonyolódottabb).

1. A gömbi elmozdulás és mozgás geometriai tárgyalása.

[*Véges és elemi forgások. Momentán pólusok görbéi. Kúpok gördülése. Gömbi ruletták.*]

207. §. *A gömbi mozgás helyettesíthető a szilárd ponton átmenő tengely körüli forgás által. A pólus. A forgás jellemzői.*

Itt mindennek előtt megjegyezzük, hogy a sík és gömbi mozgás egymáshoz való viszonya legjobban az által jellemeztetik, hogy a mi az előbbinél a mozgás síkjában egyenes vonal s e síkra merőleges forgási tengely, az az utóbbinál a gömb legnagyobb körének és a gömb középpontján átmenő tengelynek fog bebizonyulni.

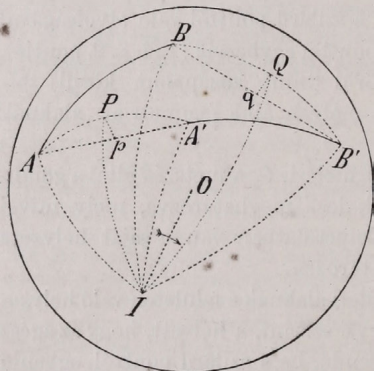
E §.-ban oly tételt származtatunk, mely analog a síkbeli mozgás azon tételével, hogy a rendszernek minden síkbeli elmozdulása *forgás* által helyettesíthető (135. §.).

Jeleljék (177. ábra) AB a kiválasztott két pont eredeti helyzetét, $A'B'$ a helyzetet az elmozdulás után.

Fektessük az A és A' valamint az B és B' pontokon keresztül az AA' és BB' egyeneseket (húrokat). Ezek az A és B pont elmozdulásait képviselik és általánosságban itt csak azon feltételnek vannak alávetve, hogy az O szilárd ponttól való távolságok, $AO, A'O; BO, B'O$ ugyanazon értékűek.

Felezzük ezen elmozdulásokat, legyen p és q a két felező pont.

Fektessünk az O és p valamint az O és q pontokon keresztül, merőlegesen az AA' , illetve BB' egyenesre *síkokat*; ezek a gömbfelületet az IP és IQ legnagyobb körökben, egymást pedig az OI egyenesben metszik.



177. ábra.

Fektessünk most az I ponton és az A, A', B, B' négy ponton keresztül az $AB, A'B', IA, IB, IA', IB'$ legnagyobb köríveket; a szerkesztés symmetriájánál fogva következnek:

$AI \text{ ív} = A'I \text{ ív}, BI \text{ ív} = B'I \text{ ív}$, és mivel az A és B pontok a *merev* rendszerhez tartoznak:
 $AB \text{ ív} = A'B' \text{ ív}.$

Következik, hogy az AIB gömbháromszög összevágó az $A'IB'$ gömbháromszöggel és hogy az előbbi az OI tengely körül AIA' szöggel forgatva, az utóbbi helyzetébe hozhatjuk.

Tekintve, hogy az AB elmozdulása az egész merev rendszer elmozdulását adja meg (206. §.), a nyert eredményt következő tétellel fejezhetjük ki: *A merev rendszerek gömbi elmozdulása mindenkor létesíthető (helyettesíthető) oly forgás által, mely a szilárd ponton átmenő tengely körül történik.*

A *forgás jellemzői* (135. §. 1 pontja) itt is a *tengely helyzete* és a *forgás szöge*; az előbbi a rendszer tetszőlegesen választott A és B pontok AA' és BB' elmozdulásait derékszög alatt felező legnagyobb körsíkok OI metszése, az utóbbi ezen metszéspont s a rendszer tetszőleges A pontja eredeti és elmozdulása utáni helyzetén átfektetett két legnagyobb kör egymáshoz való hajlásszöge adja meg.

208. §. *Momentán (instantán) forgás. Jellemző elemei. A momentán (instantán) pólus.*

A gömbi mozgás további tárgyalásánál alkalmazhatjuk a rendszerek síkbeli mozgása vizsgálatánál használt geometriai megfontolásokat (135.—139. §§.)

Véges elmozdulásoknál az A és B pontok által *tényleg* leírt véges pályarészek általánosságban véve *véges* mennyiségekkel térnek el a forgásnak megfelelő APA' és BQB' párhuzamos körívektől, habár a kezdet- és a véghelyzetek egybeesnek.

De a nevezett különbség annál kisebb lesz, mennél kisebb az elmozdulás; és ha csak végtelen kicsiny (*elemi*) elmozdulás lép fel, a pontok által *tényleg* leírt útelemek csak másodrendű csekély mennyiségekben különbözhetnek a megfelelő párhuzamos körök ívelemeitől; e szerint, magasabbrendű kicsiny mennyiségek elhanyagolásával az *elemi elmozdulás létesítésénél tényleg végzett mozgás minden tekintetben helyettesíthető a megfelelő elemi forgás által*. Ezen forgás *momentán (instantán, pillanati) forgás* [D'ALEMBERT 1749; EULER 1750; POINSON 1834]; jellemző elemei *tengelyének fekvése és a forgás szöge*.

Azt az I pontot, melyben a momentán tengely a gömbfelületet metszi, a forgás *momentán (instantán) pólusának* nevezik, megfelelőleg a sík mozgás momentán centrumának (137. §.); benne összeesnek a pontok pályáinak normális legnagyobb körei.

Ha a momentán pólus adva van, a rendszer minden pontjának sebességi iránya is ismeretes, mivel ezek a sebességek a pontból a tengelyre bocsátott r merőlegessel és a tengellyel derékszöget képeznek.

Ha még ezenkívül *egy* pontnak *sebessége* adva van, akkor valamenynyi pont sebessége is adva van, mert a pontok *pillanati* sebességei egyenesen arányosak a tengelytől való távolsággal.

A *pillanati forgás* ω *szögsebessége*, a merev rendszer minden pontjára nézve ugyanaz; e szerint a pontok sebessége mindig egyenlő az ω szorzattal.

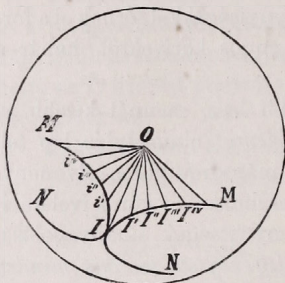
209. §. *Gömbi mozgás mint momentán forgások egymásutánja. A momentán (instantán) tengelyek kúpja. Első pólusgörbe. Közös csúcús két kúp gördülése egymáson. Második pólusgörbe.*

A merev rendszernek a szilárd pont körüli mozgása egészen tetszőleges lehet; de szabad ezt mindenkor egyes, elemi elmozdulások egymásutánjának tekinteni és minden egyes ily elemi elmozdulást az előbbi §. értelmében minden tekintetben bizonyos, meghatározott pillanati forgás által helyettesíteni.

Valamenynyi pillanati forgás tengelye átmegy a szilárd O

ponton; e szerint az egymásután következő forgások *tengelyei* egy *kúpon* fekszenek, melynek O a csúcsa. Ezt a kúpot a *pillanati forgások kúpjának* nevezik.

Ez a kúp a gömbfelületet egy általánosságban *tetszőleges* MN görbében metszi (178. ábra), melyet *első pólusgörbének* vagy *szilárd póluspályának* nevezünk.



178. ábra.

Tekintsük most az MNO kúpot állónak és vegyük fel, hogy a gömbfelület a merev rendszerrel szilárd kapcsolatban lévén, vele együtt végzi az O körüli mozgást.

Legyenek i, i', i'', \dots a gömbfelület azon pontjai, melyek mozgás közben rendre a szilárd MN görbének I, I', I'' pontjaival esnek egybe; akkor a OI, OI', OI'', \dots egyenesek a pillanati forgás tengelyei, melyekbe

rendre a rajzolt OI, Oi', Oi'', \dots egyenesek esnek.

E szerint a nevezett mozgás úgy tekinthető, mint az MN kerületű, O csúcsú kúpnak gördülése az MN kerületű és szintén O csúcsú kúpon. Az MN kerületet sokszor *második pólusgörbének* vagy *mozgó póluspályának* nevezik.

Evvel a merev rendszernek gömbi mozgása *viszsa van vezetve* közös csúcsú két kúpnak egymáson való gördülésére.

210. §. Gömbi ruletták. Gömbi cycloisok és developpansok. Azok problémájának fogalmazása.

1. A gömbi mozgást kúpoknak egymáson való gördülése gyanánt tekintvén, ezen gördülő mozgás részletes taglalására analog megfontolásokat alkalmazhatunk, mint a síkbeli gördülő mozgásnál (139—144. §§.). A gördülő kúppal egybekapcsolt merev gömbfelület minden pontja *gömbi rulettát* ír le, melynek alakja lényegesen a szilárd és a gördülő kúp alakjától, ezenkívül pedig a pontnak a gördülő kúphoz való *viszonylagos* helyzetétől függ. Ezen helyzetet két gömbi koordináta határozza meg, melyeket joggal az illető gömb. ruletta *paramétereinek* nevezhetni.

2. Ha az MN és az MN görbék *körök*, a gördülés közben keletkező ruletták *gömbi cycloisok*, melyek osztályozása valamint sajátosságai is teljes analógiát mutatnak a megfelelő sík cycloisok-éihez (149—151. §§.) (V. ö. a 220. §. tárgyalásait a präcessióról.)

Ha az MN tetszőleges, ellenben az MN legnagyobb kör, akkor a gördülő kúp síkba megyen át és az ekkor keletkező gömbi rulettákat *gömbi lefejtők-nek* (developpansoknak) nevezik.

3. Ha a két pólusgörbe (a pólusgörbék párja, a két póluspálya) ismeretes, az O pont körüli mozgás is ismeretes.

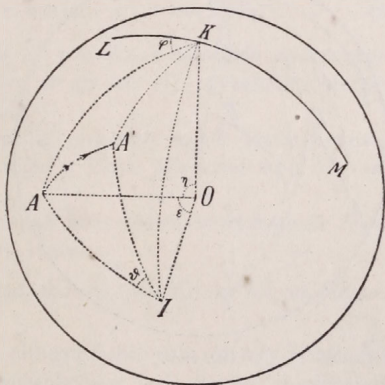
Ezért a pont körüli mozgás sokszor azon problémára leszen visszavezetve: adva van a mozgás néhány sajátsága, határozottassék meg belőlük a két pólusgörbe, vagy az alap- és a gördülő kúp.

2. Gömbi elmozdulások és sebességek analitikai kifejezése forgások által és megfordítva.

211. §. *Véges forgás létesítette elmozdulás analitikai kifejezése.*

Ha a forgás tengelye a rendszer valamely O szilárd pontján megyen keresztül, akkor célszerű e pontot azon gömbi koordináták kezdőpontja gyanánt választani, melyekkel az O körüli elmozdulásokat kifejezni akarjuk.

Legyen (179. ábra) OK a koordináták tengelye, melytől az η szögeket (geographiai szélességeket, a pólusmagasságot), továbbá LKM az ú. n. első meridián, melytől a φ szögeket (a geographiai hosszúságokat) számítjuk. Végre legyen OI a véges forgás tengelye; az I pólusnak gömbi koordinátái a és b ; a forgás szöge ϑ . Az A pont gömbi koordinátái (179. ábra), η és φ ; az IA ív $= \varepsilon$.



179. ábra.

Az A, K, I pontokon keresztül legnagyobb körök segítségével az AKI gömbi háromszöget szerkesztjük, melynek KA oldala $= \eta$, KI oldala $= b$, és az $(AKI) \sphericalangle$ gömbi szög $= a - \varphi$.

Ezen adatokból a háromszög többi része könnyen meghatározható.

Rövidség kedvéért legyen $(AIK) \sphericalangle = \psi$.

Az OI körüli ϑ szögű forgás után A helyzete A' és összszerendezői φ', η' ; az $A'KI$ gömbi háromszögben a megfelelő részek: KA' oldal $= \eta'$, KI oldal $= b$; az $(A'KI)$ gömbi szög $= a - \varphi'$ és a $(A'IK) \sphericalangle = \psi' = \psi - \vartheta$.

Ezen adatokkal az A új helyzetének, A' -nek φ' és η' koordinátáit fejezzük ki.

Ugyanis, az AKI gömbháromszögből:

$$\cos \varepsilon = \cos \eta \cos b + \sin \eta \sin b \cos (a - \varphi); \quad \sin \psi = \sin \eta \frac{\sin (a - \varphi)}{\sin \varepsilon} \quad (1)$$

Ez a két egyenlet megadja az ε és a ψ szögeket.

A forgás után az AKI háromszögből az $A'IK$ háromszög keletkezett, melyben $A'I$ ív $= AI$ ív $= \varepsilon$; továbbá KI ív $= b$, és $(A'IK) \sphericalangle = \psi' = \psi - \vartheta$.

E háromszögből a KA' oldal $= \eta'$ és az $(A'KI) \sphericalangle = a - \varphi'$ szög számára:

$$\cos \eta' = \cos \varepsilon \cos b + \sin \varepsilon \sin b \cos (\psi - \vartheta); \quad \sin (a - \varphi') = \sin \varepsilon \frac{\sin (\psi - \vartheta)}{\sin \eta'}. \quad (2)$$

Evvel a keresett η' és φ' koordináták az eredeti η és φ koordináták és a forgás a , b és ϑ jellemzői segítségével ki vannak fejezve.

212. §. *Gömbi véges elmozdulás analitikai helyettesítése forgás által.*

A megelőző § (1) és (2) egyenleteiben a φ és η az A pont eredeti, φ' és η' az elváltozott koordinátái.

Ha ezt a négy adatot ismertnek tekintjük, akkor az a kérdés

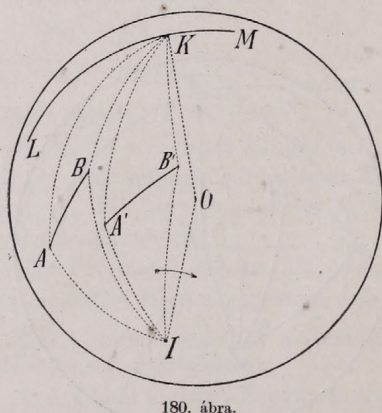
merül fel, miképen határozhatjuk meg belőlük az elmozdulást helyettesítő forgás tengelye I pólusának a és b (gömbi) koordinátáit és a ϑ forgásszögét?

A megelőző §. (1) és (2) egyenleteiben öt ismeretlen van, nevezetesen ε , ψ , a , b , és ϑ ; az egyenletek száma négy lévén, ezek az öt ismeretlen meghatározására nem elegendők, azaz az A és A' helyzetek ismerete még nem elég.

Ezért kell, hogy a rendszernek még más gömbfelületi

pontjának elmozdulását is ismerjük; legyen (180. ábra) B ezen pont eredeti helyzete, φ , és η , koordinátái; B' a helyzete az elmozdulás után, φ' és η' , a koordinátái; továbbá ε , és ψ , a B -hez tartozó azon szögek, melyek ugyanazt jelentik a B -re nézve, mint ε és ψ az A -ra nézve (megelőző §.).

E szerint ezen két pont elmozdulására alkalmazva a megelőző §. (1) és (2) egyenleteit, rendre nyerjük:



180. ábra.

$$\left. \begin{aligned} \cos \varepsilon &= \cos \eta \cos b + \sin \eta \sin b \cos (a - \varphi); \\ \sin \psi &= \sin \eta \frac{\sin (a - \varphi)}{\sin \varepsilon}; \\ \cos \eta' &= \cos \varepsilon \cos b + \sin \varepsilon \sin b \cos (\psi - \vartheta); \\ \sin (a - \varphi') &= \sin \varepsilon \frac{\sin (\psi - \vartheta)}{\sin \eta'}; \\ \cos \varepsilon_1 &= \cos \eta_1 \cos b + \sin \eta_1 \sin b \cos (a - \varphi_1); \\ \sin \psi_1 &= \sin \eta_1 \frac{\sin (a - \varphi_1)}{\sin \varepsilon_1}; \\ \cos \eta'_1 &= \cos \varepsilon_1 \cos b + \sin \varepsilon_1 \sin b \cos (\psi_1 - \vartheta); \\ \sin (a - \varphi'_1) &= \sin \varepsilon_1 \frac{\sin (\psi_1 - \vartheta)}{\sin \eta'_1}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Ezekhez járul még az a feltételi egyenlet, mely kifejezi, hogy az AB ív mindig egyenlő az $A'B'$ ívvel; ez az összefüggés:

$$\begin{aligned} \cos \eta \cos \eta_1 + \sin \eta \sin \eta_1 \cos (\varphi_1 - \varphi) &= \cos (AB) = \\ &= \cos \eta' \cos \eta'_1 + \sin \eta' \sin \eta'_1 \cos (\varphi'_1 - \varphi') = \cos (A'B'), \dots \dots (2) \end{aligned}$$

mely szerint az A és A' és a B és B' pontoknak összesen nyolcz coordinátái közül csak *hét* független van, és így az (1) egyenletrendszerben is csak *hét* független egyenlet létezik.

Ez a *hét* független egyenlet pedig elegendő a *hét* ismeretlennek: ugyanis az ε és ψ , az ε_1 és ψ_1 , és végre a forgás jellemzőinek, a , b , ϑ -nak meghatározására.

A meghatározás módja a formulák bonyolódott szerkezeténél fogva nem egyszerű; kivitelét az olvasóra bízuk.

213. §. *Pont körüli véges forgások kifejezése EULER három független szöge segélyével.*

A merev pontrendszer véges elmozdulását sokszor úgy is fejezzük ki, hogy a rendszerrel merev kapcsolatban levő mozgó derékszögű tengelyek helyzetkülönbségét adjuk meg az elmozdulás elejére és végére nézve.

Jeleljék (181. ábra) XYZ e tengelyek fekvését az elmozdulás kezdetén (hol az OY tengely a rajz síkjára merőleges lévén, az Y pont vetülete a szilárd O pontba esik), $X_1Y_1Z_1$ a tengelyek helyzete az elmozdulás végén; jeleljük továbbá a nevezett tengelyek között lévő szögeket következőleg [Math. repertórium 47. §. (1)]:

$$\left. \begin{aligned} (X, X_1) \triangleq \alpha_1, \quad (Y, X_1) \triangleq \alpha_2, \quad (Z, X_1) \triangleq \alpha_3 \\ (X, Y_1) \triangleq \beta_1, \quad (Y, Y_1) \triangleq \beta_2, \quad (Z, Y_1) \triangleq \beta_3 \\ (X, Z_1) \triangleq \gamma_1, \quad (Y, Z_1) \triangleq \gamma_2, \quad (Z, Z_1) \triangleq \gamma_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

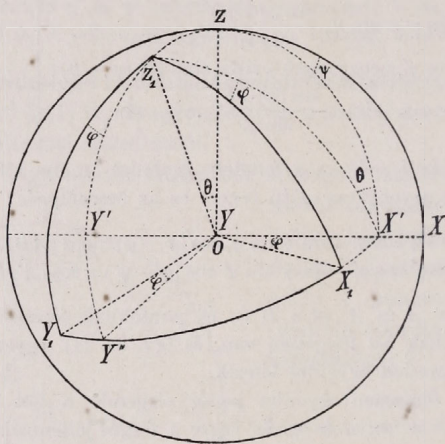
melyek közül csak három a független (i. h.).

EULER-rel [Math. repertórium 51. §.] a merev rendszert az XYZ helyzetből következőképen hozhatjuk az $X_1Y_1Z_1$ helyzetbe:

1. Forgassuk XYZ -t ψ szöggel az OZ tengely körül; ez által X az X' -be, Y az Y' -be jut, míg Z változatlan.

2. Forgassuk $X'Y'Z'$ -t az OX' tengely körül θ szöggel; ez által X' változatlan marad, míg Y' az Y_1 -be, Z a Z_1 -be jut.

3. Forgassuk az $X'Y_1Z_1$ -et az OZ_1 tengely körül φ szöggel; ez által X' az X_1 -be, Y_1 az Y_1 -be jut, de Z_1 változatlan és így az új helyzet el van érve.



181. ábra.

Ezen ψ , θ , φ dissymmetrikus coordinátákkal az EULER-féle transformáló formulák segítségével [Math. repertórium 51. §. (3)] a véges elmozdulás (1) alatti $\alpha_1 \dots \gamma_3$ jellemzői azonnal kifejezhetők:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_1 &= +\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta, \\ \cos \beta_1 &= -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \theta, \\ \cos \gamma_1 &= +\sin \psi \sin \theta, \\ \cos \alpha_2 &= +\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \theta, \\ \cos \beta_2 &= -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \theta, \\ \cos \gamma_2 &= -\cos \psi \sin \theta, \\ \cos \alpha_3 &= +\sin \varphi \sin \theta, \\ \cos \beta_3 &= +\cos \varphi \sin \theta, \\ \cos \gamma_3 &= +\cos \theta. \end{aligned} \right\} \dots \dots (2)$$

214. §. Pont körüli véges forgás jellemzőinek (RODRIGUES coordinátáinak) kifejezése a véges elmozdulás jellemzői által és megfordítva.

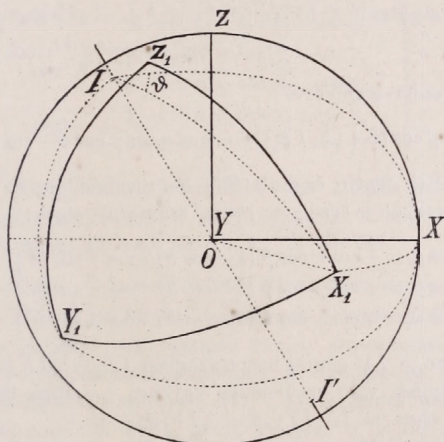
Legyen, mint a megelőző §-ban XYZ a merev pontrendszerrel egybekapcsolt coordináta-rendszer eredeti, $X_1Y_1Z_1$ az elmozdulás után való helyzete, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ az ott (1) alatt fel-

sorolt szögek; továbbá legyen az ezen elmozdulást helyettesítő véges forgás szöge ϑ , és II' tengelyének irányszögei α, β, γ (182. ábra).

Ennek értelmében az II' tengely körüli, ϑ szögű forgás által a merev testtel mozgó XYZ rendszer átvihető az $X_1Y_1Z_1$ helyzetbe.

[Az OY tengely a rajz síkjára merőleges, az IY legnagyobb körív síkja szintén, ezért ezen ívnek a rajz síkjára való vetülete egybeesik az IO tengelyével.]

Az $\alpha, \beta, \gamma; \vartheta$ mennyiségek RODRIGUES coordinátáinak nevezetnek, ezek közül, mivel $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, csak három független van, mely elegendő a rendszer elmozdulásának, közelebből pedig az $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$; kilencz irányszög kifejezésére.



182. ábra.

Viszont pedig, az $\alpha_1, \dots, \gamma_3$ kilencz irányszög segélyével a RODRIGUES-féle coordináták is kifejezhetők.

1. XIX_1 egyenszárú gömbi háromszögben az XX_1 ív $= \alpha_1$, az IX ív $= IX_1$ ív $= \alpha$ és az $(XIX_1) \sphericalangle$ szög $= \vartheta$. E szerint:

$$\cos \alpha_1 = \cos \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \sin \alpha \cos \vartheta = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos \vartheta \quad \text{s i. t.};$$

azaz rendre az XIX_1, YIY_1, ZIZ_1 egyenszárú gömbháromszögekből:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \cos^2 \alpha + (1 - \cos^2 \alpha) \cos \vartheta, \\ \cos \beta_1 &= \cos^2 \beta + (1 - \cos^2 \beta) \cos \vartheta, \\ \cos \gamma_1 &= \cos^2 \gamma + (1 - \cos^2 \gamma) \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

2. Az XIY_1 gömbi háromszögben a ki nem rajzolt XY_1 ív $= \beta_1$, az IX ív $= \alpha$, az IY_1 ív $= IY$ ív $= \beta$, és az $(XIY_1) \sphericalangle$ szög $= \vartheta + (X_1IY_1) \sphericalangle$. E szerint:

$$\cos \beta_1 = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos [\vartheta + (X_1 I Y_1)]; \text{ s i. t.}$$

Ámde az XIY gömbi háromszög [melynek $XY = \frac{1}{2}\pi$ és $IY = \beta$ ívei a rajzban egyenes vonalaknak látszanak], az II' körüli ϑ szögű forgás folytán átmént az $X_1 I Y_1$ háromszögbe, és így az $(X_1 I Y_1) \not\rightarrow$ szög $= (XIY) \not\rightarrow$ szöggel.

Az XIY gömbi háromszögből:

$$\cos (XOY) = 0 = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos (XIY);$$

vagy, mivel $(X_1 I Y_1) \not\rightarrow = (XIY) \not\rightarrow$,

$$\sin \alpha \sin \beta \cos (X_1 I Y_1) = -\cos \alpha \cos \beta,$$

ezt négyzetelve és $\sin^2 \alpha \sin^2 \beta$ -ből levonva:

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin \beta \sin (X_1 I Y_1) &= [\sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta]^{\frac{1}{2}} \\ &= [1 - \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta]^{\frac{1}{2}} = \cos \gamma. \end{aligned}$$

E két egyenlet segítségével:

$$\sin \alpha \sin \beta \cos [\vartheta + (X_1 I Y_1)] = -\cos \alpha \cos \beta \cos \vartheta - \cos \gamma \sin \vartheta,$$

és így a $\cos \beta_1$ -nek fentírt egyenletéből (és megfelelőleg az YIZ_1 és ZIX_1 gömbháromszögekből a $\cos \gamma_2$ és $\cos \alpha_3$ számára) végre:

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta_1 &= +\cos \alpha \cos \beta (1 - \cos \vartheta) - \cos \gamma \sin \vartheta \\ \cos \gamma_2 &= +\cos \beta \cos \gamma (1 - \cos \vartheta) - \cos \alpha \sin \vartheta \\ \cos \alpha_3 &= +\cos \gamma \cos \alpha (1 - \cos \vartheta) - \cos \beta \sin \vartheta \end{aligned} \right\} \dots \dots (2)$$

3. Végre az $X_1 I Y$ gömbi háromszögben IX_1 ív $= IX$ ív $= \alpha$; az IY ív (mely a rajz lapjára való vetületében egyenes vonalnak látszik) $= \beta$; az YX_1 ív $= \alpha_2$ és végre az $(X_1 I Y) \not\rightarrow = (XIY) \not\rightarrow - \vartheta$.

E szerint az $X_1 I Y$ gömbi háromszögből:

$$\cos \alpha_2 = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos [-\vartheta + (XIY)];$$

ámde, a megelőző 2. pont szerint $(X_1 I Y_1) \not\rightarrow = (XIY) \not\rightarrow$, és így mint fent:

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin \beta \cos (XIY) &= -\cos \alpha \cos \beta, \\ \sin \alpha \sin \beta \sin (XIY) &= +\cos \gamma, \end{aligned}$$

azaz, a $\cos \alpha_2$ s hasonlóképen az $Y_1 I Z$ és $Z_1 I X$ gömbháromszögekből a $\cos \beta_3$ és $\cos \gamma_1$ számára, rendre:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_2 &= +\cos \alpha \cos \beta (1 - \cos \vartheta) + \cos \gamma \sin \vartheta \\ \cos \beta_3 &= +\cos \beta \cos \gamma (1 - \cos \vartheta) + \cos \alpha \sin \vartheta \\ \cos \gamma_1 &= +\cos \gamma \cos \alpha (1 - \cos \vartheta) + \cos \beta \sin \vartheta \end{aligned} \right\} \dots \dots (3)$$

Ezek az (1), (2), (3) egyenletrendszerek kifejezik az $\alpha_1, \dots, \gamma_3$ kilencez irányszöget RODRIGUES koordinátái (a forgás jellemzői) segítségével.

4. Most megfordítva, RODRIGUES összszerendezőit fejezzük ki az $\alpha_1, \dots, \gamma_3$ irányszögek segítségével.

a. összegezve az (1) rendszer három egyenletét és tekintetbe véve, hogy $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, nyerjük:

$$\text{vagy: } \left. \begin{aligned} \cos \vartheta &= \frac{1}{2} [\cos \alpha_1 + \cos \beta_2 + \cos \gamma_3 - 1] \\ \cos^2 \frac{1}{2} \vartheta &= \frac{1}{4} [\cos \alpha_1 + \cos \beta_2 + \cos \gamma_3 + 1] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

b. Az (1) egyenleteket szabad még írni:

$$\cos^2 \alpha = \frac{\cos \alpha_1 - \cos \vartheta}{1 - \cos \vartheta}; \quad \cos^2 \beta = \frac{\cos \beta_2 - \cos \vartheta}{1 - \cos \vartheta}; \quad \cos^2 \gamma = \frac{\cos \gamma_3 - \cos \vartheta}{1 - \cos \vartheta},$$

azaz a (4) első egyenlete segítségével:

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \alpha &= \frac{1 + \cos \alpha_1 - \cos \beta_2 - \cos \gamma_3}{3 - \cos \alpha_1 - \cos \beta_2 - \cos \gamma_3}, \\ \cos^2 \beta &= \frac{1 - \cos \alpha_1 + \cos \beta_2 - \cos \gamma_3}{3 - \cos \alpha_1 - \cos \beta_2 - \cos \gamma_3}, \\ \cos^2 \gamma &= \frac{1 - \cos \alpha_1 - \cos \beta_2 + \cos \gamma_3}{3 - \cos \alpha_1 - \cos \beta_2 - \cos \gamma_3}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

A (4) és (5) egyenletek kifejezik a véges forgás jellemzőit (a forgás szögét és tengelyének helyzetét) az elmozdulás kilencz irányszöge segítségével, melyek közül itt csak az $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3$ lép fel.

215. §. *Elemi forgás létesítette elmozdulás analitikai kifejezése. Elemi elmozdulások analitikai helyettesése forgás által.*

1. Ha az A pont csak végtelen kicsiny elmozdulást szenved, akkor (211. §.) φ és η cordinátái átmennek $\varphi' = \varphi + d\varphi$ és $\eta' = \eta + d\eta$ -ba; a forgás szöge pedig $d\vartheta$; e szerint a 211. §. (1) formulái megmaradnak, míg a (2)-t egyszer a $\varphi' = \varphi$, $\eta' = \eta$, $\vartheta = 0$, másszor a $\varphi' = \varphi + d\varphi$, $\eta' = \eta + d\eta$, $\vartheta = d\vartheta$ értékrendszerekre alkalmazva:

$$\begin{aligned} \sin \eta d\eta &= -\sin \varepsilon \sin b \sin \psi d\vartheta, \\ -\sin \varepsilon \cos \psi d\vartheta &= \cos \eta \sin (a - \varphi) d\eta - \sin \eta \cos (a - \varphi) d\varphi, \end{aligned}$$

avagy, az (1) második egyenletének tekintetbe vételével:

$$d\eta = -\sin b \sin (a - \varphi) d\vartheta; \quad \cotg (a - \varphi) d\varphi = \cotg \eta d\eta + \cotg \psi d\vartheta \quad (1)$$

De könnyű, a ψ segédszöget itt eliminálni. Ugyanis, a 211. §. (1) első egyenletének bal része, a $\cos \varepsilon$, a forgás közben nem változik; ezért ezen egyenlethől:

$$0 = [-\sin \eta \cos b + \cos \eta \sin b \cos (a - \varphi)] d\eta + \sin \eta \sin b \sin (a - \varphi) d\varphi = 0, \quad (2)$$

melyet egybekapcsolva a $d\eta = -\sin b \sin (a - \varphi) d\vartheta$ összefüggéssel, nyerjük az η - és a φ koordinátáknak $d\vartheta$ segítségével kifejezett változásait:

$$\left. \begin{aligned} d\eta &= -\sin b \sin (a - \varphi) d\vartheta \\ d\varphi &= [-\cos b + \sin b \cotg \eta \cos (a - \varphi)] d\vartheta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

2. Ha a rendszer pontjainak elemi elmozdulásaiból a momentán forgás $a, b, d\theta$ jellemzőire akarunk következtetni, akkor az A pontnak a (3) felírt kifejezéseire még egy másik, pl. a B ponté is (a 212. §. jelölésével):

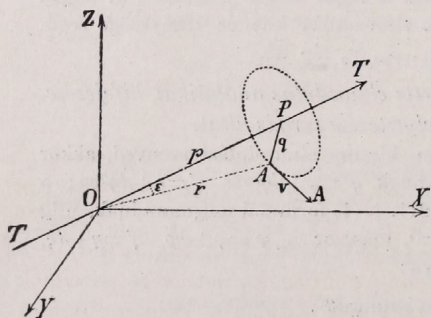
$$\begin{aligned} d\eta, &= -\sin b \sin(a-\varphi,) d\theta \\ d\varphi, &= [-\cos b + \sin b \cotg \eta, \cos(a-\varphi,)] d\theta \end{aligned} \quad (4)$$

járulnak; a $d\eta$ és $d\varphi$, $d\eta$, és $d\varphi$, változások összefüggése az idézett §. (2) egyenlete alapján (mivel itt $\eta' = \eta + d\eta$, $\varphi' = \varphi + d\varphi$; $\eta'_1 = \eta_1 + d\eta_1$, $\varphi'_1 = \varphi_1 + d\varphi_1$) a következő:

$$[\sin \eta \cos \eta, -\cos \eta \sin \eta, \cos(\varphi, -\varphi)] d\eta + [\cos \eta \sin \eta, -\sin \eta \cos \eta, \cos(\varphi, -\varphi)] d\eta + \sin \eta \sin \eta, \sin(\varphi, -\varphi) (d\varphi, -d\varphi) = 0 \quad (5)$$

A négy koordináta-változás közül e szerint csak három a független; ezért a (3) és (4) egyenletekre nézve ugyanaz áll; e szerint a keresett forgásnak $a, b, d\theta$ jellemzői a nevezett három független egyenletről meghatározhatók.

216. §. Elemi forgás elmozdulásának és sebességének kifejezése derékszögű összerendezőkben.



183. ábra.

Legyen (183. ábra) TT a momentán (instantán) tengely, a, β, γ az iránycosinusai, $d\theta$ az elemi forgás szöge, A a rendszer tetszőleges, x, y, z összerendezőjű pontja, mely a tengelytől q távolságban van.

Az A elemi elmozdulása az AA mentén fekszik, iránya a TT tengelyre és az $OA=r$ távolságra merőleges; értéke $ds=qd\theta$.

Ámde, az OT iránycosinusai a, β, γ ; az $OA=r$ iránycosinusai pedig $x:r, y:r, z:r$, és az $(AOP) \angle = \epsilon$, e szerint az ezen két irányra merőleges ds elmozdulás iránycosinusai rendre:

$$\frac{\beta z - \gamma y}{r \sin \epsilon}; \quad \frac{\gamma x - a z}{r \sin \epsilon}; \quad \frac{a y - \beta x^*}{r \sin \epsilon},$$

* A 216, 217, 234, 237, 239, 242 s i. t. §§. formulái előjeleinek egyöntetűsége kedvéért e §§. geometriai viszonyait oly XYZ koordináta-tengelyekre vonatkoztatva fejezzük ki, melyek rendre az YZ, ZX, XY síkok pozitív normálisai [Math. repertórium 45. §. (3) és Jegyzete].

melyeket a ds sel szorozva, rendre nyerjük a ds -nek dx , dy , dz derékszögű összetevőit. Mivel $ds=qd\vartheta$ és $r \sin \varepsilon=q$, e szorzás eredménye:

$$\left. \begin{aligned} dx &= (\beta z - \gamma y) d\vartheta \\ dy &= (\gamma x - \alpha z) d\vartheta \\ dz &= (\alpha y - \beta x) d\vartheta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Az A pont sebességi összetevőit v_x , v_y , v_z -el, a momentán forgás szögsebességét ω -val jelevél, az (1)-ből:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \omega (\beta z - \gamma y) \\ v_y &= \omega (\gamma x - \alpha z) \\ v_z &= \omega (\alpha y - \beta x) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Jegyzet: Az ω szögsebességet a momentán tengely α , β , γ irány-cosinusaival szorozva, rövidség kedvéért írjuk:

$$\alpha\omega = \omega_x; \quad \beta\omega = \omega_y; \quad \gamma\omega = \omega_z, \quad \dots \dots \dots (3)$$

mely menynyiéseket az ω szögsebesség derékszögű vetületeinek nevezzük; segélyükkel a (2)-ből

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

A 232. §-ban be fogjuk bizonyítani, hogy az itt is tárgyalt momentán forgás vector jellegű.

217. §. *A pont gömbi elemi elmozdulása és sebessége helyettesíthető a fixponton átmenő számtalan, de egy síkban fekvő tengely körüli forgás és ennek sebességei által.*

A megelőző §. feladatát megfordíthatjuk; adottnak tekintjük a rendszer valamely x , y , z koordinátájú pontjának v sebességét és ennek v_x , v_y , v_z componenseit; határozzuk meg ezekből a rendszer szilárd O pontján átmenő azon TT tengelynek α , β , γ iránycosinusait, mely körül valamely ω szögsebességgel történő forgás az A sebességét teljesen helyettesíti.

A feladat számtalan megoldást ad, mert, miként azonnal bebizonyítjuk, az O -n átmenő tengelyek körüli számtalan forgás létesíti az A -nak elmozdulását, illetve sebessége v_x , v_y , v_z összetevőit.

De megjegyzendő, hogy ez az eredmény nem egy egész merev rendszerre hanem ennek csak egy pontjára nézve áll.

Adva van az A pont helyzete (184. ábra) azaz, az x , y , z koordináták és evvel az $\vec{OA}=r$ nagyság és irány szerint; továbbá az A sebessége, v és ennek v_x , v_y , v_z összetevői; a megelőző §. (2) kifejezései:

$$v_x = \omega(\beta z - \gamma y); \quad v_y = \omega(\gamma x - \alpha z); \quad v_z = \omega(\alpha y - \beta x); \quad \dots \quad (1)$$

ezeket rendre x -, y -, z -vel szorozva, összeadjuk:

$$xv_x + yv_y + zv_z = rv \cos(r, v) = 0, \quad \dots \quad (2)$$

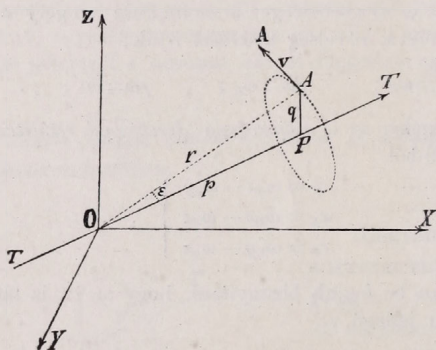
mely összefüggés kifejezi, hogy az r és v egymásra merőlegesek és hogy a rajtuk átfektetett sík a rendszer kezdetén megy keresztül.

Ezenkívül áll:

$$v = q\omega = \omega r \sin(r, TT) = \omega r \sin \varepsilon,$$

azaz:

$$\omega \sin \varepsilon = \frac{v}{r} \quad \dots \quad (3)$$



184. ábra.

Az ω és az ε szög a (3) feltételnek megfelelőleg választhatók, ha v és r adva van.

A \vec{TT} tengely *iránya* e szerint csak annak az egy feltételnek van alávetve, hogy az az O kezdetén megy keresztül és a v irányra merőleges AOP síkban fekszik.

A feladatnak e szerint számtalan, az O -n átmenő tengelyű forgás felel meg.

218. §. *A momentán forgás jellemzőinek meghatározása az elmozdulások (sebességek) derékszögű componenseiből.*

Adva legyen a rendszer két tetszőleges, A_1 és A_2 pontjainak x_1, y_1, z_1 és x_2, y_2, z_2 derékszögű koordinátái, továbbá ds_1 és ds_2 elmozdulásaiknak dx_1, dy_1, dz_1 és dx_2, dy_2, dz_2 derékszögű összetevői, a koordináták kezdete a rendszer szilárd pontjával esvén egybe. Kereszük azt a momentán (instantán) forgást, mely a rendszer elmozdulását és mozgását helyettesíti.

Jeleljék α, β, γ a momentán tengely iránycosinusait, $d\theta$ a hozzá-

tartozó eredő forgás szögét, akkor, az A_1 és az A_2 elmozdulásainak irányai mindig merőlegesek lévén a tengelyre:

$$\left. \begin{aligned} \alpha dx_1 + \beta dy_1 + \gamma dz_1 &= 0 \\ \alpha dx_2 + \beta dy_2 + \gamma dz_2 &= 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Ezen rendszer első két egyenletéből képezzünk egy identitást és a γ valamint a β eliminációja által két egyenletet, nevezetesen:

$$\left. \begin{aligned} \alpha (dy_1 dz_2 - dy_2 dz_1) &= \alpha (dy_1 dz_2 - dy_2 dz_1) \\ \alpha (dz_1 dx_2 - dz_2 dx_1) &= \beta (dy_1 dz_2 - dy_2 dz_1) \\ \alpha (dx_1 dy_2 - dx_2 dy_1) &= \gamma (dy_1 dz_2 - dy_2 dz_1) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Irva rövidség kedvéért:

$$\left. \begin{aligned} X &= dy_1 dz_2 - dy_2 dz_1; \quad Y = dz_1 dx_2 - dz_2 dx_1; \quad Z = dx_1 dy_2 - dx_2 dy_1; \\ R^2 &= X^2 + Y^2 + Z^2; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

nyerjük (2)-ből négyzetelés és összegezés útján:

$$\alpha = \frac{X}{R}; \quad \beta = \frac{Y}{R}; \quad \gamma = \frac{Z}{R} \dots \dots \dots (4)$$

Ha ezeket ismerjük, akkor (a 184. ábra értelmében) a

$$\begin{aligned} p_1 &= \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1; \\ q_1^2 &= r_1^2 - p_1^2 = (\beta z_1 - \gamma y_1)^2 + (\gamma x_1 - \alpha z_1)^2 + (\alpha y_1 - \beta x_1)^2; \\ q_1 d\vartheta &= [(dx_1)^2 + (dy_1)^2 + (dz_1)^2]^{\frac{1}{2}} = ds_1 \end{aligned}$$

egyenletek a $d\vartheta$ forgásszöget szolgáltatják és így a momentán forgás jellemzői teljesen ismeretesek.

A formulák további transformációját az olvasóra bizzuk.

3. Példák a gömbi mozgásra. Gömb- (kúp-) mechanizmusok.

219. §. *Gúlánk és kúpok gördülése congruens gúlánkon és kúpokon; továbbá síkon és legnagyobb körön.*

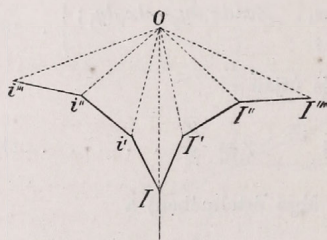
1. *Pyramis gördülése vele közös csúcsú másik gúlán.*

Ha valamely pyramist lefejtetőnk a síkra, akkor oldallapjainak csúcscsözei e síkban egymás mellé jutnak; csúcscuk közös, összegük pedig a pyramis csúcs-szöge; ezt a szöget hagyja hátra (írja le) a pyramis, ha a síkon teljesen le lesz fejtve (teljes gördülést végez). [Ez a csúcscsöze össze nem tévesztendő a pyramis csúcsa által képezett kúp- vagy testszöggel vagy kúpnylással, mely azon felület-területével egyenlő, melyet a csúcs körül a hosszegységgel mint a sugárral leírt gömbfelületen a pyramis palástjának metszövonal határol].

Ha most a pyramis más pyramison vagy kúpon gördül, akkor a gördülő pyramis egy teljes gördülést végzett, a mikor a gördülés az álló alakon egy a pyramis csúcshozzával egyenlő részén az álló csúcshozzával történt.

De ilyenkor a gördülő pyramis, általánosságban véve még nem fordult meg úgy, hogy eredeti helyzetét újra felvette volna; ez csak akkor következik be, midőn az álló pyramis a gördülővel egybevágó vagy legalább csúcshozzával egyenlők. E mellett nem szükséges, hogy a gördülés tengelye a két pyramis oldalfelületének megfelelő vonala legyen, azaz nem kell, hogy az álló pyramis a gördülő pyramisnak mindig síkbeli tükörképe legyen.

Ha az álló pyramis a gördülőnek a tükörképe, akkor a pyramis



185. ábra.

élei körüli, egymásra következő forgások szögei (185. ábra) egyenlők az időszertinti forgás tengely (él) mellett fekvő pyramis-szög vagy gömbi poligonsszög complementáris szögének a kétszeresével; ezt már az ábrának megtekintése közvetlenül adja. A nevezett forgás által a pyramisnak OI' lapja átment az OII' lapba; ezt az átvitelt még úgy is létesíthetjük, ha a gördülő pyramist OI körül, de negatív

irányban az $i'II_0$ poligonsszög kétszeresével forgatjuk.

Ennek alapján a következő tételt mondhatjuk ki: Valamely merev rendszert szilárd pont körüli oly forgások sorozata által, melyek egymásutánja egy gömbi poligonnak kétszeresen vett szögei által adatnak, eredeti helyzetébe hozhatjuk vissza.

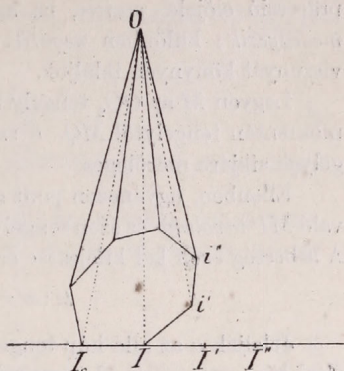
2. Analog tétel érvényes a pyramisnak síkon való gördülésénél.

A pyramis, illetve a hozzá tartozó gömbi poligon a gömbfelületnek egy legnagyobb körén gördüljön; ha egy teljes gördülés történt, akkor a pyramisnak a síkhoz (legnagyobb körhöz) viszonyított helyzete ugyanaz, mint az eredeti helyzet. A pyramist az eredeti helyzetből a teljes gördülés befejezésénél felvett helyzetbe még úgy is hozhatjuk, ha azt a legnagyobb körre merőleges tengely körül a pyramis csúcshozzával mint forgáshozzával forgatjuk. Ezen csúcshozzával tartozó íve a legnagyobb körnek egyenlő a gömbi poligon oldalainak az összegével.

A síkbeli gördülésnél az élek körüli forgás szöge egyenlő a gömbi poligon megfelelő szögének complementáris szögével, azaz a poligon

külső szögével; egy ily él körüli forgás által a polygon Ii' oldala (186. ábra) átmegy az II' helyzetbe; e helyzetváltozást még úgy is létesíthetjük, hogy a pyramist az OI körül *negatív* irányban $[\pi + (I_0 I_i') \curvearrowright]$ szöggel forgatjuk. Ha pedig a pyramist csak $(I_0 I_i') \curvearrowright$ szöggel forgatjuk *negatív* irányban, akkor a nyert helyzet az előbbtől π szöggel különbözik.

Azaz: az $(I_0 I_i') \curvearrowright$ szöggel való pozitív forgás ugyanaz, mint a $[\pi - (i' II') \curvearrowright]$ szöggel való pozitív forgás.



186. ábra.

A $[2\pi - \Sigma(i' II')] = a$ gömbi polygon *sphärikus excessussa*; segítségével a származó tétel következőleg fogalmazható:

Ha valamely merev rendszer a szilárd pont körüli forgások oly sorozatát végzi, melyek egymásutánja egy gömbi polygon szögei által advák, akkor véghelyzete ugyanaz, mintha e rendszer a polygon első esúcsán átmenő tengely körül a polygon sphärikus excessussával egyenlő szöggel lett volna forgatva.

220. §. Előnyomuló rotációk. A präcessió három esete. Példák.

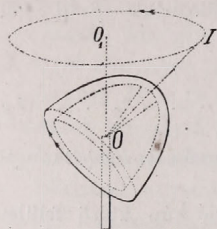
A merev rendszernek pont körüli mozgásánál különösen érdekesek azok az esetek, melyek bekövetkeznek, midőn a szilárd és a gördülő kúp *kör alakú* alappal bírnak.

Az ilyenkor származó mozgás analagonját a *síkbeli* mozgásnál (149—152. §§.) tárgyaltuk; itt ezeket *gömbi cyclois- és trochois-szerű*, illetve gömbi *epicyclois- és hypocyclois és gömbi epitrochois- és hypotrochois-szerű* mozgásoknak; sokszor még általánosságban *előnyomuló forgásoknak* nevezzük.

I. A szilárd kúp tengelye $\overline{OO_1}$ és a pillanati forgás tengelye legyen OI (187. ábra); ezek $OO_1 I$ síkja tartalmazza a gördülő kúp OO_2 tengelyét is; a mint az OI a gördülés közben az alapkúp oldalfelületén tovább mozog, a gördülő kúp OO_2 tengelye is akként mozog az OO_1 körül, hogy az OO_1 , OI , OO_2 tengelyek mindig egy síkban maradnak.

Jeleljék ω a merev rendszernek az OI momentán tengely körüli szögsebességét, és Ω azt a szögsebességet, melylyel az OO_1 -et, OI -t, OO_2 -t tartalmazó sík az álló kúp tengelye körül forog.

Ezen sík mozgását *előnyomulásnak*, *präcessió-nak*, a hozzátartozó Ω szögsebességet az *előnyomulás nagyságának* szokás nevezni; a



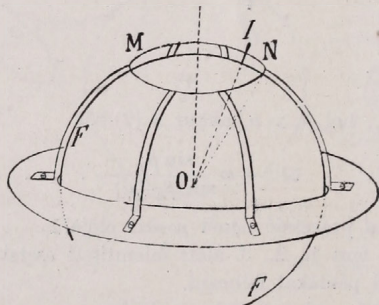
189. ábra.

harangot a vertikálishoz hajlott tengely körül gyors forgásba hozzuk: tapasztaljuk, hogy a tengelynek a vertikálishoz való hajlása változatlan marad, míg a harang maga tengelyével együtt, forgásával ellenkező irányban, lassan forog a vertikális körül.

A harmadik esetét a mozgásnak előtűnteti a horizontális síkon pörgetett köralakú korong (pénzdarab), melynek forgó síkja eleinte vertikális, azután mindinkább horizontális lesz; ezen utóbbi mozgás igen megközelíti a 3. alatt tárgyalt mozgást és ha a korong tömege és sugara elég nagy, ennek szemléltetésére is igen alkalmas.

221. §. *A föld tengelyének prăcessiója (a napéjegyen vonal előnyomulása).*

A tapasztalat kimutatta, hogy a föld tengelyének a föld pályája síkjához, az ekliptikához való hajlása, $\varepsilon = 23^\circ 27' 28''.3$, változatlan marad, míg az æquator síkjának a pálya síkjával való metszővonala



190. ábra.

(a napéjegyen, az æquinocetiumok vonala) évenként körülbelől 50.2113 ívmásodpercczel mozog hátrafelé (a föld forgásával *ellenkező* irányban), vagy, 25,868 év alatt mozogna 360 foknyi szögön keresztül. (E jelenség magyarázatát és elméletét a dynamikában fogjuk adni.)

Ezt a mozgást nagyon könnyen vezethetjük vissza két kúp gördülésére.

1. Ugyanis, a 190. ábrában előtűntetett mintában az FF' földgömb O középpontján meg van támasztva és körülforgathat; az MN vízszintes, szilárd gyűrű az ekliptikához párhuzamos síkot, a gömb felső részéből kiálló I rudacskának tengelye a föld tengelyét képviseli. Ha a földgömböt forgatjuk: középpontjának helyzete megmarad, de a kiálló rudacskával a $23^\circ 27' 5''$ sugarú körgyűrűn gördül; e közben a geo-

metriai tengelyének hajlása az ekliptikához változatlan, míg momentán forgástengelye a gyűrű belső kerületén körülhalad.

2. Ennek értelmében ezt a mozgást a megelőző §. 2. pontjában megvizsgált mozgásnemhez szabad számítanunk; az álló (alap-) kúp itt $\alpha = 23^\circ 27' \cdot 5$ generáló szöggel bír, míg a gördülőnek β szögét keressük.

A gördülő kúp egy csillagnap alatt fordul egyszer tengelye körül; ellenben az alapkörön csak 25868 év, azaz $25868 \times 366 \cdot 24$ csillagnap alatt gördül végig; e szerint itt a megelőző §.-nak itt alkalmazandó (2_2) egyenletéből

$$-\frac{\Omega}{\omega} = \frac{1}{25868 \times 366 \cdot 24} = \frac{\sin \beta}{\sin (23^\circ 27' \cdot 5 - \beta)},$$

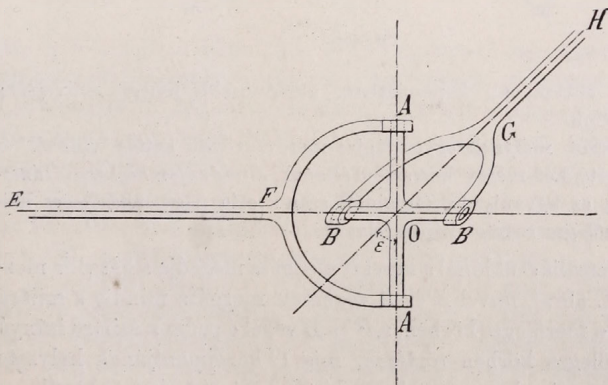
miből:

$$\beta = 0'' \cdot 00868$$

Ezen gördülő kúp a föld felületét egy körülbelül 0.27 méter sugarú körben metszi, melynek középpontja a föld tulajdonképeni pólusa.

222. §. CARDANO általános (universális) csuklója (HOOKE-féle kulcs).

1. Valamely derékszögű, egyenszerű merev $AABB$ kereszt (191. ábra) egy-egy átmérőjén lévő A, A illetve B, B végei egy-egy AFA illetve BGB merev villában foroghatólag vannak beerősítve. A villák EF és GH tengelyeinek folytatásai a kereszt O középpont-



191. ábra.

jában találkoznak; ha a tengelyek fekvése szilárd, akkor az egyik villának forgása (vagy helyzete) meghatározza a másik villa forgását (vagy helyzetét).

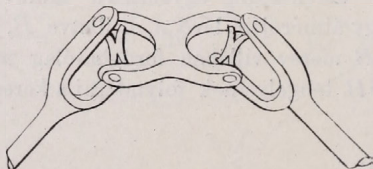
A tengelyek által egymással képezett ε hegyes szög tetszőleges lehet ugyan, de a gyakorlatban a 0 és $\frac{1}{2}\pi$ között szokott lenni.

A forgás átvitelének ezen módja CARDANO-tól (1501—1576) származik; angol szerzők ezt a szerkezetet mindig HOOKE-féle (1635—1703) *kulcsnak* nevezik; elterjedt még a *hollandi csukló* elnevezés is.

2. Módosított alkalmazása az ú. n. CARDANO-féle *felfüggesztés*, mely abban áll, hogy a felfüggesztendő eszköz két merev vízszintes diametrális csapot visz, mely egy szintén vízszintes fémgyűrű két diametrális ágyában foroghat, maga e gyűrű az ágyak átmérőjére merőleges két helyen kifelé álló csapokkal bír, melyek szilárd helyzetű, a gyűrűn kívül lévő ágyakban forognak. Bármily helyzetű is legyen a külső két ágy: az eszköz súlypontja mindig a felfüggesztő rendszer középpontján átmenő verticalisban fekszik.

Barométereket, chronométereket, boussolákat és más ilyennemű eszközöket szárazföldön és hajókon így szokás felfüggeszteni.

Jegyzet. Ha egy merev, rövid kettős villa két merev keresztet visz, melyek mindegyike a 192. ábra mintája szerint egy-egy egyszerű ten-



192. ábra.

gelylyel bíró villával áll kapcsolatban, általánosabb jellegű univerzális csuklót nyerünk.

Oly lánczot, melynek egyes tagjai merev, rövid kettős villából és benne forogható két merev keresztből állanak, *általánosan hajlítható láncz*-nak nevezik; ez ugyanis, ha tagjainak száma elég nagy, tetszőleges hajlítást és tetszőleges sodrást képes felvenni.

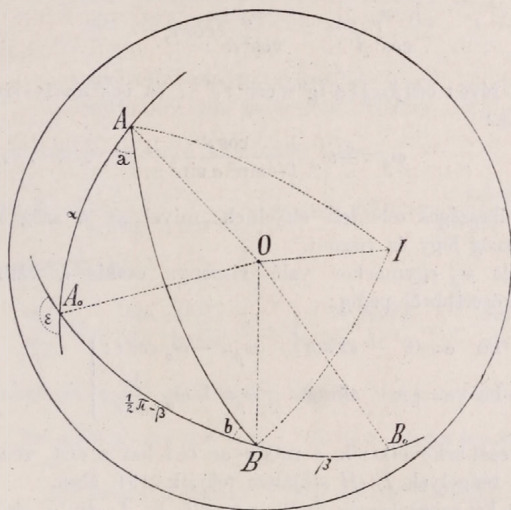
Az univerzális csuklónál a kereszt mozgása megadja a két villa mozgását is (191. ábra), mivel A és A' végeinek mozgása mindig a szilárd irányú EF -re merőleges körben, a B és B' végeké pedig a szilárd irányú GH -ra merőleges körben történik, míg O középpontjának helyzete változatlan; ezért e kereszt csak *gömbi mozgást* végezhet O körül.

223. §. CARDANO csuklójának (HOOKE kulcsának) elmélete.

A csukló keresztje a megelőző § értelmében a szilárdnak tekintendő O középpont körül mozog (191. ábra); mozgása annak a két feltevésnek felel meg, hogy A, A pontjai az OE normálisú, B, B pontjai az OH normálisú körön tartoznak maradni; a körök síkjai egymással ε szöget képeznek.

A kereszt merev lévén, elegendő A és B két pontját tárgyalni, és így mozgási problémája a következő feladatra van visszavezetve:

Valamely O középpontú gömbfelületen (193. ábra) két legnagyobb



193. ábra.

kör, A_0A és A_0B , ε szög alatt metszi egymást; egy merev rendszer úgy tartozik mozogni az O körül, hogy egyik, A pontja mindig az A_0A kör-, másik, B pontja mindig az A_0B kör mentén marad, míg az OA és az OB egyenesek mindig egymásra merőlegesek, azaz, az (AOB) szög mindig derékszög; milyenek a mozgás jellemzői?

[E mechanizmus nem más, mint a síkmozgás 147. §-a 1. pontjában és a 199. §. 2. feladatában felemlítettnek a gömbre való átvitele. V. ö. 207. §. első kikezdését és a 268. §. 15. feladatát].

A nevezett körök OA_0 metszövonalá az EOH síkra (a tengelyek síkjára, 191. ábra) emelt merőleges; ha az OA kar e vonalba esik, akkor az OB kar okvetetlenül a tengelyek síkjában fekszik; ezen helyzetet az A_0B_0 ív (193. ábra) tünteti elő, míg AB ezen derékszögű ívnek tetszőleges helyzete.

Jeleljék

$$(A_0OA) \sphericalangle = \alpha, \quad (B_0OB) \sphericalangle = \beta, \quad (AOB) \sphericalangle = \frac{1}{2}\pi.$$

1. Az A_0AB gömbi háromszögből:

$$\cos(AOB) = 0 = \cos \alpha \cos(\tfrac{1}{2}\pi - \beta) + \sin \alpha \sin(\tfrac{1}{2}\pi - \beta) \cos \varepsilon,$$

azaz:

$$\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg} \alpha \cos \varepsilon \quad \dots \quad (1)$$

A negatív jel onnan van, hogy a β -t a B_0 -tól A_0 -felé számítjuk.

Az OA és OB karok szögsebességei az α , illetve a β szögnek az idő szerint képezett differenciálquotienszeivel egyenlők; jeleljék

$$\alpha' = \omega_\alpha; \quad \beta' = \omega_\beta;$$

nyerjük az (1)-ből (ε állandó lévén)

$$\frac{\omega_\beta}{\cos^2 \beta} = -\frac{\omega_\alpha}{\cos^2 \alpha} \cos \varepsilon,$$

vagy, (1)-ből téve: $\cos \beta = [1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \varepsilon]^{-\frac{1}{2}}$, és $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$, némi rövidítés után:

$$\omega_\beta = -\omega_\alpha \frac{\cos \varepsilon}{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varepsilon} \quad \dots \quad (2)$$

A szögsebességek ellentett előjelűek, mivel az α szög növekedése közben a β szög fogy és viszont.

Az ω_α és ω_β egymáshoz való viszonya csakis a változó $\sin^2 \alpha$ függvénye; közelebből pedig:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{ha } \alpha = 0, & \text{akkor } \omega_\beta = -\omega_\alpha \cos \varepsilon; \\ \text{ha } \alpha = \tfrac{1}{2}\pi, & \text{akkor } \omega_\beta = -\omega_\alpha \frac{1}{\cos \varepsilon}; \end{array} \right\} \quad \dots \quad (3a)$$

ezen utóbbi eset bekövetkezik, a mikor az OA kar a OA_0 vonalra merőleges, azaz a tengelyek EOH síkjában fekszik, 191. ábra.

Végre a két szögsebesség értéke egyenlő, ha $1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varepsilon = \cos \varepsilon$, azaz, ha:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos \varepsilon}{\sin^2 \varepsilon} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon}; \quad \dots \quad (3b)$$

de általánosságban véve a szögsebességek különbözők.

Mivel a gyakorlatban az ε szög csak 0 és $\tfrac{1}{2}\pi$ között szokott lenni, a szögsebességek viszonya a (3a) értelmében csak $1 : \sqrt{2}$ és $\sqrt{2}$ között változhatik, azaz $\varepsilon = \tfrac{1}{4}\pi$ esetében a szélső értékek úgy viszonylanak, mint egy a kettőhöz.

2. Jeleljék I a forgás momentán pólusát, ω e forgás szögsebességét és OI a momentán tengelyt; az I -t mint a B -ből az A_0B ívre és az A -ból az A_0A ívre merőlegesen emelt legnagyobb körívek metszéspontját találjuk.

A gömb sugara a hosszszegység lévén, az A és B pontoknak $\sin(AOI)$ és $\sin(BOI)$ távolságait a momentán tengelytől véve tekintetbe, ugyane pontok 1. α' és 1. β' sebességei a gömbfelületen:

$$\omega_\alpha = +\omega \sin(AOI); \quad \omega_\beta = -\omega \sin(BOI) \quad \dots \quad (4)$$

azaz, a (2)-t is véve tekintetbe:

$$\frac{\omega_\alpha}{\omega_\beta} = -\frac{\sin(AOI)}{\sin(BOI)} = -\frac{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varepsilon}{\cos \varepsilon} \dots \dots (5)$$

Jeleljék a és b az A_0AB gömbháromszögben az A és B melletti szögeket (193. ábra) és az ABI gömbháromszögben $\frac{1}{2}\pi - a$, $\frac{1}{2}\pi - b$, o az A , B , I csúcsok mellett lévőket; mindkettőben AB ív $= \frac{1}{2}\pi$.

Ezen AIB gömbháromszögre nézve (Math. repertórium 12. §. 3. formulák):

$$\begin{aligned} \sin(AOI) \cos(\tfrac{1}{2}\pi - a) &= \cos(BOI); \\ \sin(BOI) \cos(\tfrac{1}{2}\pi - b) &= \cos(AOI), \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned} \sin^2(AOI) \sin^2 a &= 1 - \sin^2(BOI), \\ \sin^2(BOI) \sin^2 b &= 1 - \sin^2(AOI), \end{aligned}$$

mely egyenletekből egyszerű eliminálás után:

$$\sin^2(BOI) = \frac{1 - \sin^2 a}{1 - \sin^2 a \sin^2 b}; \quad \sin^2(AOI) = \frac{1 - \sin^2 b}{1 - \sin^2 a \sin^2 b} \quad (6)$$

E szerint (5)-ből:

$$\frac{\omega_\alpha}{\omega_\beta} = -\frac{\sin(AOI)}{\sin(BOI)} = -\sqrt{\frac{1 - \sin^2 b}{1 - \sin^2 a}} = -\frac{\cos b}{\cos a} \dots \dots (7)$$

Ellenben az A_0AB gömbháromszögből (Math. repertórium i. h.):

$$\sin \alpha \cos a = \cos(\tfrac{1}{2}\pi - \beta); \quad \sin(\tfrac{1}{2}\pi - \beta) \cos b = \cos \alpha$$

azaz:

$$\sin^2 \beta = \sin^2 \alpha \cos^2 a; \quad \cos^2 \alpha = \cos^2 \beta \cos^2 b;$$

ezekből:

$$\begin{aligned} \sin^2 a &= \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha}; & \sin^2 b &= \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\cos^2 \beta}; \\ \sin^2 a \sin^2 b &= \frac{(\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta)^2}{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta}. \end{aligned}$$

E kifejezések tekintetbe vételével a (6)-ból

$$\left. \begin{aligned} \sin^2(AOI) &= \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \beta) - \sin^4 \beta} \\ \sin^2(BOI) &= \frac{\sin^2 \beta \cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - \sin^4 \beta} \end{aligned} \right\} \dots \dots (8)$$

Az egyenletekben az (1) összefüggés segélyével az α a β által vagy viszont, kifejezhető.

A példa további, érdekes részleteinek megvizsgálását az olvasónak nagyon ajánlhatjuk.

224. §. Kúpos fogazott kerek.

Ha a 209. §-ban említett gördülő kúpokat a mozgás átvitelére kívánjuk alkalmazni, akkor ezek vagy egyszerűen surlódással gördülnek egymáson, vagy pedig (és ez a rendes eset) e kúpokba, az egymásba kapaszkodás céljából fogakat szokás vésni. Azok a kúpfelületek, melyeknek egymáson való gördülése a fogazott kúpos kerek gördülésével egyenlő, e kerek *primitív kúpjainak* neveztetnek (V. ö. a 195. §. 1. pontját).

Az ily fogazott kerekeket, melyek geometriai tengelyei egymással tetszőleges szöget képezhetnek, de egymást mindig metszik, *kúpos fogazott kerek*eknek nevezik.

Ezeknél az egymásra következő fogak felületei közös csúcsú kúpokot alkotnak, melyek csak akkor mennek át hengerfelületekbe, ha e csúcs végtelen távolságba jut; ekkora 195—198. §§-okban tárgyalta esetekkel van dolgunk.

A kúpos kerek fogprofiljai és mozgásbeli sajátosságai egészen analogok az idézett hengeres kerekéihez; csak hogy itt mindenütt a

hengerfelületek helyett közös csúcsú kúpok lépnek fel; egyenes vonalak helyébe legnagyobb körök, a cycloisok, trochoisok és körrevolvensek különböző fajai helyett a gömbi cycloisok, gömbi trochoisok és gömbi körrevolvensek lépnek.

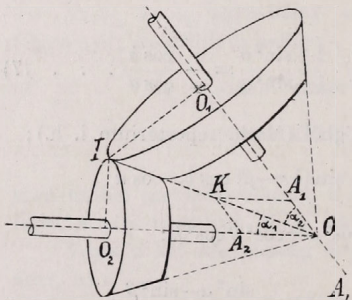
Ha ω_1 és ω_2 a két kerék szögsebessége, a_2 s a_1 az OI érintési vonal s az első, illetve, a második kerék tengelye közötti szögek (194. ábra), akkor

az I pont sebessége $\overline{O_1I} \cdot \omega_1 = \overline{O_2I} \cdot \omega_2$, miből $\omega_1 : \omega_2 = \sin a_1 : \sin a_2$.

A gyakorlatban e kerek kúpjai kis magasságú csonka kúpokot alkotnak (194. ábra), melynek kerületébe a fogak be vannak vésve; sokszor pedig a fogakat vivő koszorú mindkét keréknél az OI -re merőleges gyűrű.

Az említetteknel fogva szükségtelennek tartjuk e fogazás elméletét itt részletezni, mivel megjegyzésünk értelmében a 195—198. §§. eredményei, valamint a 205. §. 76—82 feladatai azonnal átvitelők a kúpos kerekre.

De a kezdőnek ezen átvitelnek az egyes esetekre vonatkozó tényleges megejtését nagyon ajánlhatjuk.



194. ábra.



4. Gömbi mozgások összzetevése és szétbontása,

vagy:

Forgások és szögsebességek összzetevése és szétbontása, ha tengelyeik közös ponttal bírnak.

225. §. *Gömbi véges elmozdulások (egymást metsző tengelyek körüli véges forgások) geometriai összzetevése egy forgássá.*

A gömbi mozgások összzetevése és szétbontása tárgyalásánál ugyanoly gondolatmenetet követünk, mint a megfelelő síkbeli viszonyok tárgyalásánál.

Ha két gömbi elmozdulást kell összzetennünk: csak azt kell szem előtt tartanunk, hogy a 207. §. értelmében a két elmozdulás két forgás által helyettesíthető, és így a feladat vissza van vezetve két gömbi forgás összzetevésére.

1. A feladat megoldása abból az egyszerű megfontolásból következik, hogy az összzeteendő két elmozdulás eredménye szintén csak a szilárd pont körüli elmozdulás lehet, melyet meghatározott tengely körüli forgás által helyettesíthetjük (207. §.).

E szerint a pont körüli két elmozdulás eredménye mindenkor helyettesíthető egy a szilárd ponton átmenő tengely körüli forgás eredménye által.

Ezt a tételt még kissé másként és igen alkalmas fogalmazásban fejezhetni ki.

Ugyanis az a két forgás, mely az összzeteendő két elmozdulást létesíti, oly két tengelylyel bír (207. §.), mely egymást a szilárd O pontban metszi; ezért:

Egymást metsző két tengely körüli forgás mindenkor összzetehető egy harmadik olynemű forgássá, melynek tengelye az összzeteendő két forgás tengelyeinek metszőpontján megyen keresztül.

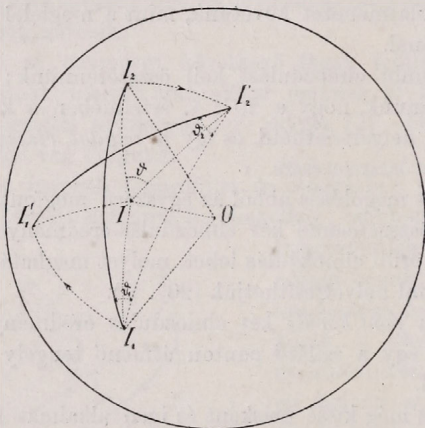
2. Ezen eredő forgás jellemzői: *tengelyének helyzete és a forgás szöge.*

A 195. ábra (a köv. l.) világosan tünteti elő az összzetevést; benne OI_1 és OI_2 az összzeteendő két forgás tengelyei és ϑ_1 és ϑ_2 forgásuk szögei. A szerkesztést hasonlóan végezve, mint a párhuzamos tengelyű forgások összzetevésénél (156. és 157. §§.), nyerjük az eredő forgás jellemzőit: az OI tengelyt és $(I_1II_1) \nrightarrow (I_2II_2) \nrightarrow \vartheta$ forgásszöget. Ezek a jellemzők az összzeteendő két forgás jellemzőiből adódnak (v. ö. a 229. §-t).

3. A tétel kiterjeszthető tetszőleges számú oly forgások esetére, mikor valamenynyi forgás tengelyei egymást közös pontban metszik,

mind ezek a forgások helyettesíthetők egyetlenegy olynemű forgás által, melynek tengelye a közös metszóponton megyen keresztül.

4. A tétel közvetlenül *meg is fordítható*: nevezetesen, minden tengely körüli forgás úgy tekinthető, mint ha az két vagy több olynemű forgás összetételéből származott volna, melyek tengelyei a tárgyalt forgás tengelyét egy bizonyos pontban metszik, azaz: *minden forgás szétbontható két vagy tetszőleges számú oly forgássá, melyek tengelyei az adott forgás tengelyét bizonyos pontban metszik.*



195. ábra.

226. §. Az összetevés eredménye az elmozdulások egymásutánjától függ; a sorrend megfordítása.

A rendszernek gömbi mozgásánál (épen úgy mint síkbelinél 157. §.) a *véges* elmozdulások sorrendje lényegesen foly be az eredményre.

A 196. ábra mutatja a véghelyzetek különbségét, mely bekövetkezik, ha egyszer az OI_1 és OI_2 körüli forgások-, másszor az OI_2 és az OI_1 körüli, az előbbiekkal egyenlő szögű forgások egymásutánját alkalmazzuk.

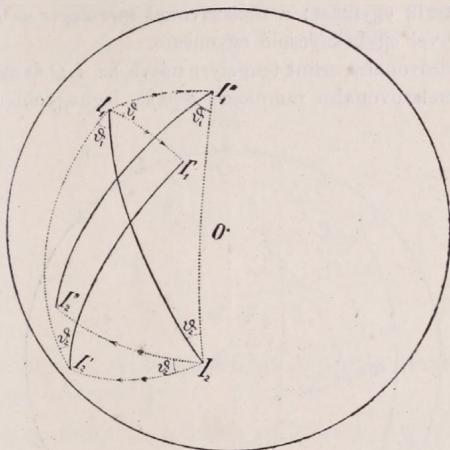
Ha az I_1I_2 , I_1I_1' , I_1I_2' , I_2I_2' , I_2I_1' , I_2I_1'' legnagyobb köröket húzzuk, és megjegyezzük, hogy az I_1I_2 , I_1I_2' , I_2I_1' ívek egymással, az I_1I_1' , I_1I_1'' két ív egymással és az I_2I_2' , I_2I_1'' két ív egymással egyenlő, könnyű a következő összefüggések helyességét belátni:

Az $I_1I_1'I_2'$ és az $I_1I_1'I_2$ *egyenszerű* gömbháromszögek *összszévdgók*, mivel az I_2' illetve I_2 melletti csúcshöyük és a mellette lévő oldalpárok egyenlők. Szintén *összszévdgók* az $I_2I_1'I_2'$ és az $I_2I_1'I_2$ gömbháromszögek.

Ha e szerint az $I_1 I_1' I_2$ gömbháromszöget $O I_1$ körül ϑ_1 szöggel for-
gatjuk, azt az $I_1 I_2 I_1'$ gömbháromszög helyzetébe hozzuk; továbbá, $I_2 I_1' I_2'$
gömbháromszög átmegyen az $O I_2$ körüli ϑ_2 szöggel való forgatás által
 $I_2 I_1' I_2'$ háromszögbe.

Vegyük most szemügyre az $I_1' I_2'$ helyzetet, melyet a ϑ_1 és ϑ_2 forgások
egymásutánja által létesítünk, és az $I_1' I_2'$ helyzetet, melyet *ugyanazon,*
de megfordított sorrendű, ϑ_2 és ϑ_1 forgások létesítenek.

Az $I_1' I_2'$ helyzetet nyerjük az $I_1 I_2'$ -ből, ha ezt $O I_2'$ körül ϑ_2 szöggel



196. ábra.

for-
gatjuk; az $I_1' I_2'$ helyzetet pedig, ha $I_1' I_2'$ -t az $O I_2$ körül ugyancsak
 ϑ_2 szöggel for-
gatjuk.

E szerint az $I_1' I_2'$ és az $I_1' I_2'$ helyzetek különbségét úgy is létesít-
hetjük, hogy a ϑ_2 szögű forgást nem $O I_2$ hanem $O I_2$ körül végeztetjük,
avagy még, ha (az $I_2 I_1'$ -nek) ϑ_1 szöggel való forgását nem az $O I_1$, hanem az
 $O I_1'$ körül létesítjük.

*Errel vissza van vezetve a gömbi forgások sorrendjének megfor-
dításából származó helyzetkülönbség azon helyzetkülönbségre, mely
keletkezik, ha a sorrend szerinti második forgás nem az elmozdított,
hanem az eredeti tengelye körül létesítettik.*

227. §. Kivételes eset: egyenlő nagyságú, de ellentett előjelű két
forgás.

A gömbi mozgásnál, ha két egyenlő nagyságú, de ellenkező
irányú forgás tevődik össze, analog tétel érvényes mint a megfelelő
síkbeli forgások összetételénél (158. §.).

Itt ugyanis (197. ábra) az $I_1 I_2$ eredeti helyzetből az I_1 körüli

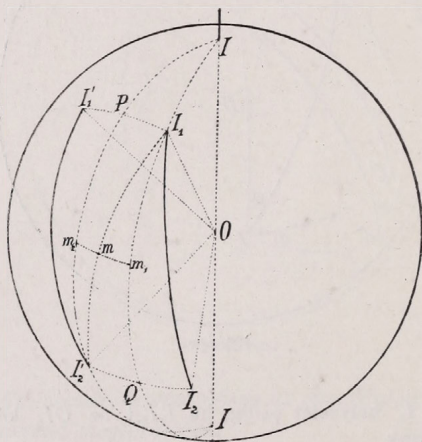
positív forgás által $I_1 I'_2$ helyzet-; ebből az I'_2 körüli negatív forgás által $I'_1 I'_2$ helyzet keletkezik.

Az $I_1 I_2 I'_2$ egyenszerű gömbháromszög összevágó az $I_1 I'_1 I'_2$ egyenszerű gömbháromszöggel.

Az $I'_2 P$ és $I_1 Q$ felező legnagyobb körívek derékszög alatt metszik az $I_1 I'_1$ és az $I_2 I'_2$ legnagyobb köríveket; e szerint a P és I_1 , I_2 és Q pontok egymástól egyenlően távolak és az I_1 és Q , P és I'_2 pontok távolsága is egymással egyenlő.

Az $I_1 Q$ és $I'_2 P$ legnagyobb körök síkjai az O szilárd ponton átmenő tengelyben metszik egymást; a metszövonal merőleges az $I_1 I'_2$ ívet felező m pontot az O -vel egybekapcsoló egyenesre.

Ezen metszövonalra mint tengelyre nézve az $I_1 Q$ és az $I'_2 P$ ívek meridiánok, míg a metszövonalra merőleges $m_1 m m_2$ legnagyobb körív equator.



197. ábra.

Ezek szerint az egyenlő nagyságú, de ellentett előjelű két forgás helyettesíthető oly tengely körüli forgás által, melytől az I_1 és I_2 (és vele együtt az I'_1 és I'_2 is) egyenlő távolságban vannak, mely tengely még az $I_1 Q$ és az $I'_2 P$ legnagyobb körívek síkjainak metszövonala; az eredő forgás szögének ívmértéke pedig $2m_1 m_2$.

Ha ezt a forgást tényleg létesítjük, az I_1 és I_2 pontok egyenlő nagyságú, párhuzamos köríveket írnak le (197. ábra).

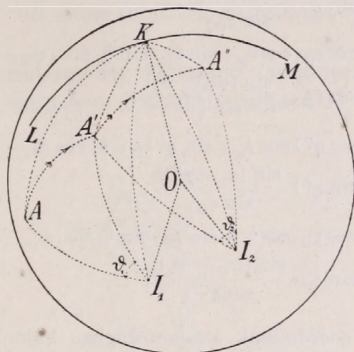
228. §. Véges két gömbi forgás által létesített elmozdulások analitikai kifejezése.

Jeleljék, mint a 212. §-ban, az A gömbfelületi pont koordinátáit φ és η , az OI_1 tengely koordinátáit a_1 és b_1 , az OI_2 -ét a_2 és b_2 ; az első és a második tengely körüli forgásszöget ϑ_1 és ϑ_2 (198. ábra).

1. Az A pont az első forgás után az A' helyzetet foglalja el, melynek coordinátái φ' és η' ; a második forgás után ez A'' helyzetben van; coordinátái φ'' és η'' .

Legyen továbbá:

$$\begin{aligned} I_1 A \text{ ív} &= I_1 A' \text{ ív} = \varepsilon_1; & (A I_1 K) \sphericalangle &= \psi_1; & (A' I_1 K) \sphericalangle &= \psi_1 - \vartheta_1 \\ I_2 A' \text{ ív} &= I_2 A'' \text{ ív} = \varepsilon_2; & (A' I_2 K) \sphericalangle &= \psi_2; & (A'' I_2 K) \sphericalangle &= \psi_2 - \vartheta_2. \end{aligned}$$



198. ábra.

Ekkor az idézett §. (1) formulái első csoportját kétszer kell egymás után alkalmazni; nyerjük így:

$$\left. \begin{aligned} \cos \varepsilon_1 &= \cos \eta \cos b_1 + \sin \eta \sin b_1 \cos (a_1 - \varphi); \\ \sin \psi_1 &= \sin \eta \frac{\sin (a_1 - \varphi)}{\sin \varepsilon_1}; \\ \cos \eta' &= \cos \varepsilon_1 \cos b_1 + \sin \varepsilon_1 \sin b_1 \cos (\psi_1 - \vartheta_1); \\ \sin (a_1 - \varphi') &= \sin \varepsilon_1 \frac{\sin (\psi_1 - \vartheta_1)}{\sin \eta'}. \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \varepsilon_2 &= \cos \eta' \cos b_2 + \sin \eta' \sin b_2 \cos (a_2 - \varphi'); \\ \sin \psi_2 &= \sin \eta' \frac{\sin (a_2 - \varphi')}{\sin \varepsilon_2}; \\ \cos \eta'' &= \cos \varepsilon_2 \cos b_2 + \sin \varepsilon_2 \sin b_2 \cos (\psi_2 - \vartheta_2); \\ \sin (a_2 - \varphi'') &= \sin \varepsilon_2 \frac{\sin (\psi_2 - \vartheta_2)}{\sin \eta''}. \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

Ezek az összefüggések megadják az A'' keresett coordinátáit, φ'' -t és η'' -t.

2. Ha a forgásokat fordított sorrendben alkalmaztuk volna, nevezetesen először az $O I_2$ körüli ϑ_2 forgást és azután az $O I_1$ körüli ϑ_1 forgást, akkor az (1) és (2) egyenletekben következő módosítás követendő:

Jeleljék $\varphi^{(1)}$ és $\eta^{(1)}$ az A -nak az $O I_2$ körüli forgás után beálló coordinátáit és $A^{(1)}$ a helyzetét; továbbá $\varphi^{(2)}$ és $\eta^{(2)}$ e coordinátákat az $O I_1$ körüli forgás után és $A^{(2)}$ a helyzetét.

Továbbá legyen:

$$\begin{aligned} I_2 A \text{ ív} &= \varepsilon_{(2)}; & (A I_2 K) \searrow &= \psi_{(2)} & (A^{(1)} I_2 K) \searrow &= \psi_{(2)} - \vartheta_2; \\ I_1 A^{(1)} \text{ ív} &= \varepsilon_{(1)}; & (A^{(1)} I_1 K) \searrow &= \psi_{(1)} & (A^{(1)} I_1 K) \searrow &= \psi_{(1)} - \vartheta_1. \end{aligned}$$

Ekkor az (1) és (2) egyenletekből leszzen:

$$\left. \begin{aligned} \cos \varepsilon_{(2)} &= \cos \eta \cos b_2 + \sin \eta \sin b_2 \cos (a_2 - \varphi); \\ \sin \psi_{(2)} &= \sin \eta \frac{\sin (a_2 - \varphi)}{\sin \varepsilon_{(2)}}. \\ \cos \eta^{(1)} &= \cos \varepsilon_{(2)} \cos b_2 + \sin \varepsilon_{(2)} \sin b_2 \cos (\psi_{(2)} - \vartheta_2); \\ \sin (a_2 - \varphi^{(1)}) &= \sin \varepsilon_{(2)} \frac{\sin (\psi_{(2)} - \vartheta_2)}{\sin \eta^{(1)}}. \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (1a)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \varepsilon_{(1)} &= \cos \eta^{(1)} \cos b_1 + \sin \eta^{(1)} \sin b_1 \cos (a_1 - \varphi^{(1)}); \\ \sin \psi_{(1)} &= \sin \eta^{(1)} \frac{\sin (a_1 - \varphi^{(1)})}{\sin \varepsilon_{(1)}}. \\ \cos \eta^{(11)} &= \cos \varepsilon_{(1)} \cos b_1 + \sin \varepsilon_{(1)} \sin b_1 \cos (\psi_{(1)} - \vartheta_1); \\ \sin (a_1 - \varphi^{(11)}) &= \sin \varepsilon_{(1)} \frac{\sin (\psi_{(1)} - \vartheta_1)}{\sin \eta^{(11)}}. \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (2a)$$

A $\varphi^{(1)}$ és $\eta^{(1)}$ coordináták általánosságban különböznek a megelőző 1. pontban fellépő φ'' és η'' összszerendezőktől.

229. §. Véges két gömbi forgás analitikai összetevése egy forgássá.

A megelőző §-ban alkalmazott két forgás eredménye abban áll, hogy az A pontnak eredeti φ és η coordinátái átmentek φ'' és η'' értékekbe (illetve a forgások sorrendjét változtatva, $\varphi^{(1)}$ és $\eta^{(1)}$ értékekbe).

Ezt az eredményt, a 225. §. értelmében, mindig egy forgás (az eredő forgás) által is elérhetni.

Jeleljék a , b ezen eredő forgás OI tengelye gömbi coordinátáit és ϑ e forgás szögét.

Akkor, a megelőző § első egymásutánját tartva meg, az a , b , ϑ , valamint az OI tengelyhez tartozó ε és ψ szögekre nézve áll:

$$\left. \begin{aligned} \cos \varepsilon &= \cos \eta \cos b + \sin \eta \sin b \cos (a - \varphi); \\ \sin \psi &= \sin \eta \frac{\sin (a - \varphi)}{\sin \varepsilon}. \\ \cos \eta' &= \cos \varepsilon \cos b + \sin \varepsilon \sin b \cos (\psi - \vartheta); \\ \sin (a - \varphi'') &= \sin \varepsilon \frac{\sin (\psi - \vartheta)}{\sin \eta''}. \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (1)$$

Ezen egyenletekben a φ és η és a φ'' és η'' ismereteseknek tekintendők; ismeretlenek ellenben az ε , a ψ , az a , a b , és a ϑ .

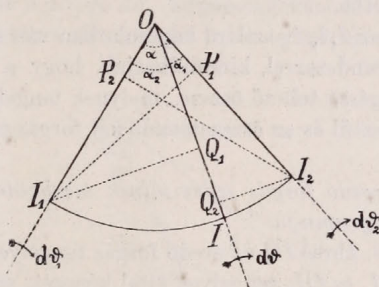
A négy egyenlet ezeknek meghatározására nem elegendő; ezért még egy másik pl. a B gömbfelületi pontnak eredeti φ_1 , η_1 és változott. φ_1' , η_1'' coordinátáit kell ismernünk, melyek segítségével a B -hez tartozó (1) egyenleteket képezzük és megjegyezzük, hogy az AB ív mindig egyenlő az $A''B''$ ívvel.

A továbbira nézve a 212. §. megfontolásai alkalmazandók; az olvasó könnyen írhatja fel a származó eredményt.

Tekintve, hogy a formulák nem adnak több felvilágosítást a gömbi mozgás tulajdonságaira nézve, mint a 206—210. §§. geometriai tárgyalásai, a *véges* forgások analitikai tárgyalását nem folytatjuk, hanem áttérünk a végtelen kicsiny, *elemi* forgások összetevése és szétbontása tárgyalására.

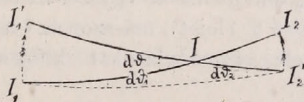
230. §. *Pont körüli elemi forgások összetevése egy elemi (eredő) forgássá.*

A merev pontrendszer oly két elemi (végtelen kicsiny) forgást szenvedjen, melyek tengelyei a rendszer szilárd O pontján mennek keresztül (199. ábra).



199. ábra.

Legyen OI_1 és OI_2 ez a két tengely, $d\theta_1$ és $d\theta_2$ az első, illetve a második tengely körüli forgás szöge, I_1 és I_2 a két pólus (az a két pont, melyben a két tengely az O középpontú különben tetszőleges sugarú gömbfelületet metszi).



200. ábra.

Mily elmozdulást szenved a merev rendszerrel a gömbfelületen mozgó I_1I_2 legnagyobb körív a két elemi forgásnak egymásután való alkalmazása által?

Bocsássunk az I_2 -ből az első tengelyre I_2P_2 , az I_1 -ből a második tengelyre I_1P_1 merőlegeseket (199. §.); jegyezzük továbbá meg, hogy az I_1 pontot az OI_1 körüli forgás nem mozgíthat el, hanem csak az OI_2 körüli, mely által I_1 a rajz síkja fölé, arra merőlegesen, $\overline{I_1P_1}$. $d\theta_1$ nagyságú

elmozdulást nyer, míg az I_2 pont az OI_2 körüli forgás folytán nem mozdul el, hanem csak az OI_1 körüli forgás által, mely az I_2 -öt a rajz síkja alá, reá merőlegesen I_2P_2 . $d\theta_2$ nagyságú elmozdulással helyezi el.

Az 200. ábra mutatja az I_1I_2 ív elmozdulását: I_1I_2 eredeti helyzete, $I_1'I_2'$ a helyzet a két elemi forgás után. A fent tett megjegyzés szerint az I_1I_1' és az I_2I_2' végtelen kicsiny ívelemek, másodrendű menynyiségek elhanyagolásával, az I_1I_2 ív megfelelő végeire is merőlegeseknek tekinthetők.

A két helyzet I_1OI_2 és $I_1'OI_2'$ síkjai egymást általánosságban metszik; legyen OI ez a metszővonal (199. ábra), mely mindig a két tengely által képezett I_1OI_2 síkban fekszik; mivel még I_1I_1' és I_2I_2' merőlegesek az I_1I_2 végeire, az I_1I_2 -t az OI vonal körüli $d\theta$ szögű forgás által hozhatjuk $I_1'I_2'$ helyzetbe.

Mivel végre az I_1I_2 ív szilárd kapcsolatban van az O körül forogható merev pontrendszerrel, kimondhatjuk, hogy a két elemi forgás egy oly eredő forgássá tehető össze, melynek tengelye a szilárd ponton megyen keresztül és az összezteendő két forgás tengelyei síkjában fekszik.

231. §. *Az eredő forgás jellemzőinek meghatározása. Az elemi forgások parallelogrammja.*

Legyen (199. ábra) OI az eredő forgás tengelye, $d\theta$ forgásszöge, továbbá α az OI_1 és OI_2 tengelyek által képezett szög és α_1 és α_2 az OI és az OI_2 illetve az OI és az OI_1 közötti szögek, hol α , α_1 , α_2 egy síkban fekszenek. Az eredő forgásnak lényeges tulajdonsága az, hogy az általa létesített elmozdulásoknak egyenlőknek kell lenniök azon elmozdulások geometriai összegével, melyeket az OI_1 körüli $d\theta_1$ szögű és az OI_2 körüli $d\theta_2$ szögű két forgás létesít.

Bocsássunk az I_1 és I_2 -ből az OI -ra I_1Q_1 és I_2Q_2 merőlegeseket; fejezzük ki az I_1 és I_2 elmozdulását egyszer az összezteendő két forgásból (v. ö. a megelőző §. elejét), másszor az eredő forgásból.

Akkor a nevezett elmozdulásokat kifejezi a következő két egyenlet:

$$\left. \begin{array}{l} I_1 \text{ elmozdulása: } \overline{I_1P_1} \cdot d\theta_2 = \overline{I_1Q_1} \cdot d\theta; \\ I_2 \text{ elmozdulása: } \overline{I_2P_2} \cdot d\theta_1 = \overline{I_2Q_2} \cdot d\theta. \end{array} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

hol még $I_1P_1 = I_2P_2$.

Ámde a 199. ábra szerint:

$$\overline{I_1P_1} : \overline{I_1Q_1} = \sin \alpha : \sin \alpha_2; \quad \overline{I_2P_2} : \overline{I_2Q_2} = \sin \alpha : \sin \alpha_1.$$

Ezekből az (1) a következő kettős viszony segítségével fejezhető ki:

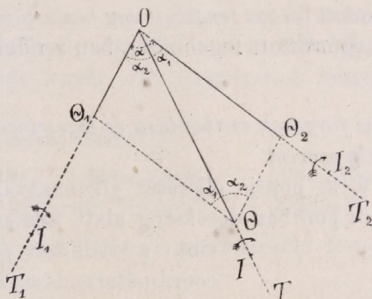
$$d\vartheta : d\vartheta_1 : d\vartheta_2 = \sin \alpha : \sin \alpha_1 : \sin \alpha_2, \quad \dots \quad (2)$$

mely összefüggés igen egyszerű geometriai interpretációt enged meg.

Rajzoljuk fel ugyanis az egymást α szög alatt metsző forgástengelyeket, OT_1 -et és OT_2 -őt (201. ábra); messük le belőlük az $O\theta_1$ és $O\theta_2$ részeket, melyek hosszúsága a $d\vartheta_1$ és $d\vartheta_2$ forgásszögekkel arányos, és egészítsük ki a $\theta_1 O \theta_2$ alakot a $\theta_1 O \theta_2 \theta_1$ egyenközénnyé. Jelelve α_1 - és α_2 -vel az $O\theta$ átló és az $O\theta_2$, illetve az $O\theta_1$ között lévő szögeket, az ábra szerint:

$$\overline{O\theta} : \overline{O\theta_1} : \overline{O\theta_2} = \sin \alpha : \sin \alpha_1 : \sin \alpha_2 \quad \dots \quad (3)$$

E szerint az $\overline{O\theta}$ átló épen úgy arányos a $d\vartheta$ forgásszöggel, mint az $\overline{O\theta_1}$ és $\overline{O\theta_2}$ oldalak a $d\vartheta_1$ és $d\vartheta_2$ forgásszögekkel és az itt használt α_1 és α_2 szögek egyenlők a (2) egyenlet α_1 és α_2 szögeivel.



201. ábra.

Ezek értelmében az $O\theta$ átló iránya (fekvése) megegyezik az eredő forgás OI tengelye fekvésével (199. ábra), míg hosszúsága az eredő forgás szögével egyenesen arányos.

A (2) vagy a (3) összefüggést az *elemi forgások parallelogrammja* tételének nevezik.

232. Az elemi forgás vector mennyiség. Az összetétel tételének általánosítása és megfordítása.

1. A megelőző §-ban bebizonyított tétel szerint az elemi forgások összetételéből származó eredő elemi forgásnak jellemzői a vectorok iszálya szerint (17. §.) következnek az összeteteendő forgások jellemzőiből; e szerint az eredő valamint az összeteteendő forgások is csak *vectorok* lehetnek.

A forgást *vector*nak tekintve (201. ábra), ezen *vector nagysága* (abszolút értéke) a *forgás szögének nagyságával* egyenlő vagy vele egye-

nesen arányos, e *vector iránya* pedig a *forgás tengelyének iránya*. A forgás előjelét a 24. §. 2. pontjának megállapodásai adják meg.

A forgások paralelogrammjának tétele azonnal általánosítható.

2. Tetszőleges számú oly elemi forgások, melyek tengelyei egymást közös O pontban metszik, a *vectorok szabályai* értelmében akként összegeztetnek, hogy az $O\theta_1, O\theta_2, \dots$ vonalak, melyek ezeket az elemi forgásokat *nagyság és irány szerint képviselik*, a *forgások polygonjává* (v. ö. 18. §-ot) tételnek össze, mely *polygon átlója* irány és nagyság szerint képviseli az *eredő elemi forgást*.

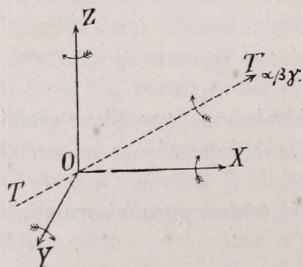
3. Szemmel tartva az elemi forgások összetevése alkalmával követett ezen eljárást, a talált eredményt még másként és pedig a tétel megfordítására alkalmas módon fejezhetni ki.

Ugyanis (201. ábra) az OI körüli $d\theta$ forgást az OI_1 és OI_2 körüli $d\theta_1$ és $d\theta_2$ forgások által helyettesíthetjük, más szóval: *minden elemi forgást szétbonthatjuk két (vagy több) oly elemi forgásra, melyek tengelyei az adott forgás tengelyét egy közös pontban metszik*.

A tétel ily megfordított fogalmazásában rendkívül fontos (v. ö. a következő §-t).

233. §. *Elemi forgások szétbontása és összetevése egymásra merőleges három tengely szerint.*

A megelőző §. 3. pontja eljárását alkalmazva, bontsuk szét az elemi forgást közös pontban derékszög alatt találkozó tengelyek szerint; a találkozás (metszés) pontja a koordinátarendszer kezdetének választassék.



202. ábra.

1. Legyen (202. ábra) TT az adott elemi (momentán, instantán, pillanati) forgás tengelye, α, β, γ ezen tengely iránycosinusai és $d\theta$ a TT körüli elemi forgás szöge.

Válasszunk a TT egyenesben tetszőleges O pontot, melyből kiindulól az OX , az OY és az OZ tengelyeket húzzuk. Mivel e tengelyek

egymást közös O pontjukban metszik, a megelőző §. 3. pontja értelmében a TT körüli $d\theta$ szögű forgást szabad az OX , az OY és az OZ tengelyek körüli $d\theta_x$, $d\theta_y$, $d\theta_z$ -szögű forgásokra szétbontani.

Az elemi forgások polygonja itt egymásra merőleges és koordináta tengelyekhez párhuzamos vonalakkal áll, melyek az átlónak derékszögű vetületei (v. ö. a 19. §-ot és az 5. ábrát, 18. l.); ezért rendre :

$$\left. \begin{aligned} d\vartheta_x &= \alpha d\vartheta; & d\vartheta_y &= \beta d\vartheta; & d\vartheta_z &= \gamma d\vartheta; \\ (d\vartheta_x)^2 + (d\vartheta_y)^2 + (d\vartheta_z)^2 &= (d\vartheta)^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

szóval: bármily tengely körüli elemi forgás szétbontható egymásra merőleges három tengely körüli oly forgásra, melyek forgásszögei az eredeti forgás szögének derékszögű vetületei e tengelyek szerint.

2. A megelőző pont tétele azonnal megfordítható; ugyanis ha egymást derékszög alatt metsző három tengely körüli forgás adva van, melyek jellemzői $d\vartheta_x$, $d\vartheta_y$, $d\vartheta_z$, akkor az eredő forgásnak $d\vartheta$ szöge és tengelyének az adott tengelyekhez viszonyított α , β , γ iránycosinuszai az (1) egyenletrendszerből kiszámíthatók.

3. Az (1) pont tétele nagy előnnyel alkalmazható, ha tetszőleges számú oly forgást akarunk analitikailag összerakni, melyek tengelyei egymást közös pontban metszik.

Ezen forgások tengelyeinek iránycosinuszai és forgásszögei legyenek rendre:

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, d\vartheta_1; \quad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, d\vartheta_2; \quad \dots \dots, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k, d\vartheta_k; \quad \dots$$

az eredő forgás szöge legyen $d\vartheta$, tengelyének iránycosinuszai pedig α , β , γ .

A vectorok szabályai szerint:

$$\left. \begin{aligned} \alpha d\vartheta &= \sum \alpha_k d\vartheta_k, & \beta d\vartheta &= \sum \beta_k d\vartheta_k, & \gamma d\vartheta &= \sum \gamma_k d\vartheta_k. \\ (d\vartheta)^2 &= [\sum \alpha_k d\vartheta_k]^2 + [\sum \beta_k d\vartheta_k]^2 + [\sum \gamma_k d\vartheta_k]^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots (2)$$

hol az összegeзések valamenynyi összezteendő forgásra terjeszten-dők ki.

234. §. *Elemi forgás által létesített elmozdulás, kifejezve a forgás derékszögű összetevői által létesített elmozdulások segélyével.*

Tekintsünk valamely O szilárd pont körüli elemi forgást, melynek tengelye TT , forgásszöge $d\vartheta$ legyen (202. ábra).

Legyen ez az O az XYZ koordináta-rendszer kezdete; bontsuk szét e forgást az OX , az OY , az OZ tengelyek körüli-, $d\vartheta_x$, $d\vartheta_y$, $d\vartheta_z$ -szögű forgásokra és vizsgáljuk meg azokat az elmozdulásokat, melyeket a rendszer tetszőleges A pontja ezen egyes forgások folytán szenved.

Jeleljék x , y , z az A pont eredeti coordinátáit; dx , dy , dz ezeknek e három forgás következtében beálló változásait.

Vetítsük az A pontot a coordináta-síkokra és határozzuk meg e vetületek elmozdulásait.

1. Legyen (203. ábra) A_1 az A -nak vetülete az XY síkra, melynek positiv normálisa az O -ból a rajz lapjára merőlegesen, de *lefelé* húzott Z -tengely; A'_1 e vetület helye az említett forgások alkalmazása után.

A $d\vartheta_x$ -, $d\vartheta_y$ -, $d\vartheta_z$ -szögű forgások közül az első kettő, mely az X és az Y tengely körül történik, csak másodrendű csekély mennyiségekkel

változtathatja meg az A_1 helyzetét az XY síkban; ellenben a harmadik az A_1 coordinátáit elsőrendű mennyiségekkel változtatja meg.

Az A_1 coordinátái:

$$x \quad , \quad y$$

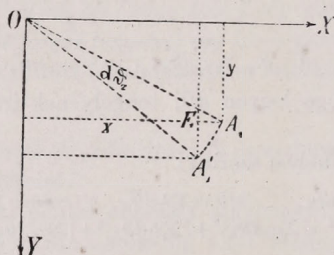
Az A_1 coordinátái [162. §. (1), hol $a = b = 0$, és ϑ helyébe $d\vartheta_z$ teendő]:

$$x \cos d\vartheta_z - y \sin d\vartheta_z \quad y \cos d\vartheta_z + x \sin d\vartheta_z .$$

E szerint a $d\vartheta_z$ -szögű forgás az x és y coordinátákban következő változást létesített:

$$-y d\vartheta_z \quad \text{és} \quad +x d\vartheta_z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

2. Az A pont vetülete az YZ síkra y és z összszerendezőkkel bír; ezeket a $d\vartheta_y$ - és $d\vartheta_z$ -szögű forgások csak másodrendű csekély mennyi-



203. ábra.

ségekkel, a $d\vartheta_x$ -szögű pedig elsőrendűekkel változtatja; ezen változásokat az (1) változásokból a betűk és a jelző cyclusos felcserélése által nyerjük:

$$-z d\vartheta_x \quad \text{és} \quad +y d\vartheta_x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

3. Az A pont vetülete az ZX síkra z és x összszerendezőkkel bír; ezekben elsőrendű csekély változásokat csak a $d\vartheta_y$ -szögű forgás létesíthet; az z - és x -nek ebből származó változása a (2)-ből cyclusos felcserélés alapján is nyerhető:

$$-x d\vartheta_y \quad \text{és} \quad +z d\vartheta_y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

4. Összefoglalva ezeket a változásokat, a $d\vartheta_x$ -, $d\vartheta_y$ -, $d\vartheta_z$ -szögű három forgás az A pont x , y , z coordinátáit a következő mennyiségekkel változtatta:

$$\left. \begin{aligned} dx &= z d\vartheta_y - y d\vartheta_z ; \\ dy &= x d\vartheta_z - z d\vartheta_x ; \\ dz &= y d\vartheta_x - x d\vartheta_y . \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

5. Amde, mivel a TT tengely iránycosinusai α, β, γ és $d\vartheta_x = \alpha d\vartheta$, s i. t., [233. §. 1.] ez a három egyenlet még írható:

$$\left. \begin{aligned} dx &= (\beta z - \gamma y) d\vartheta \\ dy &= (\gamma x - \alpha z) d\vartheta \\ dz &= (\alpha y - \beta x) d\vartheta \end{aligned} \right\}, \dots \dots \dots (5)$$

hol az A elmozdulásának derékszögű összetevőit az eredetileg adott, $d\vartheta$ -szögű, α, β, γ iránycosinusú forgás jellemzői fejezik ki. E kifejezések a 216. §. (1) formuláival megegyeznek.

235. §. *A tengely körüli forgásszög derékszögű vetületei a tengelyek szerint nem egyenlők a vezérsugárnak a kezdőpont körüli forgásszöge vetületeivel az összszerendezői síkokra.*

Ha a koordináták O kezdetétől r távolságban lévő A pontnak x, y, z összszerendezői dx, dy, dz tetszőleges értékekkel változnak, akkor az r értéke átmegy $r+dr$ -be, továbbá az r és az $r+dr$ által képezett szög $d\eta$ és az általuk bezárt terület df . Ezen területnek és a $d\eta$ -nak vetületei a koordináta-síkokra rendre $df_{yz}, df_{zx}, df_{xy}$; $d\eta_{yz}, d\eta_{zx}, d\eta_{xy}$, és ezekre nézve a 37. §. (2). szerint áll:

$$\left. \begin{aligned} 2df_{yz} &= (y^2 + z^2) d\eta_{yz} = ydz - zdy; \\ 2df_{zx} &= (z^2 + x^2) d\eta_{zx} = zdx - xdz; \\ 2df_{xy} &= (x^2 + y^2) d\eta_{xy} = xdy - ydx; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

és még:

$$zdf_{yz} + ydf_{zx} + xdf_{xy} = 0.$$

Ezek az egyenletek még a $dr=0$, azaz, az

$$xdx + ydy + zdz = 0$$

esetében, ugyanis a gömbi mozgásnál is fennállanak.

Nagyon könnyű annak bebizonyítása, hogy ezek a $d\eta_{yz}, d\eta_{zx}, d\eta_{xy}$ szögek általánosságban véve különböznek a megelőző két §.-ban fellépő $d\vartheta_x, d\vartheta_y, d\vartheta_z$ szögektől.

Ugyanis, ha a megelőző §. (4) egyenletei harmadikát y -nal, másodikát z -vel szorozzuk és a kettő különbségét képezzük, akkor

$$ydz - zdy = (y^2 + z^2) d\vartheta_x - x(yd\vartheta_y + zd\vartheta_z), \text{ s i. t. } \dots \dots (4)$$

Összehasonlítva a (4)-et a (3)-al, kiderül, hogy a $d\vartheta_x$ és $d\eta_{yz}$ s i. t. szögek csak akkor volnának egyenlők egymással, ha állana:

$$yd\vartheta_y + zd\vartheta_z = 0; \quad zd\vartheta_z + xd\vartheta_x = 0; \quad xd\vartheta_x + yd\vartheta_y = 0;$$

azaz, ha külön-külön volna

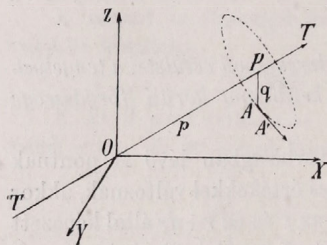
$$0 = xd\vartheta_x = yd\vartheta_y = zd\vartheta_z = 0.$$

Ámde, a koordináták értéke általánosságban nem lévén zérus, a forgásszögeknek kell zérussal egyenlőknek lenniök, mi nyugalmat involvál.

E szerint, minden elmozdulásnál a nevezett szögek különbözők és mindennemű vizsgálatnál egymástól szigorúan elválasztandók [v. ö. az 57. §-t, melyben $d\theta$ áll a jelen §. $d\theta$ szöge helyett].

236. §. *A felületi (sectoriális) sebesség a pont körüli mozgásnál.*

Jeleljék, mint a megelőző §-ban, r a rendszer tetszőleges A pontjának távolságát a kezdettől (184. és 204. ábrák); x, y, z a derékszögű koordinátáit álló rendszerre nézve és q a távolságát a momentán forgás tengelyétől, $d\theta$ az ezen tengely körüli forgás elemi szögét és $d\eta$ az r -nek O körüli elemi forgásszögét, df az r által leírt terület sectoriális eleme; végre $d\eta_{yz}$, $d\eta_{zx}$, $d\eta_{xy}$ és df_{yz} , df_{zx} , df_{xy} a $d\eta$ -nak, illetve df -nek vetületeit az YZ , ZX , XY síkokra.



204. ábra.

Az A sebességi összetevői v_x , v_y , v_z ; a sebesség értékét szabad írunk:

$$v = q \frac{d\theta}{dt} = r \frac{d\eta}{dt} = v \quad \dots \quad (1)$$

A df terület a 37. §. (2) sémája szerint $\frac{1}{2}r^2 d\eta$ értékű lévén, a felületi sebesség itt:

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{2}rq \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}rv = \frac{df}{dt} \quad \dots \quad (2)$$

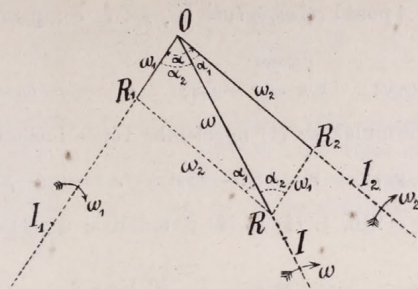
Ámde, mivel itt a v mindig merőleges az r irányára, az rv szorzat nem jelent egyebet, mint a sebesség nyomatékát, vonatkoztatva a rendszer szilárd pontjára és e nyomaték itt is egyenlő a felületi (sectoriális) sebesség kétszeresével.

A nyomaték értéke (rv) , iránya pedig az r és v egyenesek síkjára emelt pozitív normális iránya (54. §. Jegyzete).

A df vetületeit a dt -vel osztva, nyerjük a felületi sebesség (illetve a sebesség nyomatéka felének) vetületeit a koordináta-síkokra [53. §. (3)], azaz rendre:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(rv)_{yz} &= \frac{df_{yz}}{dt} = \frac{1}{2}(yv_z - zv_y); \\ \frac{1}{2}(rv)_{zx} &= \frac{df_{zx}}{dt} = \frac{1}{2}(zv_x - xv_z); \\ \frac{1}{2}(rv)_{xy} &= \frac{df_{xy}}{dt} = \frac{1}{2}(xv_y - yv_x); \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (3)$$

E szerint a sebességnek ezen (rv) nyomatéka itt minden tekintetben bír a 54. §-ban megállapított vectortulajdonságokkal és ha λ -, μ -,



205. ábra.

239. §. Szögsebességek vonatkoztatása derékszögű koordinátákra. Összzetevés. Az elmozdulás és a forgássebesség derékszögű componensei.

1. Jeleljék ω a szögsebességet, α, β, γ tengelyének iránycosinusait; fektessük a tengelyrendszer kezdőpontját a forgás tengelyébe (233. §.), akkor a szögsebességet az összzrendezői tengelyek körüli $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ szögsebességekre bontva szét, ezek számára áll:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \alpha \omega; & \omega_y &= \beta \omega; & \omega_z &= \gamma \omega. \\ \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 &= \omega^2. \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

2. Ha az adott és összzetevendő szögsebességek $\omega_1 \dots \omega_k \dots$, és közös metszőponttal bíró tengelyeik irányát az $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots \alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \dots$ iránycosinusok adják meg, míg ω és α, β, γ az eredő szögsebesség jellemzői, akkor ezekre nézve áll [233. §. (2)]:

$$\begin{aligned} \alpha \omega &= \sum \alpha_k \omega_k; & \beta \omega &= \sum \beta_k \omega_k; & \gamma \omega &= \sum \gamma_k \omega_k; \\ \omega^2 &= [\sum \alpha_k \omega_k]^2 + [\sum \beta_k \omega_k]^2 + [\sum \gamma_k \omega_k]^2. \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Megfelelőleg a megelőző §-nak áll:

$$d\theta_x = \omega_x dt, \quad d\theta_y = \omega_y dt, \quad d\theta_z = \omega_z dt; \quad \dots \dots \dots (3)$$

továbbá, a 234. §. (4) egyenletei szerint kifejezhetjük a merev rendszer (xyz) összzrendezőjű A pontjának az elemi forgás által létesített elmozdulása vetületeit, dx -t, dy -t, dz -t:

$$dx = (z\omega_y - y\omega_z) dt, \quad dy = (x\omega_z - z\omega_x) dt, \quad dz = (y\omega_x - x\omega_y) dt \quad (4)$$

Az α, β, γ tengely körüli ω szögsebesség értelmében a tengelytől q távolban lévő xyz összzrendezőjű A pont teljes elmozdulása:

$$q\omega dt, \quad \dots \dots \dots (5)$$

míg a (4) alatt felírt dx, dy, dz elmozdulások ezen (5) elmozdulás derékszögű componensei.

3. A (4) és (5) elmozdulások sebességeit nyerjük, ha kifejezéseiket dt -vel osztjuk.

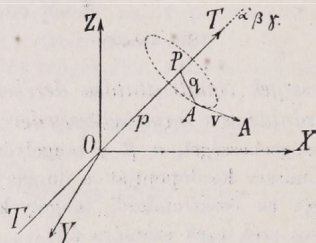
E szerint az A pont v sebességének v_x , v_y , v_z componensei (206. ábra):

$$\left. \begin{aligned} v &= q\omega; \\ v_x &= \omega_y z - \omega_z y; & v_y &= \omega_z x - \omega_x z; & v_z &= \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

Az utóbbi formulák az (1) figyelembe vétele mellett:

$$v_x = \omega(\beta z - \gamma y); \quad v_y = \omega(\gamma x - \alpha z); \quad v_z = \omega(\alpha y - \beta x), \dots (7)$$

mely kifejezések a 216. §. (4) és (2) formuláival egyeznek meg.



206. ábra.

240. §. A szögsebesség derékszögű összetevőinek kifejezése az Euler-féle szögsebességi componensek segélyével és megfordítva.

Legyen, mint a 213. §-ban XYZ az álló, X, Y, Z , a merev pontrendszerrel mozgó (az elszállító) derékszögű koordináta-rendszer, ω_x , ω_y , ω_z , az elsőre, ω_x , ω_y , ω_z , a második rendszerre vonatkozó szögsebességek; a két rendszer iránycosinusai megegyeznek a 213. és 214. §§-ban bevezetett $\alpha_1 \dots \gamma_3$ szögekkel. A 181. ábrát itt is tekinthetjük érvényesnek, csak hogy az ottani $X_1 Y_1 Z_1$ jelölés helyébe itt az X, Y, Z , jelölés lép.

Az ω szögsebességet, mint vectort, nemcsak derékszögű, hanem ferdeszögű tengelyekre is szabad vonatkoztatnunk és vetítenünk; legyenek az idézett ábrában OZ , OX' , OZ' , e ferdeszögű tengelyek és ω_ψ , ω_θ , ω_φ , a hozzájuk tartozó Euler-féle összetevői az ω -nak.

1. A OZ , OX' , OZ' tengelyekkel az OX rendre képezi az $\frac{1}{2}\pi$, ψ , γ_1 ; az OY pedig az $\frac{1}{2}\pi$, $(\frac{1}{2}\pi - \psi)$, γ_2 ; az OZ végre az 0 , $\frac{1}{2}\pi$, θ szögeket.

Képezve a vectorok szabálya szerint [19. §. (4) formula] az ω_x , ω_y , ω_z összetevőket:

$$\omega_x = \omega_\psi \cos(\frac{1}{2}\pi) + \omega_\theta \cos \psi + \omega_\varphi \cos \gamma_1,$$

$$\omega_y = \omega_\psi \cos(\frac{1}{2}\pi) + \omega_\theta \cos(\frac{1}{2}\pi - \psi) + \omega_\varphi \cos \gamma_2,$$

$$\omega_z = \omega_\psi \cos 0 + \omega_\theta \cos(\frac{1}{2}\pi) + \omega_\varphi \cos \theta;$$

avagy tekintettel a 213. §. (2) formuláiban lévő $\cos \gamma_1$ és $\cos \gamma_2$ értékeire:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \omega_\theta \cos \psi + \omega_\varphi \sin \psi \sin \theta; \\ \omega_y &= \omega_\theta \sin \psi - \omega_\varphi \cos \psi \sin \theta; \\ \omega_z &= \omega_\psi + \omega_\varphi \cos \theta. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

2. Az OZ , OX , OY , tengelyekkel az OX , rendre képezi az α_3 , φ , $\frac{1}{2}\pi$; az OY , pedig a β_3 , $(\frac{1}{2}\pi + \varphi)$, $\frac{1}{2}\pi$; az OZ , végre a θ , $\frac{1}{2}\pi$, 0 szögeket.

A megelőző 1. pont eljárása szerint képezve az ω_x , ω_y , ω_z , összezetevőket, és tekintetbe véve 213. §. (2) formuláiban a $\cos \alpha_3$ és $\cos \beta_3$ értékeit, származik:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \omega_\psi \sin \varphi \sin \theta + \omega_\theta \cos \varphi, \\ \omega_y &= \omega_\psi \cos \varphi \sin \theta - \omega_\theta \sin \varphi, \\ \omega_z &= \omega_\psi \cos \theta + \omega_\varphi. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

3. Az (1) és (2) egyenletekből a derékszögű összetevőket is fejezhetni ki az EULER-félék segítségével.

a. Az (1) rendszerből egyszerű elimináció után ered:

$$\left. \begin{aligned} \omega_\psi \sin \theta &= \omega_z \sin \theta - \omega_x \sin \psi \cos \theta + \omega_y \cos \psi \cos \theta, \\ \omega_\theta &= \omega_x \cos \psi + \omega_y \sin \psi, \\ \omega_\varphi \sin \theta &= \omega_x \sin \psi - \omega_y \cos \psi. \end{aligned} \right\} \dots \dots (3)$$

b. A (2) rendszerből:

$$\left. \begin{aligned} \omega_\psi \sin \theta &= \omega_x \sin \varphi + \omega_y \cos \varphi, \\ \omega_\theta &= \omega_x \cos \varphi - \omega_y \sin \varphi, \\ \omega_\varphi \sin \theta &= \omega_z \sin \theta - \omega_x \sin \varphi \cos \theta - \omega_y \cos \varphi \cos \theta. \end{aligned} \right\} \dots \dots (4)$$

A (3) és (4) kifejezések szintén gyakran alkalmazhatnák.

5. Gömbi elemi mozgások általános analitikai megvizsgálása.

241. §. Közös kezdetű, álló és forgó (szilárd és elszállító) két derékszögű coordináta-rendszer geometriai vonatkozásai.

Legyen a szilárd pont a coordináták kezdete; jeleljék x , y , z a merev pontrendszer tetszőleges A pontjának coordinátáit a térben nyugvó XYZ rendszerben, ellenben x' , y' , z' , ugyanezen pontét a merev pontrendszerrel szilárd kapcsolatban lévő X,Y,Z , rendszerben (207. ábra).

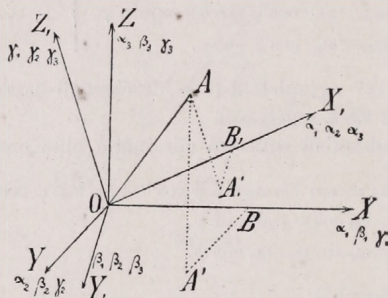
Ezen X,Y,Z , rendszert joggal nevezzük *elszállító* coordináta-rendszernek, mivel ez a mozgó pontrendszert magával ragadja, elszállítja. A 335. s a reá következő §§-okban oly elszállító tengelyrendszert is fogunk használni, melynek mozgása nem egyezik meg a pontrendszerével.

Jeleljék továbbá α_1 , α_3 , α_3 az X , tengely és az X , Y , Z tengelyek által képezett szögek iránycosinusait, továbbá β_1 , β_2 , β_3 , illetve γ_1 , γ_2 , γ_3 az Y , illetve Z , és az X , Y , Z közötti szögek iránycosinusait. A transzformáló formulák [Math. repertorium 48. §. (2)]:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 a_1 + y_1 \beta_1 + z_1 \gamma_1 \\ y &= x_2 a_2 + y_2 \beta_2 + z_2 \gamma_2 \\ z &= x_3 a_3 + y_3 \beta_3 + z_3 \gamma_3 \end{aligned} \right\}; \quad \dots \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 a_1 + y_1 \beta_1 + z_1 \gamma_1 \\ y &= x_2 a_2 + y_2 \beta_2 + z_2 \gamma_2 \\ z &= x_3 a_3 + y_3 \beta_3 + z_3 \gamma_3 \end{aligned} \right\} \cdot \quad \dots \quad (2)$$

A kilencz iránycosinus között fennálló kapcsolatok [Math. repertorium 46. és 47. §§.] itt:



207. ábra.

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1 \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 &= 1 \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 &= 0 \\ \alpha_3 \alpha_1 + \beta_3 \beta_1 + \gamma_3 \gamma_1 &= 0 \\ \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \cdot \quad \dots \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 &= 1 \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 &= 1 \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1 \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} \beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3 &= 0 \\ \gamma_1 \alpha_1 + \gamma_2 \alpha_2 + \gamma_3 \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \cdot \quad \dots \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_2 \gamma_3 - \gamma_2 \beta_3, & \alpha_2 &= \beta_3 \gamma_1 - \gamma_3 \beta_1, & \alpha_3 &= \beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2, \\ \beta_1 &= \gamma_2 \alpha_3 - \alpha_2 \gamma_3, & \beta_2 &= \gamma_3 \alpha_1 - \alpha_3 \gamma_1, & \beta_3 &= \gamma_1 \alpha_2 - \alpha_1 \gamma_2, \\ \gamma_1 &= \alpha_2 \beta_3 - \beta_2 \alpha_3, & \gamma_2 &= \alpha_3 \beta_1 - \beta_3 \alpha_1, & \gamma_3 &= \alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2, \end{aligned} \right\} \cdot \quad (5)$$

$$\left| \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{array} \right|^2 = 1 \quad \dots \quad (6)$$

A (3)—(6) egyenletek közül csak hat független, a többi ezekből következik.

242. §. A momentán forgás jellemzői, kifejezve a szilárd koordináta-rendszerre vonatkoztatott adatok segítségével.

A pontrendszer az X, Y, Z , tengelyekkel együtt O körül forog és így az x, y, z , koordináták állandók; az A pont sebességi összetevői a megelőző §. (1) formuláiból

$$\left. \begin{aligned} v_x &= x, \alpha'_1 + y, \beta'_1 + z, \gamma'_1 \\ v_y &= x, \alpha'_2 + y, \beta'_2 + z, \gamma'_2 \\ v_z &= x, \alpha'_3 + y, \beta'_3 + z, \gamma'_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Ha az (1)-be az x, y, z , értékeit a megelőző §. (2) egyenleteiből helyetteszük, és megjegyezzük, hogy u. o. a (3) első három egyenleteiből:

$$\alpha_1 \alpha'_1 + \beta_1 \beta'_1 + \gamma_1 \gamma'_1 = 0, \quad \alpha_2 \alpha'_2 + \beta_2 \beta'_2 + \gamma_2 \gamma'_2 = 0, \quad \alpha_3 \alpha'_3 + \beta_3 \beta'_3 + \gamma_3 \gamma'_3 = 0,$$

az (1) egyenletek alakja:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= y(\alpha_3 \alpha'_1 + \beta_3 \beta'_1 + \gamma_3 \gamma'_1) + z(\alpha_3 \alpha'_1 + \beta_3 \beta'_1 + \gamma_3 \gamma'_1), \\ v_y &= z(\alpha_3 \alpha'_2 + \beta_3 \beta'_2 + \gamma_3 \gamma'_2) + x(\alpha_1 \alpha'_2 + \beta_1 \beta'_2 + \gamma_1 \gamma'_2), \\ v_z &= x(\alpha_1 \alpha'_3 + \beta_1 \beta'_3 + \gamma_1 \gamma'_3) + y(\alpha_2 \alpha'_3 + \beta_2 \beta'_3 + \gamma_2 \gamma'_3). \end{aligned} \right\}$$

Ámde ezek az egyenletek a megelőző §. (3) második csoportja értelmében nagyon összevonhatók. Írjunk rövidség kedvéért ezek alapján:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \alpha_2 \alpha'_3 + \beta_2 \beta'_3 + \gamma_2 \gamma'_3 = -(\alpha_3 \alpha'_2 + \beta_3 \beta'_2 + \gamma_3 \gamma'_2) = -\omega_y \\ \omega_y &= \alpha_3 \alpha'_1 + \beta_3 \beta'_1 + \gamma_3 \gamma'_1 = -(\alpha_1 \alpha'_3 + \beta_1 \beta'_3 + \gamma_1 \gamma'_3) = -\omega_z \\ \omega_z &= \alpha_1 \alpha'_2 + \beta_1 \beta'_2 + \gamma_1 \gamma'_2 = -(\alpha_2 \alpha'_1 + \beta_2 \beta'_1 + \gamma_2 \gamma'_1) = -\omega_x \end{aligned} \right\}^* \dots \dots (2)$$

miáltal végre:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= x' = \omega_y z - \omega_z y \\ v_y &= y' = \omega_z x - \omega_x z \\ v_z &= z' = \omega_x y - \omega_y x \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Ezek a kifejezések teljesen megegyeznek a sebesség összetevőinek azon kifejezéseivel, melyeket a 239. §. (6) egyenleteiben találtuk; e szerint, tekintve az idézett eredményt, a (3) egyenletek oly momentán forgást képviselnek, melynek szögsebességi vetületei az álló koordináták tengelyeire rendre a (2) formulák szerint $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, míg a szilárd ponton átmenő forgástengely egyenlete a 237. §. (1) és (2) egyenletei értelmében:

$$\left. \begin{aligned} x : \omega_x &= y : \omega_y = z : \omega_z \\ \omega &= [\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

243. §. A momentán forgás jellemzői, kifejezve a mozgó (elszállító) koordináta-rendszerre vonatkoztatott adatok segítségével.

Vetítsük most a rendszer A pontjának sebességét az X , az Y , a Z , tengelyek mentébe (207. ábra); jelelve v_x, v_y, v_z -el ezeket a vetületeket, értékük a vectorok szabályai szerint [19. §. (4) formulája]:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \alpha_1 v_x + \alpha_2 v_y + \alpha_3 v_z, \\ v_y &= \beta_1 v_x + \beta_2 v_y + \beta_3 v_z, \\ v_z &= \gamma_1 v_x + \gamma_2 v_y + \gamma_3 v_z, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

* A szögsebesség ezen összetevőit EULER kezdeményezésére sokszor p, q, r -el jelelik.

[Ezen componenseket nem szabad az A pontnak a vele merev kapcsolatban mozgó X, Y, Z , rendszerre vonatkozó sebességi összetevőkkel összetévesztetni, mert ezek az utóbbiak a 241. és 242. §§. megállapításai értelmében mindig zérus értékkel bírnak].

Helyetteszük ide a v_x, v_y, v_z számára érvényes (1) kifejezéseit a megelőző §-nak, és vegyük tekintetbe, hogy az 241. §. (4) formuláiból

$$\alpha_1\alpha'_1 + \alpha_2\alpha'_2 + \alpha_3\alpha'_3 = 0; \quad \beta_1\beta'_1 + \beta_2\beta'_2 + \beta_3\beta'_3 = 0; \quad \gamma_1\gamma'_1 + \gamma_2\gamma'_2 + \gamma_3\gamma'_3 = 0,$$

nyerjük így az (1) egyenletekből:

$$\begin{aligned} v_x &= y(\alpha_1\beta'_1 + \alpha_2\beta'_2 + \alpha_3\beta'_3) + z(\alpha_1\gamma'_1 + \alpha_2\gamma'_2 + \alpha_3\gamma'_3), \\ v_y &= z(\beta_1\gamma'_1 + \beta_2\gamma'_2 + \beta_3\gamma'_3) + x(\beta_1\alpha'_1 + \beta_2\alpha'_2 + \beta_3\alpha'_3), \\ v_z &= x(\gamma_1\alpha'_1 + \gamma_2\alpha'_2 + \gamma_3\alpha'_3) + y(\gamma_1\beta'_1 + \gamma_2\beta'_2 + \gamma_3\beta'_3). \end{aligned}$$

Ezek az egyenletek is, a 241. §. (4) egyenletei alapján összevonhatók, mivel a megelőző §. (2) sémája szerint rövidség kedvéért írhatjuk:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \gamma_1\beta'_1 + \gamma_2\beta'_2 + \gamma_3\beta'_3 = -(\beta_1\gamma'_1 + \beta_2\gamma'_2 + \beta_3\gamma'_3) = \omega_x, \\ \omega_y &= \alpha_1\gamma'_1 + \alpha_2\gamma'_2 + \alpha_3\gamma'_3 = -(\gamma_1\alpha'_1 + \gamma_2\alpha'_2 + \gamma_3\alpha'_3) = \omega_y, \\ \omega_z &= \beta_1\alpha'_1 + \beta_2\alpha'_2 + \beta_3\alpha'_3 = -(\alpha_1\beta'_1 + \alpha_2\beta'_2 + \alpha_3\beta'_3) = \omega_z, \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (2)$$

Ezek szerint az (1) sebességi vetületek:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \omega_y z, -\omega_z y, \\ v_y &= \omega_z x, -\omega_x z, \\ v_z &= \omega_x y, -\omega_y x, \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (3)$$

Az egyenletek alakilag megegyeznek a megelőző §. (3) kifejezéseivel, de egyszersmind a 239. §. (6) egyenleteivel; ezért ezek oly momentán forgást jelentenek, melynek az X, Y, Z , rendszer tengelyeire vonatkoztatott derékszögű szögsebességi vetületei a (2) egyenletek szerint $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, míg forgástengelyének egyenlete

$$\left. \begin{aligned} x : \omega_x &= y : \omega_y = z : \omega_z, \\ \omega &= [\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (4)$$

A 241. §. (1) és (2), továbbá a megelőző §. és ezen §. (1) és (4) egyenleteiből (v. ö. a köv. §. Jegyzetét) könnyen ered:

$$\left. \begin{aligned} v^2 &= v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2, \\ \omega^2 &= \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \omega^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (5)$$

244. §. Az iránycosinusok differentialquotiensei (cosinussebességek) kifejezve a szögsebességek összetevői által.

A megelőző két §. (2) egyenletcsoportjának más alakot is adhatunk.

1. A 242. §. (2) csoportja szerint áll:

$$\omega_y = \alpha_3 \alpha'_1 + \beta_3 \beta'_1 + \gamma_3 \gamma'_1,$$

$$-\omega_z = \alpha_3 \alpha'_1 + \beta_3 \beta'_1 + \gamma_3 \gamma'_1,$$

$$0 = \alpha_1 \alpha'_1 + \beta_1 \beta'_1 + \gamma_1 \gamma'_1.$$

Szorozva az első egyenletet α_3 -mal, a másodikat α_2 -vel, a harmadikat α_1 -el, összegezve őket és tekintetbe véve a 241. §. (3)—(6) egyenletrendszereit, nyerjük:

$$\alpha'_1 = \omega_y \alpha_3 - \omega_z \alpha_2.$$

Az egyenleteknek a megfelelő β és γ mennyiségekkel való szorzása a β'_1 és a γ'_1 értékeit adja meg.

Hasonlóképen indulhatunk ki az idézett (2) csoportnak az ω_z , $-\omega_x$, 0 és az ω_x , $-\omega_y$, 0 mennyiségeket kifejező egyenleteiből, miáltal az α'_2 , β'_2 , γ'_2 és az α'_3 , β'_3 , γ'_3 értékeit nyerjük.

Az így keletkező egyenletrendszer

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_1 &= \omega_y \alpha_3 - \omega_z \alpha_2 \\ \beta'_1 &= \omega_y \beta_3 - \omega_z \beta_2 \\ \gamma'_1 &= \omega_y \gamma_3 - \omega_z \gamma_2 \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} \alpha'_2 &= \omega_z \alpha_1 - \omega_x \alpha_3 \\ \beta'_2 &= \omega_z \beta_1 - \omega_x \beta_3 \\ \gamma'_2 &= \omega_z \gamma_1 - \omega_x \gamma_3 \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} \alpha'_3 &= \omega_x \alpha_2 - \omega_y \alpha_1 \\ \beta'_3 &= \omega_x \beta_2 - \omega_y \beta_1 \\ \gamma'_3 &= \omega_x \gamma_2 - \omega_y \gamma_1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Ezek az egyenletek azonnal adják:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x \alpha'_1 + \omega_y \alpha'_2 + \omega_z \alpha'_3 &= 0 \\ \omega_x \beta'_1 + \omega_y \beta'_2 + \omega_z \beta'_3 &= 0 \\ \omega_x \gamma'_1 + \omega_y \gamma'_2 + \omega_z \gamma'_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (2)$$

2. A 243. §. (2) egyenletcsoportja szerint áll:

$$-\omega_y = \gamma_1 \alpha'_1 + \gamma_2 \alpha'_2 + \gamma_3 \alpha'_3;$$

$$\omega_z = \beta_1 \alpha'_1 + \beta_2 \alpha'_2 + \beta_3 \alpha'_3;$$

$$0 = \alpha_1 \alpha'_1 + \alpha_2 \alpha'_2 + \alpha_3 \alpha'_3.$$

Ezen és a belőle a betűk cyclusszerű felcseréléséből származó, hasonló szerkezetű más két rendszerből az 1. pontban követetthez analog eljárással rendre számíthatók az α'_1 , α'_2 , α'_3 ; β'_1 , β'_2 , β'_3 ; γ'_1 , γ'_2 , γ'_3 quotiensek:

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_1 &= -\omega_y \gamma_1 + \omega_z \beta_1 \\ \alpha'_2 &= -\omega_y \gamma_2 + \omega_z \beta_2 \\ \alpha'_3 &= -\omega_y \gamma_3 + \omega_z \beta_3 \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} \beta'_1 &= -\omega_z \alpha_1 + \omega_x \gamma_1 \\ \beta'_2 &= -\omega_z \alpha_2 + \omega_x \gamma_2 \\ \beta'_3 &= -\omega_z \alpha_3 + \omega_x \gamma_3 \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} \gamma'_1 &= -\omega_x \beta_1 + \omega_y \alpha_1 \\ \gamma'_2 &= -\omega_x \beta_2 + \omega_y \alpha_2 \\ \gamma'_3 &= -\omega_x \beta_3 + \omega_y \alpha_3 \end{aligned} \right\} \quad (1_2)$$

Ebből az egyenletrendszerből szintén következik:

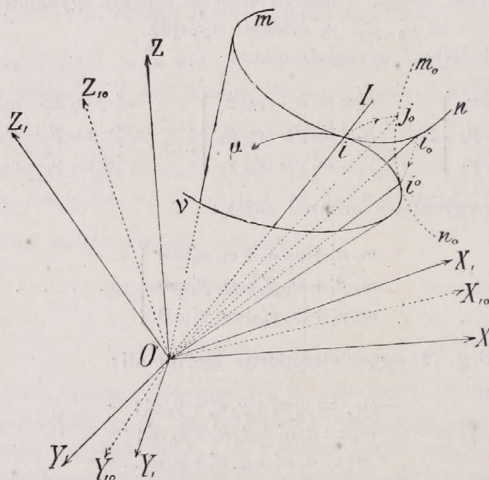
$$\left. \begin{aligned} \omega_x \alpha'_1 + \omega_y \beta'_1 + \omega_z \gamma'_1 &= 0 \\ \omega_x \alpha'_2 + \omega_y \beta'_2 + \omega_z \gamma'_2 &= 0 \\ \omega_x \alpha'_3 + \omega_y \beta'_3 + \omega_z \gamma'_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (2_2)$$

Jegyzet. A megelőző §. (5) rendszerének második egyenlete könnyen verificálható még az (1₁) és (1₂) egyenletek czélszerű egyesítéséből is.

245. §. Az alap- (szilárd) kúp és a gördülő kúp egyenletei.

Jeleljék (208. ábra) XYZ a szilárd, X,Y,Z , a pontrendszerrel együtt mozgó (elszállító) tengelyrendszert, OI a forgás momentán tengelyét t időkor.

Legyenek továbbá μ és \min az alap-, illetve a gördülő kúpon lévő oly görbék, melyek úgy vannak szerkesztve, hogy az elsőre nézve az Oi, Oi^0, Oi^1, \dots egyenesek ne csak az egyes, t, t_0, t_1, \dots időkre nézve érvényes momentán tengelyek irányát adják meg, hanem ezek hosszúsága is a mindenkori $\omega, \omega^0, \omega^1, \dots$ szögsebességekkel legyen arányos.



208. ábra.

E szerint ezek az egyenesek irány és nagyság szerint a mindenkori szögsebességet képviselik.

Az \min görbe Oi, Oi_0, Oi_1, \dots egyenesei t, t_0, t_1 időpontokban rendre egybeesnek az Oi, Oi^0, Oi^1 egyenesekkel.

A t_0 időpillanatban Oi^0 a momentán tengely, a gördülő görbe $m_0i_0n_0$, a mozgó tengelyrendszer $X_0Y_0Z_0$ helyzetben van, míg az Oi vonalé Oj_0 .

Az Oi és az Oj_0 vonalak hossza egyenlő, értékük: ω ; de irányuk különböző, de mivel a merev pontrendszer Oi vonala a rendszerrel együtt mozgó X,Y,Z , tengelyekhez képest változatlan helyzetű, azért t_0 időkor az Oj_0 vonal és az $X_0Y_0Z_0$ tengelyek egymáshoz viszonyított helyzete mindig ugyanaz, mint t -kor az Oi vonal- s az X,Y,Z , tengelyeké.

1. Az *alapkúp egyenlete.*

Jeleljék az $Oi=\omega=\omega$, szögsebességnek az X, Y, Z , tengelyek menti vetületeit az eddigi jelölések szerint rendre $\omega_x, \omega_y, \omega_z$; e tengelyek pedig az álló X, Y, Z tengelyekkel rendre $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ szögeket képeznek (241. §.), és ezért az $Oi=\omega$ -nak vetületei az álló X, Y, Z tengelyekre, ugyanis az $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ a vectorok szabályai szerint következőleg írhatók [19. §. (4) formulája]:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \omega_x \alpha_1 + \omega_y \beta_1 + \omega_z \gamma_1 \\ \omega_y &= \omega_x \alpha_2 + \omega_y \beta_2 + \omega_z \gamma_2 \\ \omega_z &= \omega_x \alpha_3 + \omega_y \beta_3 + \omega_z \gamma_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Az $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ kifejezéseit úgy tekinthetjük, mint az $\omega=Oi$ vonal i végpontjainak, azaz az alapkúp i pontjának *összrendezőit* az álló tengelyrendszerben; bennük az $\omega_x, \omega_y, \omega_z; \alpha_1 \dots \gamma_3$ az időnek ismeretes függvényei.

E szerint az (1) egyenletek előtűntetik a tényleges forgástengelyek végpontjának egymásra következő sorozatát, azaz az μiv alapgörbét.

Jeleljék ξ, η, ζ az Oi vonal vagy folytatása mentén fekvő tetszőleges pont koordinátáit az XYZ rendszerben; ezek eleget tesznek az

$$\frac{\xi}{\omega_x} = \frac{\eta}{\omega_y} = \frac{\zeta}{\omega_z} \dots \dots \dots (2)$$

egyenleteknek, melyekben $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ az (1) értelmében az időnek ismert függvényei.

Kiküszöbölve (2)-ből a folyó időt, nyerünk egy

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = 0 \dots \dots \dots (3)$$

alakú összefüggést, mely a μiv alapkúp egyenlete a szilárd XYZ tengelyrendszerben.

2. A *gördülő kúp egyenlete.*

Az $Oj_0=\omega=\omega$, hosszaságú vonal a gördülő kúp egy vonala; ennek vetületei az $X_0 Y_0 Z_0$ tengelyekre ugyanazok, mint az $Oi=\omega$ vetületei az X, Y, Z , tengelyekre, azaz $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, melyek itt is az időnek ismeretes függvényei; ámde az $X_0 Y_0 Z_0$ tengelyek most az álló X, Y, Z tengelyekkel rendre $\alpha_{10}, \alpha_{20}, \alpha_{30}; \beta_{10}, \beta_{20}, \beta_{30}; \gamma_{10}, \gamma_{20}, \gamma_{30}$ szögeket képeznek és így az $Oj_0=\omega=\Omega$ -nak az álló X, Y, Z tengelyekre való vetületei, melyeket itt $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ -vel jeleljük, következőleg írhatók:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_x &= \omega_x \alpha_{10} + \omega_y \beta_{10} + \omega_z \gamma_{10} \\ \Omega_y &= \omega_x \alpha_{20} + \omega_y \beta_{20} + \omega_z \gamma_{20} \\ \Omega_z &= \omega_x \alpha_{30} + \omega_y \beta_{30} + \omega_z \gamma_{30} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

Ezekben az egyenletekben az $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ mennyiségeket a $\omega=Oj_0$ vonal j_0 végpontja koordinátáiként tekinthetjük az álló XYZ rendszerben; ha még az $\alpha_{10} \dots \gamma_{30}$ mennyiségeket *állandóknak* tekintjük, míg $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, a merev rendszerben fekvő Oj_0 vetületei az X, Y, Z , tenge-

hol ismét a () zárójeles mennyiségek e sík normálisai iránycosinusaival arányosak [Math. repertórium 45. §. (3)] s a coordináták ismét az álló XYZ rendszerre vonatkoznak.

3. A $t=t_0$ időpillanatban a megelőző §. szerint áll:

$$\omega_x = \Omega_x, \quad \omega_y = \Omega_y, \quad \omega_z = \Omega_z; \quad (3)$$

továbbá még bebizonyítandó, hogy e coordináták növekedései a t_0 -ra nézve is egyenlők.

Tekintettel a 244. §. (2₂) egyenleteire, a megelőző §. (1) egyenleteiből:

$$d\omega_x = (\omega'_x \alpha_1 + \omega'_y \beta_1 + \omega'_z \gamma_1) dt, \quad \text{s i. t.} \quad (4)$$

továbbá a megelőző §. (4) egyenleteiből (a ₀ indexű mennyiségek állandók lévén):

$$d\Omega_x = (\omega'_x \alpha_{10} + \omega'_y \beta_{10} + \omega'_z \gamma_{10}) dt, \quad \text{s i. t.} \quad (5)$$

Mivel pedig $t=t_0$ -kor az α_1 és α_{10} s i. t. iránycosinusok egyenlők:

$$t=t_0\text{-kor: } d\omega_x = d\Omega_x, \quad d\omega_y = d\Omega_y, \quad d\omega_z = d\Omega_z, \quad (6)$$

és így a (3)- és (6)-ból következik, hogy az (1) és (2) két érintősík egybeesik és a két kúp a momentán tengely mentén érintkezik.

247. §. A mozgás analitikai visszavezetése kúpok gördülésére.

Szerkeszszünk a hosszegységnyi sugárral az *O* szilárd pont körül gömböt; felülete mindkét kúpot görbékben (itt *MM*- és *MN*-nel jelölhető, de a megelőző §. *μiv* és *min* görbéivel nem identikus görbékben) fogja metszeni, melyek folyó coordinátái a két kúp bizonyos pontsorozatainak összszerendezői.

Ezeket az összszerendezőket jelöljük az *g* indexszel, annak feltüntetésére, hogy a tekintetbe vett metszőgörbék a *gömb* felületén léteznek; e szerint ξ_g, η_g, ζ_g és Ξ_g, H_g, Z_g ezek a coordináták, melyek értéke *t* időpillanatban [megegyezőleg a 245. §. 1. és 2. pontjaival]:

az alapgörbe coordinátái:

$$\xi_g = \frac{\omega_x}{\omega}, \quad \eta_g = \frac{\omega_y}{\omega}, \quad \zeta_g = \frac{\omega_z}{\omega};$$

a gördülő görbe coordinátái ($\omega = \Omega = \omega$ lévén):

$$\Xi_g = \frac{\Omega_x}{\omega}, \quad H_g = \frac{\Omega_y}{\omega}, \quad Z_g = \frac{\Omega_z}{\omega};$$

ezenkívül

$$\xi_g^2 + \eta_g^2 + \zeta_g^2 = 1 = \Xi_g^2 + H_g^2 + Z_g^2$$

[Észreveszszük, hogy e coordináták az alap-, illetve gördülő kúp generatrixeinek iránycosinusait is jelenthetik.]

A coordináták ω -val való szorzatainak növekedése dt időelem alatt:

$$\left. \begin{aligned} \xi_g d\omega + \omega d\xi_g &= d\omega_x, & \eta_g d\omega + \omega d\eta_g &= d\omega_y, & \zeta_g d\omega + \omega d\zeta_g &= d\omega_z \\ \Xi_g d\omega + \omega d\Xi_g &= d\Omega_x, & H_g d\omega + \omega dH_g &= d\Omega_y, & Z_g d\omega + \omega dZ_g &= d\Omega_z \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

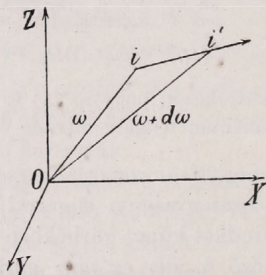
Ha σ_g és Σ_g a két gömbi görbe íve és $d\sigma_g$ és $d\Sigma_g$ elemi növekedéseik, ezekre, valamint a coordinátáknak az (1) egyenletekből folyó növekedéseire nézve áll:

$$(d\sigma_g)^2 = (d\xi_g)^2 + (d\eta_g)^2 + (d\zeta_g)^2; \quad (d\Sigma_g)^2 = (d\Xi_g)^2 + (dH_g)^2 + (dZ_g)^2; \quad (3)$$

$$\xi_g d\xi_g + \eta_g d\eta_g + \zeta_g d\zeta_g = 0 = \Xi_g d\Xi_g + H_g dH_g + Z_g dZ_g \quad (4)$$

A (2) egyenletek négyzeteiből, tekintettel az (1), (3), (4) egyenletekre:

$$\left. \begin{aligned} (d\omega)^2 + \omega^2 (d\sigma_g)^2 &= (d\omega_x)^2 + (d\omega_y)^2 + (d\omega_z)^2 \\ (d\omega)^2 + \omega^2 (d\Sigma_g)^2 &= (d\Omega_x)^2 + (d\Omega_y)^2 + (d\Omega_z)^2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$



209. ábra.

Ámde, míg $d\omega$ az ω szögsebesség értékének változása, addig az (5) jobboldalai az ω teljes időbeli változása négyzetét tartalmazza, mert a megelőző §. (1) és (2) pontjai szerint:

az alapkúpon lévő $\omega + d\omega$ vetületei az X, Y, Z tengelyekre

$$\omega_x + d\omega_x, \quad \omega_y + d\omega_y, \quad \omega_z + d\omega_z;$$

a gördülő kúpon lévő $\omega + d\omega$ vetületei az X, Y, Z tengelyekre

$$\Omega_x + d\Omega_x, \quad \Omega_y + d\Omega_y, \quad \Omega_z + d\Omega_z$$

és így áll:

$$(d\omega_x)^2 + (d\omega_y)^2 + (d\omega_z)^2 = (\overline{d\omega})^2 = (d\Omega_x)^2 + (d\Omega_y)^2 + (d\Omega_z)^2, \quad (6)$$

hol $\overline{d\omega}$ az ω és az $\omega + d\omega$ szögsebességeket irány és nagyság szerint képviselő egyenesek végpontjait egybekapcsoló $\overline{ii'}$ hossz (209. ábra).

E szerint az (5)-ből:

$$(d\sigma_g)^2 = \frac{1}{\omega^2} [(\overline{d\omega})^2 - (d\omega)^2] = (d\Sigma_g)^2$$

$$\varphi_{\omega} = \lim \left(\frac{\vec{ii'}}{At} \right), \dots \dots \dots (1)$$

ennek értéke

$$\varphi_{\omega}^2 = \omega_x'^2 + \omega_y'^2 + \omega_z'^2, \dots \dots \dots (2)$$

hol az ω'_x , ω'_y , ω'_z differentiálquotienssek e szöggyorsulás derékszögű összetevői.

Maga a φ_{ω} szöggyorsulás iránya az $\vec{ii'}$ határirányával esik egybe, ez pedig az $ii' \dots$ pontok által alkotott görbe érintője; ez az érintő pedig a két (az alap- és a gördülő) kúp mindenkor közös érintősíkjában fekszik.

Legyen (210. ábra) $\vec{Oi}_2 = \varphi_{\omega}$ a vector, mely az O pontból kiindulva, irány és nagyság szerint képviselje a teljes szöggyorsulást; e vonal a *szöggyorsulás tengelye* és párhuzamos az ii' -hoz.

a. A megelőző §. (2) gyorsulásának a szöggyorsulástól függő összetevői:

$$\omega'_y z - \omega'_z y; \quad \omega'_z x - \omega'_x z; \quad \omega'_x y - \omega'_y x;$$

ezek alakjukra nézve teljesen megegyeznek oly sebesség-componentsek kifejezéseivel [242. §. (3)], melyek érvényesek, ha a merev rendszer (xyz) pontja

a φ_{ω} szöggyorsulás iránya (azaz \vec{Oi}_2) körül, mint tengely körül φ_{ω} szögsebességgel forogna.

E szerint az (xyz)- azaz az A pont gyorsulásának ezen része értékre nézve egyenlő a φ_{ω} szöggyorsulással, szorozva az A -nak az Oi_2 tengelytől való AK távolságával, azaz $\varphi_{\omega} AK$ -val; e gyorsulási rész az (xyz) ponton átmenő s a szöggyorsulás Oi_2 tengelyére normális síkban, merőlegesen a KA távolságra fekszik.

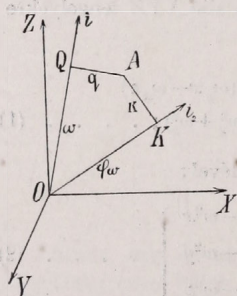
b. A gyorsulás második, csak a szögsebességektől részét a megelőző §. (2) formuláiból még úgy is nyerhetjük, ha bennük az ω'_x ,

ω'_y , ω'_z menynyiségeket, e szerint a teljesszöggyorsulást is, zérusnak tekintjük.

De ez megfelel állandó tengelyű- és szögsebességű momentán forgásnak; ilyenkor azonban (állandó forgásnál) a gyorsulás mindig a forgó A pontból a forgás Oi tengelyére bocsátott AQ merőlegesen fekszik, azaz *centripetális* jellegű (a centrifugális gyorsulás *negatív* centripetális gyorsulás); értéke $\omega^2 \cdot AQ$ [46. §. (5)].

Ezt analytikailag is igen könnyen bizonyíthatjuk be, ha az idézett (2) formuláknak csak a szögsebességektől függő részeit rendre ω_x , ω_y , ω_z -vel szorozzuk és összegezzük; az összeg zérus, a mi azt mondja, hogy a gyorsulás ezen része nem ad összetevőt a momentán tengely mentén, azaz merőleges rá.

Ellenben, ezen részeket négyzetre emelve és összegezve, némi rövidítések után nyerjük a gyorsulás e részének négyzete számára



210. ábra.

A gyorsulások első részei a gördülés c sebességétől, azaz a momentán tengely helyzet (irány-) változásától függenek; ezek csak $c=0$ esetben tűnnek el, azaz akkor, a mikor a forgás tengelye (helyzete, iránya) állandó, míg a szögsebesség általánosságban még változó lehet.

Ha a $-c\omega$ geometriai megnyírást az (xyz) összfűgygyűző A ponton átmenőnek és l, m, n iránycosinusokkal bírónak tekintjük* akkor e $-c\omega$ -nak az O -ra vonatkoztatott nyomatéka derékszögű összetevői (az 53. §. értelmében) egyenlők a (4) gyorsulások itt tárgyalt első részeivel.

A többi tagok közül az ω' -tól függők képviselik az A -ban az IAO síkra merőleges tangentiális-, a csak ω -tól függők a centripetális gyorsulását a szilárd pont körül mozgó rendszerpontnak.

251. §. *A gömbi gyorsulások egyszerűsített kifejezései, ha a momentán forgás tengelye a Z tengely.*

Sokszor vonatkoztatjuk a mozgásbeli viszonyokat bizonyos időpillanatra, bizonyos helyzetre; ekkor előnyös a koordináta-tengelyeket alkalmasan választani.

Legyen a Z egyszersmind a momentán forgás Oi tengelye (208. ábra); ekkor:

$$\omega_x = 0; \quad \omega_y = 0; \quad \omega_z = \omega,$$

míg a két kúp közös érintősíkjá itt a ZX sík legyen; evvel az XYZ rendszer helyzete teljesen meg van határozva.

A momentán tengely szomszédos helyzete és így a φ_ω szöggyorsulás is (249. §., 209. ábra) itt a ZX síkban fekszik és mivel e gyorsulás derékszögű összetevői $\omega'_x, \omega'_y, \omega'_z$, az ω'_y , mely az Y -menti componens, itt csak zérus lehet; e szerint az Oii_2 sík (a momentán forgás és a momentán szöggyorsulás tengelyeinek síkjá, 210. ábra) a két kúp közös érintősíkjával esik egybe, azaz az itt választott ZX sík egyszersmind a nevezett két tengely síkjá.

1. Ezek tekintetbe vételével a 248. §. (2) formuláiból:

$$\varphi_x = -\omega'_z y - \omega^2 x; \quad \varphi_y = \omega'_z x - \omega'_x z - \omega^2 y; \quad \varphi_z = \omega'_x y \quad . \quad . \quad (1)$$

2. Ellenben a megelőző §. (4) egyenleteiben a koordináta-rendszer e helyzeténél: $\alpha=\beta=0; \gamma=1$; ezenkívül a gördülés c sebessége, mely mindig merőleges a momentán forgás tengelyére (250. §.), itt a közös érintősíkból ZX -ben fekszik és a közös érintővonalra, a Z tengelyre merőleges: ezért a c iránycosinusai: $l=1, m=n=0$; és az idézett egyenletekből:

$$\varphi_x = -\omega'_y - \omega^2 x; \quad \varphi_y = -c\omega z + \omega'_x - \omega^2 y; \quad \varphi_z = c\omega y \quad . \quad (2)$$

252. §. *Általánosságban csak a rendszer szilárd pontjának gyorsulása zérus.*

A megelőző §. (2) formulái alapján igen könnyen bizonyíthatni be, hogy a rendszernek csak egy pontja van, melynek nincs gyorsulása.

* Ez az irány e szerint a gördülés szögével párhuzamos síkban fekszik.

Felvéve hogy (2)-ben $\varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$ és hogy e mellett $c\omega \leq 0$, azonnal nyerjük ezen esetre nézve $x=0, y=0, z=0$, azaz, a rendszer szilárd pontját.

De, ha $c\omega=0$, akkor csak $x=0, y=0$ következik, azaz, ekkor a momentán forgás tengelye mentén fekvő pontok gyorsulása zérus.

Végre, ha általánosságban $c\omega \leq 0$, akkor a momentán tengely pontjainak (melyekre nézve $x=0, y=0$) gyorsulása $-c\omega z$ értékű és az itt bevezetett Y tengelyhez párhuzamos (a momentán forgás és szöggyorsulás tengelyeire és így a rajtuk átmenő síkra is merőleges).

253. §. A gömbi mozgás normális és tangenciális gyorsulása derékszögű és polárkoordinátákban.

Jelelje q az A pont távolságát a momentán forgás tengelyétől (210 és 211. ábrák); akkor a 251. §-ban behozott egyszerű koordináta-helyzet mellett a mozgó rendszer momentán tengelye a Z tengely és a rendszerbeli pontok sebességei az XY -hoz párhuzamosak, végre $q^2 = x^2 + y^2$.

A v sebesség a q sugárral Q körül leírt kör érintője mentén fekszik, normális síkja a OAQ sík.

A φ gyorsulásnak ezen v sebesség irányára merőleges összetevőjét *normális*, a sebesség mentén való összetevőjét pedig *tangenciális* componensnek nevezzük és ezeket φ_n -nel és φ_t -vel jeleljük.

1. A *tangenciális* gyorsulás iránya a sebességével egyezik meg; ez az XY síkhoz fekszik; iránycosinusai $-y:q; +x:q; 0$; ezért:

$$\varphi_t = (-y\varphi_x + x\varphi_y) : q,$$

azaz a 251. §. (2) formuláival:

$$\varphi_t = \omega' q - c\omega \frac{xz}{q} \dots \dots \dots (1)$$

2. Az OAI síkban fekvő *normális* componens összetevődik a φ_x -nek és φ_y -nak a q -ra való vetületeiből és a φ_z -ből, mely itt szintén merőleges a sebességre, de egyszersmind a q -ra; a q iránycosinusai pedig itt $x:q$ és $y:q$, ezért a φ_n -nek a q -mentén fekvő része $\varphi_{n_1} = (\varphi_x x + \varphi_y y) : q$, azaz, a 251. §. (2) formulái szerint:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{n_1} &= (x\varphi_x + y\varphi_y) : q = -(\omega^2 q^2 + c\omega yz) : q; \\ \varphi_{n_2} &= \varphi_z = c\omega y. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2a)$$

Ezekből:

$$\varphi_n^2 = \frac{\omega^2}{q^2} (\omega q^2 + cyz)^2 + c^2 \omega^2 y^2 \dots \dots \dots (2)$$

3. Ezen kifejezéseket sokszor *polárösszrendezőkben* használják.

A megelőző §. szerint itt az IOI_2 sík (211. ábra) a ZX sík és OI a Z tengely; jeleljék θ és (r) a tetszőleges A rendszerpontnak gömbi koordinátáit (211. ábra), míg derékszögű összrendezői x, y, z és $OA=r$; ekkor:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin(r) \cos \vartheta; & y &= r \sin(r) \sin \vartheta; & z &= r \cos(r); \\ q &= \sqrt{x^2 + y^2} = r \sin(r) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Ezek tekintetbe vétele mellett az (1)–(2) egyenletek:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{n_1} &= -r\omega[\omega \sin(r) + c \sin \vartheta \cos(r)] \\ \varphi_{n_2} &= +rc\omega \sin(r) \sin \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (4a)$$

$$\varphi_t = r\omega' \sin(r) - rc\omega \cos \vartheta \cos(r) \quad (4)$$

$$\varphi_n = r\omega [\omega^2 \sin^2(r) + 2c\omega \sin \vartheta \sin(r) \cos(r) + c^2 \sin^2 \vartheta]^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

A teljes gyorsulás számára nyerjük.

$$\begin{aligned} \varphi^2 &= \varphi_n^2 + \varphi_t^2 = \\ &= r^2 \{ (\omega^4 + \omega'^2) \sin^2(r) - 2c\omega (\omega' \cos \vartheta - \omega^2 \sin \vartheta) \sin(r) \cos(r) + \\ &\quad + c^2 \omega^2 [1 - \cos^2 \vartheta \sin^2(r)] \} \quad (5a) \end{aligned}$$

Jegyzet. A φ_n normális összetevő még szétbontható az OA sugárra merőleges, azaz a növekvő (r) -ek menti és az $\overline{OA} = r$ sugár menti két komponensre (211. ábra), melyeket φ_{n_1} - és φ_{n_2} -vel jeleljük. Ezeket legegyszerűbben a φ_{n_1} és φ_{n_2} -nek a OA -ra merőleges és a vele párhuzamos vetületeiből képezzük.

A 211. ábra szerint, tekintve, hogy φ_{n_1} az \overline{AQ} irányba esik:

$$\begin{aligned} \varphi_{n_1} &= +\varphi_{n_1} \cos(r) - \varphi_{n_2} \sin(r) \\ \varphi_{n_2} &= +\varphi_{n_1} \sin(r) + \varphi_{n_2} \cos(r). \end{aligned}$$

Az (1a), (3), (4a) egyenletekből ered:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{n_1} &= -\omega \left(\frac{\omega q z}{r} + \frac{c y r}{q} \right) \\ \varphi_{n_2} &= -\omega^2 \frac{q^2}{r} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

és:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n &= -r\omega [\omega \sin(r) \cos(r) + c \sin \vartheta] \\ \varphi_{n_2} &= -r\omega^2 \sin^2(r) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

254. §. *Speciális esetek, melyekben a gömbi gyorsulás egyes összetevői zérusok.*

A következőkben a gömbi gyorsulás néhány sajátosságát tételekben fejezzük ki, teljes, de könnyű bizonyításukat az olvasóra bízván.

1. *Oly pontjai a rendszernek, melyek normális gyorsulása a momentán tengelyhez párhuzamos* (hol a φ_n vetülete a q -ra, a φ_{n_1} zérus), megfelelnek a megelőző §. (2a) kifejezései szerint az

$$\omega(x^2 + y^2) + cyz = 0 \quad (1)$$

egyenletnek, azaz az (1) által képviselt másodrendű kúpon fekszenek, mely kúp a momentán-tengelyt, a Z -t tartalmazza és az alap- és a gördülő kúpot ezen egyenes mentén érinti; a közös érintő sík a ZX sík lévén.

$$\varphi_{n_2} = c\omega \left(\frac{y}{z} \right) \left(\frac{z}{r} \right) = c\omega \operatorname{tg} (r_0) \sin \vartheta_0 \cos (r_0) = +r \frac{c^2 \omega^4}{\sqrt{(\omega^4 + \omega^2)(\omega^4 + c^2 \omega^2 + \omega^2)}} \quad (7)$$

6. Oly pontok, melyekre nézve a φ_n normális gyorsulásnak a OA -ra merőleges összetevője (211. ábra) a φ_n , zérus, megfelelnek a megelőző §. (6) és (7) formulái szerint az

$$\omega (x^2 + y^2) z + cy (x^2 + y^2 + z^2) = 0. \quad (8)$$

egyenletnek, mely harmadfokú kúp-felületet képvisel.

E felület a momentán-tengelyt (itt a Z -t) is tartalmazza.

7. Oly pontok, melyekre nézve a φ_n -nek $\varphi_{n,}$ componense zérus, a forgás momentán tengelyében fekszenek, mivel a 253. §. idézett formulái szerint ekkor $q=0$.

255. §. A gömbi gyorsulás derékszögű összetevői a merer rendszerrel mozgó tengelyek mentén.

A 241. és 243. §§-ban, a mozgó tengelyekre vonatkozó sebességi összetevők képzésénél tett megjegyzés ugyanezen tengelyekre vetített gyorsulásokra is érvényes.

Könynyű bebizonyítani, hogy valamint a v_x, v_y, v_z , és a v_x, v_y, v_z , sebességi összetevők [243. §. (3) formulái], úgy a $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ és $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$, gyorsulási összetevők is egymástól csak annyiban különböznek, hogy az előbbieik kifejezéseiben az $x, y, z; \omega_x, \omega_y, \omega_z$, az utóbbiakéban pedig az $x, y, z; \omega_x, \omega_y, \omega_z$, menynyiségek lépnek fel.

1. Ugyanis, mivel a v_x, v_y, v_z és a v_x, v_y, v_z , sebességek egyenlő szerkezetűek és mivel a 243. §. (5) formulája szerint

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2,$$

azért e 243. §. (3) formuláiból, a 248. §. eljárásának mintájára azonnal nyerjük:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_x &= \omega'_y z - \omega'_z y + \omega_x (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 x, \\ \varphi_y &= \omega'_z x - \omega'_x z + \omega_y (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 y, \\ \varphi_z &= \omega'_x y - \omega'_y x + \omega_z (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 z, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

A itt fellépő $\omega'_x, \omega'_y, \omega'_z$, menynyiségek jelentik a szöggyorsulás [249. §. (2)] vetületeit a mozgó X, Y, Z , tengelyekre.

2. Ha ellenben a 250. §. eljárása szerint a gördülés sebességét vezetjük be, mely itt ugyanaz mint az álló rendszerben; továbbá α, β, γ , val jeleljük a momentán pólus iránycosinusait (koordinátáit) és l, m, n , vel a c gördülési sebességét a mozgó rendszer tengelyeinek irányaira vonatkoztatva, akkor e 250. §. (4) formulái mintájára nyerjük:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_x &= c\omega (mz - ny) + \omega' (\beta z - \gamma y) + \alpha \omega^2 (x\alpha + y\beta + z\gamma) - \omega^2 x, \\ \varphi_y &= c\omega (nx - lz) + \omega' (\gamma x - \alpha z) + \beta \omega^2 (x\alpha + y\beta + z\gamma) - \omega^2 y, \\ \varphi_z &= c\omega (ly - mx) + \omega' (\alpha y - \beta x) + \gamma \omega^2 (x\alpha + y\beta + z\gamma) - \omega^2 z, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Az (1) és (2) egyenletek értelmezése teljesen analog a szilárd tengelyekre vonatkozó gyorsulási összetevők értelmezésével (250—254. §§.).

256. §. *A gömbi gyorsulás vetületei az elszállító koordináta-tengelyekre.*

A megelőző §. eredményeit még más megfontolások alapján is könnyen nyerhetjük.

Adva legyen mint a 241. §-ban egy XYZ álló és egy X,Y,Z , elszállító koordináta-rendszer, mely utóbbi a mozgó pontrendszerrel merev kapcsolatban van és ezenkívül a tetszőleges t időpillanatban az elsőnek helyzetével essék egybe, de olyformán, hogy e pillanatban ugyanoly O körüli forgással, e szerint ugyanazon forgási sebességgel, gyorsulással, szöggyorsulással s i. t. birjon, mint az O körül mozgó merev pontrendszer.

A pontrendszer valamely A pontjának az XYZ koordináta-rendszerre vonatkozó (abszolút) koordinátái, szögsebességi-, gyorsulási- és szöggyorsulási komponensei rendre x, y, z ; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$; $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$; $\omega'_x, \omega'_y, \omega'_z$; ellenben az X,Y,Z , tengelyrendszerre nézve a koordináták x, y, z , ezek állandók lévén, az A -nak nem lehet sem sebessége, sem gyorsulása e rendszerhez képest. Azonban az abszolút szögsebességet, gyorsulást és szöggyorsulást szabad *vetíteni* az X, Y, Z , tengelyek irányaira, miként azt a megelőző §-ban tettük; jeleljék e vetületeket itt is rendre $\omega_x, \omega_y, \omega_z$; $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$; $\omega'_x, \omega'_y, \omega'_z$; megállapodásunk szerint a t időpillanatban:

$$\left. \begin{array}{l} x=x, \\ y=y, \\ z=z, \end{array} \right\}; \left. \begin{array}{l} \omega_x=\omega_x, \\ \omega_y=\omega_y, \\ \omega_z=\omega_z, \end{array} \right\}; \left. \begin{array}{l} \varphi_x=\varphi_x, \\ \varphi_y=\varphi_y, \\ \varphi_z=\varphi_z, \end{array} \right\}; \left. \begin{array}{l} \omega'_x=\omega'_x, \\ \omega'_y=\omega'_y, \\ \omega'_z=\omega'_z, \end{array} \right\} \dots \dots (1)$$

1. Felcserélve az (1) egyenletek értelmében a , veszző nélküli mennyiségeket a , veszzős mennyiségekkel, a 248. §. (2) egyenleteiből:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_x = \omega'_y z_i - \omega'_z y_i + \omega_x (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i) - \omega^2 x_i, \\ \varphi_y = \omega'_z x_i - \omega'_x z_i + \omega_y (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i) - \omega^2 y_i, \\ \varphi_z = \omega'_x y_i - \omega'_y x_i + \omega_z (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i) - \omega^2 z_i, \end{array} \right\} \dots (2)$$

2. Ha megegyezőleg a 250. §-al, I a pont, melyben a momentán tengely a O körül a hosszegységnyi sugárral leírt gömb felületét metszi, és ennek iránycosinusai (vagy koordinátái) az XYZ , illetve X,Y,Z , rendszerben α, β, γ illetve α, β, γ , továbbá az I pont haladó sebessége, az ú. n. gördülő sebesség c és ennek iránycosinusai a két rendszerben l, m, n ; l, m, n , akkor t -kor:

$$\alpha=\alpha, \quad \beta=\beta, \quad \gamma=\gamma;$$

és így a 250. §. (4) egyenleteiből közvetlenül:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_x = c\omega (m, z_i - n, y_i) + \omega' (\beta, z_i - \gamma, y_i) + \alpha, \omega^2 (x, \alpha + y, \beta + z, \gamma) - \omega^2 x_i, \\ \varphi_y = c\omega (n, x_i - l, z_i) + \omega' (\gamma, x_i - \alpha, z_i) + \beta, \omega^2 (x, \alpha + y, \beta + z, \gamma) - \omega^2 y_i, \\ \varphi_z = c\omega (l, y_i - m, x_i) + \omega' (\alpha, y_i - \beta, x_i) + \gamma, \omega^2 (x, \alpha + y, \beta + z, \gamma) - \omega^2 z_i, \end{array} \right\} \dots (3)$$

A (2) és (3) formulák identikusak a megelőző §. (1) és (2) formuláival; továbbá *szerveztük* is minden tekintetben megegyezik az álló tengelyekre vonatkozó $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ gyorsulások idézett kifejezéseivel; de nem szabad szem elől tévesztetni, hogy $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$, nem jelentik a gyorsulás összetevőit a pontrendszerrel együtt mozgó X, Y, Z , koordinátarendszerben (mert *ebben* gyorsulás nem létezik), hanem a gyorsulás *vetületeit* azokra az X, Y, Z , egyenesekre, melyek a mindenkor t időpillanatban az X, Y, Z , helyzetével egybeesnek.

7. Merev rendszer gömbi mozgásának magasabb rendű gyorsulásai.

257. §. *Gömbi mozgás másodrendű gyorsulásának analitikai előtűntetése. Másodrendű gyorsulási középpont. Másodrendű szöggyorsulás.*

1. A 241. §. (1) egyenleteinek háromszori differenciálásából nyerjük:

$$\left. \begin{aligned} x''' &= \varphi_{2,x} = x\alpha_1''' + y\beta_1''' + z\gamma_1''' \\ y''' &= \varphi_{2,y} = x\alpha_2''' + y\beta_2''' + z\gamma_2''' \\ z''' &= \varphi_{2,z} = x\alpha_3''' + y\beta_3''' + z\gamma_3''' \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (1)$$

és

$$\varphi_2^2 = x'''^2 + y'''^2 + z'''^2,$$

mely egyenletrendszer különösen a másodrendű gyorsulás (harmadrendű sebesség) középpontja létezésének és helyzetének kimutatására alkalmas.

Jelelve ugyanis ξ_3, η_3, ζ_3 -mal e középpont koordinátáit a pontrendszerrel együtt mozgó (elszállító) X, Y, Z , rendszerre nézve, akkor:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \xi_3\alpha_1''' + \eta_3\beta_1''' + \zeta_3\gamma_1''' \\ 0 &= \xi_3\alpha_2''' + \eta_3\beta_2''' + \zeta_3\gamma_2''' \\ 0 &= \xi_3\alpha_3''' + \eta_3\beta_3''' + \zeta_3\gamma_3''' \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (2)$$

mely összefüggések által e középpont helyzete meg van határozva; a (2) értelmében ez a $\xi_3 = \eta_3 = \zeta_3 = 0$ feltételnek felel meg. Röviden: a másodrendű gyorsulás centruma egyszersmind a rendszer fixpontja.

2. Az (1) egyenleteket transformáljuk. E célból a *magasabb rendű szöggyorsulásokat* kell behoznunk, melyek jelölése és értéke a következő:

$\omega_1^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \omega^2$ szögsebesség (zérus-rendű szöggyorsulás) négyzete,

$\omega_2^2 = \omega_x'^2 + \omega_y'^2 + \omega_z'^2 = \varphi_{1,\omega}^2$ elsőrendű szöggyorsulás négyzete,

$\omega_3^2 = \omega_x''^2 + \omega_y''^2 + \omega_z''^2 = \varphi_{2,\omega}^2$ másodrendű szöggyorsulás négyzete s i. t.

A 248. §-nak $\varphi_{1,x} = \omega_y'z - \omega_z'y + \omega_yv_z - \omega_zv_y$ s i. t.

egyenleteit még egyszer differenciálva és megjegyezve, hogy $x' = v_x, v_x' = \varphi_{1,x}$; s i. t., nyerjük:

$$\varphi_{2,x} = \omega_y'' z - \omega_z'' y + 2(\omega_y' v_z - \omega_z' v_y) + \omega_y \varphi_{1,z} - \omega_z \varphi_{1,y},$$

avagy helyettesítve a sebességi és az elsőrendű gyorsulási komponensek értékeit a 248. §-ból:

$$\begin{aligned} \varphi_{2,x} &= \omega_y'' z - \omega_z'' y + 2[\omega_y' (\omega_x y - \omega_y x) - \omega_z' (\omega_z x - \omega_x z)] + \omega_y (\omega_x y - \omega_y x) - \\ &\quad - \omega_z (\omega_z x - \omega_x z) - \omega^2 (\omega_y z - \omega_z y) = \\ \varphi_{2,x} &= \omega_y'' z - \omega_z'' y + 2\omega_x (\omega_y y + \omega_z' z) - 2x (\omega_y \omega_y' + \omega_z \omega_z') + \omega_x' (\omega_y y + \omega_z z) - \\ &\quad - x (\omega_y \omega_y' + \omega_z \omega_z') - \omega^2 (\omega_y z - \omega_z y). \end{aligned}$$

Hozzáadva ezen egyenlethez a

$$2\omega_x \omega_x' x - 2\omega_x \omega_x' x + \omega_x' \omega_x x - x \omega_x \omega_x' = 0$$

identitást, nyerjük:

$$\varphi_{2,x} = \omega_y'' z - \omega_z'' y + 2\omega_x (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z' z) - 3x (\omega_x \omega_x' + \omega_y \omega_y' + \omega_z \omega_z') + \left. \begin{aligned} &+ \omega_x' (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 (\omega_y z - \omega_z y) \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

Könnyű belátni, hogy szabad írunk:

$$\left. \begin{aligned} x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z &= l\omega_1 \cos(l, \omega_1) \\ x\omega_x' + y\omega_y' + z\omega_z' &= l\omega_3 \cos(l, \omega_3) \end{aligned} \right\}; \quad \omega_x \omega_x' + \omega_y \omega_y' + \omega_z \omega_z' = \frac{1}{2} (\omega_1^2)',$$

$$\text{hol} \quad l^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Így nyerjük a (3)-ból:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{2,x} &= \omega_y'' z - \omega_z'' y + 2l\omega_x \omega_2 \cos(l, \omega_2) - \frac{3}{2} x (\omega_1^2)' + \\ &\quad + l\omega_1 \omega_x' \cos(l, \omega_1) - \omega_1^2 (\omega_y z - \omega_z y); \\ \varphi_{2,y} &= \omega_z'' x - \omega_x'' z + 2l\omega_y \omega_2 \cos(l, \omega_2) - \frac{3}{2} y (\omega_1^2)' + \\ &\quad + l\omega_1 \omega_y' \cos(l, \omega_1) - \omega_1^2 (\omega_z x - \omega_x z); \\ \varphi_{2,z} &= \omega_x'' y - \omega_y'' x + 2l\omega_z \omega_2 \cos(l, \omega_2) - \frac{3}{2} z (\omega_1^2)' + \\ &\quad + l\omega_1 \omega_z' \cos(l, \omega_1) - \omega_1^2 (\omega_x y - \omega_y x). \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (4)$$

3. A felírt egyenletrendszer értelmében a másodrendű gyorsulás öt rész összegéből állónak tekinthető.

a. Az a rész, melynek komponensei:

$$\omega_y'' z - \omega_z'' y, \quad \omega_z'' x - \omega_x'' z, \quad \omega_x'' y - \omega_y'' x,$$

a 249. §. 1. pontjában tárgyalthoz analog értelmezés szerint, értékre nézve egyenlő a másodrendű szöggyorsulással, $\varphi_{2,\omega}$ -val vagy ω_3 -val, szorozva az A -nak ezen ω_3 szöggyorsulás OI_3 -tengelyétől való $AQ_3 = q_3$ távolságával (212c. ábra); e gyorsulási rész az OI_3 -tengelyre és a $Q_3 A$ távolságra merőleges irányú.

b. A második rész, melynek komponensei:

$$\omega_x 2l\omega_2 \cos(l, \omega_2), \quad \omega_y 2l\omega_2 \cos(l, \omega_2), \quad \omega_z 2l\omega_2 \cos(l, \omega_2),$$

absolut értékre nézve egyenlő $2l\omega_1\omega_2 \cos(l, \omega_2)$ -vel (hol ω_1 a szögsebesség, ω_2 az elsőrendű szöggyorsulás) és ennek iránya az ω_1 szögsebességével (a momentán forgás OI_1 tengelyével) esik egybe.

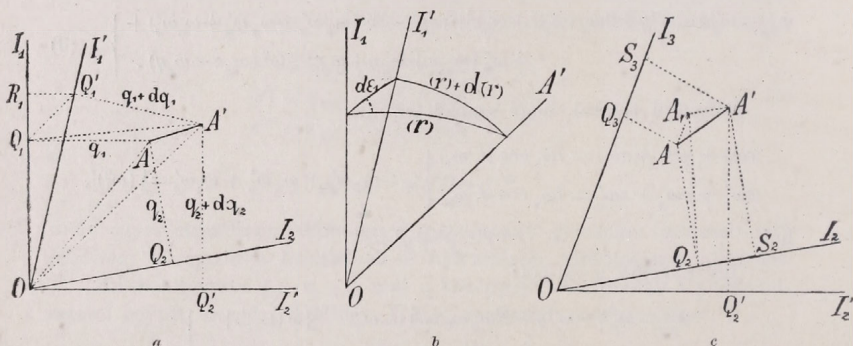
c. A harmadik rész, melynek componensei:

$$-\frac{3}{2}x(\omega_1^2)', \quad -\frac{3}{2}y(\omega_1^2)', \quad -\frac{3}{2}z(\omega_1^2)',$$

absolut értékére nézve egyenlő $-\frac{3}{2}r(\omega_1^2)'$ -vel, míg iránya az $OA = l$ vonsugarával esik egybe.

d. A negyedik rész, melynek componensei:

$$\omega'_x l\omega_1 \cos(l, \omega_1), \quad \omega'_y l\omega_1 \cos(l, \omega_1), \quad \omega'_z l\omega_1 \cos(l, \omega_1),$$



212. ábra.

absolut értékre nézve $l\omega_1\omega_2 \cos(l, \omega_1)$ -vel egyenlő, míg iránya az ω_2 szöggyorsulás irányával esik egybe.

e. Végre az ötödik rész az idézett 249. §. 1. pontja a. szakaszában részletezett megfontolások értelmében, a 242. §. (3) egyenletei szerint értékre nézve egyenlő az $\omega_1^2[\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2]^{\frac{1}{2}} = \omega_1^3$ -mal, szorozva az A pontnak az OI_1 momentán-tengelytől való $AQ_1 = q_1$ távolságával (212a. ábra); iránya pedig az OI_1 -re és a Q_1A -ra egyszerre merőleges.

258. §. Gömbi mozgás másodrendű gyorsulásának geometriai előtűntetése.

Kiindulunk RIVALS-nak a 249. §-ban talált azon tételéből, hogy a gömbi mozgás elsőrendű gyorsulása egy centripetális, $\omega_1^2 \overline{AQ_1}$ értékű, a forgás momentán tengelyére és az AQ_1 -re merőleges-, és egy az ω_2 szöggyorsulásból származó $\omega_2 \overline{AQ_2}$ értékű, a szöggyorsulás tengelyére és az AQ_2 -re merőleges componensekből áll, hol $\varphi_\omega^2 = \omega_x'^2 + \omega_y'^2 + \omega_z'^2 = \omega_2^2$

Az OI_1 , OI'_1 , OA' irányok egy gömbháromszöget határoznak meg, melynek oldalai (ívmértékben) rendre (r) , $d\varepsilon_1$, $(r)+d(r)$; [212b ábra], míg az $(r)+d(r)$ -rel szemközt fekvő szög az $I_1OI'_1$ és az I'_1OA' síkok által képezetik; értéke (a 212a. ábrából) $\eta_1 - \omega_1 dt$. E szerint e gömbháromszögben:

$$\cos[(r)+d(r)] = \cos(r) \cos d\varepsilon_1 + \sin(r) \sin d\varepsilon_1 \cos(\eta_1 - \omega_1 dt)$$

avagy, a magasabb rendű csekélyek elhagyásával:

$$d[\cos(r)] = \sin(r) \cos \eta_1 d\varepsilon_1.$$

E szerint a (4)-ből:

$$Q_1 R_1 = l \sin(r) \cos \eta_1 d\varepsilon_1; \quad R_1 Q'_1 = l \cos(r) d\varepsilon_1. \quad (5)$$

d. Az a ., b ., c . pontok értelmében a (3) egyenlet írható:

$$\overline{q_1 + dq_1} = -\overline{\omega_1 q_1} dt + \overline{q_1} + l \sin(r) \cos \eta_1 d\varepsilon_1 + l \cos(r) d\varepsilon_1. \quad (6)$$

Helyettesítve ezt az értéket az (1)-ben felmerülő $q_1 + dq_1$ első tagjába, jelezve c_1 -el a $d\varepsilon_1: dt = c_1$ görbületi sebességet (250. §.), végre levonva a q_1 -nek első tagját, $\omega_1^2 q_1$ -t, a magasabb rendűek elhanyagolásával marad:

$$[(\omega_1^2 + d\omega_1^2)(q_1 + dq_1) - \omega_1^2 q_1]: dt = -\overline{\omega_1^2 q_1} + (\omega_1^2)' q_1 + \overline{\omega_1^2 c_1} l \sin(r) \cos \eta_1 + \overline{\omega_1^2 c_1} l \cos(r), \quad (7)$$

mint a centripetális másodrendű gyorsulás geometriai eredője, melynek egyes tagjai rendre az AA' -hoz, az AQ_1 -hez, az OQ_1 -hez, végre az $R_1 Q'_1$ -hez párhuzamosak.

2. Az ω_2 szöggyorsulásból származó $\overline{\varphi_{1\omega} g_2} = \overline{\omega_2 g_2}$ componens növekedésének számítására nézve analog módon járunk el; de itt szükséges a *másodrendű szöggyorsulás* bevezetése (257. §. 2. pontja).

a. Ugyanis (i. h.):

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{1\omega}^2 &= \omega_x'^2 + \omega_y'^2 + \omega_z'^2 = \omega_2^2; \\ (\varphi_{1\omega} + d\varphi_{1\omega})^2 &= (\omega_x' + d\omega_x')^2 + (\omega_y' + d\omega_y')^2 + (\omega_z' + d\omega_z')^2 = (\omega_2 + d\omega_2)^2. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Ámde: a $\varphi_{1\omega} + d\varphi_{1\omega}$ és a $\varphi_{1\omega}$ vectorok teljes különbségeinek viszonya a dt időelemhez megadja a másodrendű szöggyorsulást, a $\varphi_{2\omega}$ -t vagy ω_3 -t, melynek derékszögű componensei rendre ω_x'' , ω_y'' , ω_z'' ; maga e vector:

$$\varphi_{2\omega}^2 = \omega_x''^2 + \omega_y''^2 + \omega_z''^2 = \omega_3^2 \quad (9)$$

E szöggyorsulás tengelye (iránya) a felírt komponensekből adódik; a 212c ábrában OI_3 által képviseltetjük; szerkesztése épen úgy adódik a $\varphi_{1\omega}$ és $\varphi_{1\omega} + d\varphi_{1\omega}$ -ből, mint a $\varphi_{1\omega}$ [vagy ott, a 209. és 210. ábrákban a φ_ω] a 249. §-ban az ω és $\omega + d\omega$ -ból.

Ebből a következő geometriai egyenlet következik:

$$\overline{\varphi_{1\omega} + d\varphi_{1\omega}} = \overline{\varphi_{1\omega}} + \overline{\varphi_{2\omega} dt}, \text{ vagy } \overline{\omega_2 + d\omega_2} = \overline{\omega_2} + \overline{\omega_3 dt}, \quad (10)$$

mely annyit mond, hogy az OI_2 tengely körüli $\omega_2 + d\omega_2$ szöggyorsulás (212c. ábra) egyenértékű az OI_2 tengely körüli $\varphi_{1\omega} = \omega_2$ szöggyorsulás meg az OI_3 tengely körüli $\varphi_{2\omega} dt = \omega_3 dt$ elemi szöggyorsulások vector-összegével.

b. Az OI_2 körüli ω_2 szöggyorsulásból t -kor származó gyorsulási componens $\omega_2 q_2$, mely A -ban az AOI_2 síkra merőleges; az $\omega_2 + d\omega_2$ -ből $t + dt$ -kor származó összetevő $(\omega_2 + d\omega_2) (q_2 + dq_2)$, mely az $A'OI_2$ síkra merőleges; ezt az (1) egyenlet képezésénél ismernünk kell.

Ámde a megelőző a pont (10) egyenlete értelmében az A' -nak az OI_2 tengely körüli $\omega_2 + d\omega_2$ szöggyorsulásból származó gyorsulási össze-
tevéje egyenértékű az OI_2 tengely körüli ω_2 -ből származó- és az OI_3 tengely körüli $\omega_3 dt$ -ből származó két gyorsulási componens geometriai
összegével; ezt az összefüggést a következő geometriai egyenlet fejezi ki:

$$(\omega_2 + d\omega_2) (q_2 + dq_2) = \overline{\omega_2 q_2'} + \overline{\omega_3 q_3'} dt, \quad (11)$$

melyben:

$$q_2' = A'S_2; \quad q_3' = A'S_3.$$

c. A (11) egyenletben a q_2' szétbontandó és a q_3' meghatározandó. Ugyanis (212c. ábra), az A' , Q_2 , S_3 pontokból képezve az $A'S_3Q_2A, A'$ derékszögű egyenközényt, melynek síkja a OI_2 -öt tartalmazza, észre-
veszszük, hogy:

$$\overline{q_2'} = \overline{A'S_2} = \overline{A, Q_2} = \overline{A, A} + \overline{A, Q_2} \quad (12)$$

Ámde mivel AQ_2 és AS_2 (azaz a hozzá párhuzamos A, Q_2 is) merő-
legesen van húzva az OI_2 -re, azért az AQ_2A , sík is merőleges az OI_2 -re
és az AA , az A, A' -re; e szerint az AA , nem más mint az $AA' = ds$ ív-
elem vetülete az OI_2 -re merőleges- s ennek Q_2 pontján átmenő síkra.

Jelelve μ -vel az $AA' = ds$ és e sík között lévő szöget, a (12) egyenlet
írható:

$$\overline{q_2'} = \overline{ds} \cos \mu + \overline{q_2} = \overline{\omega_1} \cos \mu dt + \overline{q_2} \quad (13)$$

Vége megjegyzendő, hogy az $A'S_3 = q_3'$ vector és az $AQ_3 = q_3$ vector
között csak végtelen kicsiny különbség létezik, úgy, hogy a magasabb
rendűek elhagyásával a (11) és (13) egyenletből:

$$[(\omega_2 + d\omega_2) (q_2 + dq_2) - \overline{\omega_2 q_2}]: dt = \overline{\omega_2 \omega_1} \cos \mu + \overline{\omega_3 q_3} \quad . . . (14)$$

és ez az ω_2 szöggyorsulás növekedéséből származó része a másodrendű
gyorsulásnak, melynek első tagjának irányát derékszögű componenseiből
nyerhetjük, míg második (az a . pont értelmében) a az A -ban az OI_3 -ra
és az AQ_3 -ra emelt normálishoz párhuzamos.

Evvel a teljes másodrendű gyorsulás a (7) és (14) hat tag geometriai
összege gyanánt adódott, melyeknek szóval való részletes értelmezését
az olvasóra bízunk.

259. §. *E gyorsulás derékszögű összetevőinek egyszerűsített kifejezései az analitikai és geometriai eredmények alapján.*

1. Válaszszük az I_1OI_2 síkot (a forgásnak és a gyorsulásnak momentán tengelyeit tartalmazó síkot 212a. ábra), az XZ sík gyanánt; az OZ legyen a momentán forgás OI_1 tengelye, az OX erre merőlegesen a nevezett síkban, míg az Y e síkra merőleges; ez a már a 251. §-ban használt koordináta-rendszer.

Ekkor az idézett §., a 250. §. (3) és a 209. ábra értelmében rendre (lévén itt $\omega = \omega_1$):

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= 0; & \omega_y &= 0; & \omega_z &= \omega_1 \\ \omega'_x &= c_1\omega_1; & \omega'_y &= 0; & \omega'_z &= \omega'_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots (i)$$

A másodrendű szöggyorsulásnak, $\varphi_{2\omega} = \omega_3$ -nak ω''_x , ω''_y , ω''_z komponenseire nézve megjegyzendő, hogy az elsőrendű szöggyorsulást, $\varphi_{1\omega} = \omega_2$ -öt képviselő $\vec{O}i_2$ vector itt az XZ síkban fekszik (210. ábra), míg az $\omega_2 + d\omega_2$ -öt képviselő $\vec{O}i'_2$ vector már e síkon kívül fekszik; e vectorok teljes különbsége

$$\vec{i}_3i'_2 = \omega_3 dt, \text{ hol: } \vec{i}_3i'_2{}^2 = [d(\omega'_x)]^2 + [d(\omega'_y)]^2 + [d(\omega'_z)]^2 \dots \dots (2)$$

Eszreveszszük az (1)-ből, hogy itt $d(\omega'_x) = (c_1\omega_1)' dt$; $d(\omega'_z) = \omega'_1' dt$; ellenben, mivel itt $\omega'_y = 0$, azért a $d(\omega'_y)$ nem lehet más, mint az $\vec{i}_3i'_2$ -nek (vagy, a mi e tekintetben ugyanezt az eredményt adja, az $\vec{O}i'_2$ -nek) a vetülete az Y tengelyre, mely vetületet nyerjük, ha $\vec{O}i'_2$ -öt azon szög sinusával szorozzuk, melyet $\vec{O}i'_2$ az XZ síkkal képez.

Jelelve $d\varepsilon_2$ -vel az $\vec{O}i_2$ és $\vec{O}i'_2$ között lévő szöget, ν -vel pedig ezen két egyenes síkja és az XZ sík közötti szöget, az említett sinus értéke $d\varepsilon_2 \sin \nu$ és így $d(\omega'_y) = (\overline{\omega_2 + d\omega_2}) d\varepsilon_2 \sin \nu$.

A $d\varepsilon_2 : dt$ jelentése itt analog a $d\varepsilon_1 : dt$ viszonyához, mely utóbbi a gördülés sebessége (vagy a forgás momentán tengelyének szögsebessége [250. §. és 258. §. 1d. pontja]). Írva

$$\frac{d\varepsilon_2}{dt} = c_2, \dots \dots \dots (3)$$

a c_2 az ω_2 szöggyorsulás OI_2 tengelyének szögsebessége.

Elhanyagolva a másodrendű csekély mennyiségeket, nyerjük:

$$\omega''_x = (c_1\omega_1)'; \quad \omega''_y = c_2\omega_2 \sin \nu; \quad \omega''_z = \omega'_1' \dots \dots (4)$$

Végre az (1) értékek felhasználásával:

$$\left. \begin{aligned} \omega'_x x + \omega'_y y + \omega'_z z &= c_1\omega_1 x + \omega'_1 z; \\ \omega_x \omega'_x + \omega_y \omega'_y + \omega_z \omega'_z &= \omega_1 \omega'_1 \\ \omega_x x + \omega_y y + \omega_z z &= \omega_1 z. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

2. Helyetteszve az (1), (4) és (5) értékeket a 257. §. (3) egyenletrendszérébe, rendre nyerjük:

$$\begin{aligned}\varphi_{2,x} &= c_2 \omega_2 \sin v \cdot z - \omega_1' y - 3\omega_1 \omega_1' x + c_1 \omega_1^2 z + \omega_1^2 y; \\ \varphi_{2,y} &= \omega_1' x - (c_1 \omega_1)' z - 3\omega_1 \omega_1' y - \omega_1^2 x; \\ \varphi_{2,z} &= (c_1 \omega_1)' y - c_2 \omega_2 \sin v \cdot x + 2c_1 \omega_1^2 x + 2\omega_1 \omega_1' z - 3\omega_1 \omega_1' z + \omega_1 \omega_1' z;\end{aligned}$$

vagy némi rövidítés után:

$$\left. \begin{aligned}\varphi_{2,x} &= -3\omega_1 \omega_1' x + (\omega_1^2 - \omega_1'') y + (c_1 \omega_1^2 + c_2 \omega_2 \sin v) z; \\ \varphi_{2,y} &= -(\omega_1^2 - \omega_1'') x - 3\omega_1 \omega_1' y - (c_1 \omega_1)' z; \\ \varphi_{2,z} &= + (2c_1 \omega_1^2 - c_2 \omega_2 \sin v) x + (c_1 \omega_1)' y.\end{aligned} \right\} \quad (6)$$

E kifejezések értelmezésére nézve v. ö. a 332. §. 2. pontját, 569. l.

3. Igen kíváncsnak látszik ezen analytikailag nyert kifejezések helyességét ellenőrizni; ezt a következőkben a 258. §-ban nyert geometriai eredmények alapján fogjuk tenni.

a. A centripetális gyorsulás változásából származó másodrendű gyorsulási componensek a jelen koordináta-rendszerünkben (hol OI_1 a Z tengely, az $I_1 OI_2$ sík, azaz az $I_1 OI_1$ sík, a ZX sík) következőleg egyszerűsödnek:

Az idézett §. 1. pontjának jelölésével itt:

$$\begin{aligned}l^2 &= x^2 + y^2 + z^2; & q_1^2 &= x^2 + y^2; & q_1 &= l \sin(r); \\ l \cos(r) &= z; & l \sin(r) \cos \eta_1 &= q_1 \cos \eta_1 = x.\end{aligned}$$

E szerint e 258. §. (7) értékei értelmében e négy componens:

$$-\omega_1^3 q_1; \quad 2\omega_1 \omega_1' q_1; \quad c_1 \omega_1^2 x; \quad c_1 \omega_1^2 z \dots \dots \dots (7)$$

Ez a négy öszszetevő az idézett §. szerint rendre egybeesik az $\overline{AA'}$, az $\overline{AQ_1}$, az $\overline{OQ_1}$, az $\overline{R_1 Q_1'}$ irányokkal (212a. ábra).

A q_1 az XY -síkhöz párhuzamos és iránycosinusai $x:q_1, y:q_1, 0$; ennek értelmében, az $AA' = ds$ ívelem iránycosinusai, mely a q_1 -re merőlegesen, az XY -síkhöz párhuzamosan, a növekvő ϑ -k mentén fekszik:

$$-\frac{y}{q_1}, +\frac{x}{q_1}, 0; \text{ ellenben az } \overline{AQ_1} = -q_1 \text{ irányéi: } -\frac{x}{q_1}; -\frac{y}{q_1}; 0.$$

Az $\overline{OQ_1}$ itt a positiv Z tengelybe esik, iránycosinusai: $0, 0, +1$; végre az $\overline{R_1 Q_1'}$ az $I_1 OI_1$ síkban (mely mindig az $I_1 OI_2$ síkkal esik egybe), azaz a ZX síkban, merőlegesen az OI_1 -re, azaz a Z tengelyre fekszik; ezért $\overline{R_1 Q_1'}$ itt az X tengelyhez párhuzamos és iránycosinusai $+1, 0, 0$.

E szerint a (7)-ben írt négy componens derékszögű vetületei az X, Y, Z tengelyek mentén a következő alkatrészeket szolgáltatják:

$$\left. \begin{aligned}+ \omega_1^3 y - 2\omega_1 \omega_1' x + c_1 \omega_1^2 z; \\ - \omega_1^3 x - 2\omega_1 \omega_1' y; \\ + c_1 \omega_1^2 x;\end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

* E componensek értékeit W. SCHELL teljesen tévesen tünteti elő: Theorie der Bewegung u. d. Kräfte, I. köt. 563. lap, 1879.

b. A szöggyorsulás változásából származó másodrendű gyorsulási komponensek a 259. §. (14) formulájában fel vannak ugyan írva; de szétbontásuk derékszögű összetevőkre mégis csak analitikailag történik s e célból jobb, ha az elsőrendű szöggyorsulástól függő elsőrendű gyorsulási komponenseket, melyek a 249. §. a. pontja szerint:

$$\omega'_y z - \omega'_z y; \quad \omega'_z x - \omega'_x z; \quad \omega'_x y - \omega'_y x,$$

differenciáljuk. Nyerjük:

$$\omega''_y z - \omega''_z y + \omega'_y v_z - \omega'_z v_y \quad \text{s i. t.}$$

Helyetteszve ide a 248. §-ból a $v_x = \omega_y z - \omega_z y$ stb. értékeket, és rendre az $x\omega_x \omega'_x - x\omega_y \omega'_y = 0$ s i. t. identitásokat hozzáadva, a 257. §. 2. pontja ω_1^2 kifejezésének felhasználásával nyerjük:

$$\left. \begin{aligned} (\omega'_y z - \omega'_z y)' &= \omega''_y z - \omega''_z y + \omega_x (\omega'_x x + \omega'_y y + \omega'_z z) - x\omega_1 \omega'_1; \\ (\omega'_z x - \omega'_x z)' &= \omega''_z x - \omega''_x z + \omega_y (\omega'_x x + \omega'_y y + \omega'_z z) - y\omega_1 \omega'_1; \\ (\omega'_x y - \omega'_y x)' &= \omega''_x y - \omega''_y x + \omega_z (\omega'_x x + \omega'_y y + \omega'_z z) - z\omega_1 \omega'_1; \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Tekintetbe véve az ezen §. (1), (4), (5) formuláiban felírt értékeket, ez a rendszer itt:

$$\left. \begin{aligned} c_2 \omega_2 \sin \nu \cdot z - \omega_1'' y - \omega_1 \omega_1' x \\ \omega_1'' x - (c_1 \omega_1)' z - \omega_1 \omega_1' y \\ (c_1 \omega_1)' y - c_2 \omega_2 \sin \nu \cdot x + c_1 \omega_1^2 x + \omega_1 \omega_1' z - \omega_1 \omega_1' z \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Hozzácsatolva ezeket a tagokat a (8) megfelelő tagjaihoz, a $\varphi_{2,x}$, $\varphi_{2,y}$, $\varphi_{2,z}$ componenseknek a (6) formuláiban felírt kifejezéseit minden tekintetben megegyezőleg újra nyerjük.

260. §. Gömbi mozgás tetszőleges rendű gyorsulásai és ezeknek néhány általános tulajdonsága.

1. A 241. §. (1) egyenletrendszerének n -szeri differenciálásából nyerjük:

$$\left. \begin{aligned} x^{(n)} &= v_{n,x} = \varphi_{n-1,x} = x, \alpha_1^{(n)} + y, \beta_1^{(n)} + z, \gamma_1^{(n)} \\ y^{(n)} &= v_{n,y} = \varphi_{n-1,y} = x, \alpha_2^{(n)} + y, \beta_2^{(n)} + z, \gamma_2^{(n)} \\ z^{(n)} &= v_{n,z} = \varphi_{n-1,z} = x, \alpha_3^{(n)} + y, \beta_3^{(n)} + z, \gamma_3^{(n)} \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

hol az n -ed rendű sebesség (azaz az $n-1$ -ed rendű gyorsulás) négyzete:

$$v_n^2 = v_{n,x}^2 + v_{n,y}^2 + v_{n,z}^2 = \varphi_{n-1,x}^2 + \varphi_{n-1,y}^2 + \varphi_{n-1,z}^2 = \varphi_{n-1}^2 \quad (2)$$

Jelelve ξ_n , η_n , ζ_n -nel az n -ed rendű sebesség középpontját, ez megfelel az

$$\begin{aligned} \xi_n \alpha_1^{(n)} + \eta_n \beta_1^{(n)} + \zeta_n \gamma_1^{(n)} &= 0, \\ \xi_n \alpha_2^{(n)} + \eta_n \beta_2^{(n)} + \zeta_n \gamma_2^{(n)} &= 0, \\ \xi_n \alpha_3^{(n)} + \eta_n \beta_3^{(n)} + \zeta_n \gamma_3^{(n)} &= 0, \end{aligned}$$

egyenleteknek, melyekből azonnal $\xi_n = \eta_n = \zeta_n = 0$ következik, azaz, a rendszer szilárd pontja a keresett középpont minden rendű sebességre nézve.

2. Analog jelöléssel, mint a 177—179. §§-ban, legyen φ_{m-1} és φ_{n-1} két magasabb rendű gyorsulás és $(\varphi_{m-1}, \varphi_{n-1})$ az irányaik által képezett szög ekkor:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{m-1}^2 &= x^{(m)2} + y^{(m)2} + z^{(m)2}; & \varphi_{n-1}^2 &= x^{(n)2} + y^{(n)2} + z^{(n)2}. \\ C_{m,n} &= \varphi_{m-1} \varphi_{n-1} \cos(\varphi_{m-1}, \varphi_{n-1}); & S_{m,n} &= \varphi_{m-1} \varphi_{n-1} \sin(\varphi_{m-1}, \varphi_{n-1}) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Ebből, tekintettel a fentírt (1) egyenletrendszerre [és a Math. repertorium 43. §-ának (3) és 44. §-ának (2a) formuláira], nyerjük:

$$\left. \begin{aligned} C_{m,n} &= x^{(m)} x^{(n)} + y^{(m)} y^{(n)} + z^{(m)} z^{(n)}; \\ S_{m,n} &= [(y^{(m)} z^{(n)} - z^{(m)} y^{(n)})^2 + (z^{(m)} x^{(n)} - x^{(m)} z^{(n)})^2 + (x^{(m)} y^{(n)} - y^{(m)} x^{(n)})^2]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

E kifejezésekből néhány alább felsorolt egyszerű következtetést vonhatunk, melynek részletes bizonyítását az olvasóra bizzuk.

a. A merev rendszer mindazon pontjai, melyeknek $n-1$ -ed rendű gyorsulása t -kor ugyanazon *constans*sal egyenlő, az

$$x^{(n)2} + y^{(n)2} + z^{(n)2} = \text{constans}^2 \dots \dots \dots (5)$$

ellipsoidon fekszenek, melynek középpontja a rendszer szilárd pontja. (Itt és a következő pontokban az $x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)}$ menynyiségek az (1) formulák segélyével x, y, z , által fejezendők ki.)

b. Azok a pontok, melyekre nézve $C_{m,n} = \text{constans}$, a (4) és (1) formulák szerint *másodrendű* felületen fekszenek.

c. Azok a pontok, melyekre nézve az $S_{m,n} = \text{constans}$, a (4) és (1) formulák szerint *negyedrendű* felületen fekszenek.

d. Azok a pontok, melyekre nézve a $C_{m,n} : S_{m,n} = \text{constans}$, megfelelnek a $(\varphi_{m-1}, \varphi_{n-1}) = \text{constans}$ feltételnek, melyet, tekintettel a (4) és (3) formulákra, szabad írunk:

$$\varphi_{m-1} \varphi_{n-1} \cos(\varphi_{m-1}, \varphi_{n-1}) = \text{constans } \varphi_{m-1} \varphi_{n-1},$$

azaz, C -vel jelelve e *constanst*, az egyenlet négyzete:

$$[x^{(m)} x^{(n)} + y^{(m)} y^{(n)} + z^{(m)} z^{(n)}]^2 = C^2 (x^{(m)2} + y^{(m)2} + z^{(m)2}) (x^{(n)2} + y^{(n)2} + z^{(n)2}), \quad (6)$$

mely általánosságban *negyedrendű* felületet képvisel, melybe azon pontok számára, hol φ_{m-1} és φ_{n-1} párhuzamosak, C^2 helyébe I teendő, míg oly pontokra nézve, hol φ_{m-1} és φ_{n-1} egymásra merőlegesek, az egyenlet átmegyen az

$$x^{(m)} x^{(n)} + y^{(m)} y^{(n)} + z^{(m)} z^{(n)} = 0 \dots \dots \dots (7)$$

másodfokú egyenletbe.

Jegyzet. Ha C^2 helyébe 1-et teszünk, a (6) egyenlet redukálódik, mint könnyű meggyőződni, a következő alakra:

Az I , pont a gördülés közben coincidál az I' ponttal; J , és J' pontok az OI , és OI' egyenesek folytatásában fekvődvén, I -, illetve J , egyidejűleg coincidál I' , illetve J' -ponttal.

Az IN és IN két görbének a közös I pontra vonatkozó osculáló síkjai egymást az I -ben a két görbéhez húzott közös érintőegyenest metszik; e síkokban fekszenek a ρ , illetve P görbületi sugarak; e síkok normálisai OC , illetve OI' ; ezek a C_1I , illetve I_1I egyenesekkel az e , illetve ε szöget képezik, ellenben a gömbfelületre emelt OI normálissal (ρ) és (P) szögeket, úgy, hogy áll:

$$e + (\rho) = \frac{1}{2}\pi = \varepsilon + (P).$$

A KIK és a KIK görbék görbülete a közös I pontra vonatkozólag $1:IC_1$ és $1:II_1$; ámdé ez, MEUSNIER tétele és LIOUVILLE megjegyzése szerint (Mathematikai repertórium, 99. §. 3. pontja):

$$\frac{1}{IC_1} = \frac{\sin e}{\rho}; \quad \frac{1}{II_1} = \frac{\sin \varepsilon}{P}; \quad \dots \dots \dots (1)$$

de ezen menynységek nem fejeznek ki mást, mint az IN , illetve az IN görbék *geodásiai görbületét* (v. ö. az i. helyet).

Jelelje dt azt az időközt, mely elfolyik, mialatt a közös érintkezés I pontja átment I' -be, azaz, mialatt I , az I' -vel ér össze. Ekkor az II , ív csak magasabb rendű kicsiny menynységekkel különböztetik az II' ívtől; továbbá, mivel IN és IN a gömbfelületen fekvődvén, az I, J , és az I', J' hosszak csak másodrendű kicsinyek, az II , ív az II , ívtől és az II' ív az II' ívtől szintén csak magasabb rendű menynységekkel különböztetik.

E szerint a kúpok elemi gördülése közben az érintő síkban fekvő KIK és KIK görbék is gördülven egymáson, e gördülés sebessége az I -ben csak magasabbrendű kicsiny menynységekkel különböztetik a kúpok-étől.

Ámdé, ily *sík* görbék gördülésére nézve a 180. §. tétele szerint, tekintettel arra, hogy itt OI a hosszegység és C_1 és I_1 e *sík* görbék görbületi középpontjai:

$$\frac{\omega}{c} = \frac{1}{IC_1} \pm \frac{1}{II_1} = \frac{\sin e}{\rho} \pm \frac{\sin \varepsilon}{P} = \operatorname{tg} e \pm \operatorname{tg} \varepsilon, \quad \dots \quad (2a)$$

vagy egyszerűen:

$$\frac{\omega}{c} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\rho)} \pm \frac{1}{\operatorname{tg}(P)} \quad \dots \dots \dots (2)$$

A $+$ előjel érvényes, ha görbületek ellentettek (ha a görbék domború oldalai érintkeznek), ellenben a $-$ előjel, ha a görbületek egy oldalon fekszenek (az IN domború oldala az IN homorú oldalával

mivel pedig az I , és az I' mellett lévő (I) és (I') szögek csak végtelen kicsiny menynyiségekkel különbözhetnek az $\frac{1}{2}\pi$ -től:

$$\lim \frac{A\alpha}{As} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\cos e}; \quad \lim \frac{AA'}{As} = \frac{dA}{ds} = \frac{1}{\cos \varepsilon}.$$

Végre, a gördülés sebességével, $\lim \left(\frac{II'}{At} \right) = c = \frac{ds}{dt}$ -el osztva az (5)-öt:

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{c^2} &= \frac{1}{\cos^2 e} + \frac{1}{\cos^2 \varepsilon} - \frac{2}{\cos e \cos \varepsilon} \cos(e + \varepsilon) \\ &= \frac{1}{\cos^2 e} + \frac{1}{\cos^2 \varepsilon} - 2 + 2 \frac{\sin e \sin \varepsilon}{\cos e \cos \varepsilon} \\ &= \frac{1}{\cos^2 e} - 1 + \frac{1}{\cos^2 \varepsilon} - 1 + 2 \operatorname{tg} e \operatorname{tg} \varepsilon, \end{aligned}$$

azaz:

$$\frac{\omega}{c} = \operatorname{tg} e + \operatorname{tg} \varepsilon; \quad \dots \dots \dots (6)$$

ez pedig a megelőző pont (2) tétele, ha a görbék domború oldalai érintkeznek egymással.

A többi két eset (egy oldal felé fordított domborúságok) épen úgy tárgyalható.

262. §. A gömbi ruletták geodásiai görbületének középpontja.

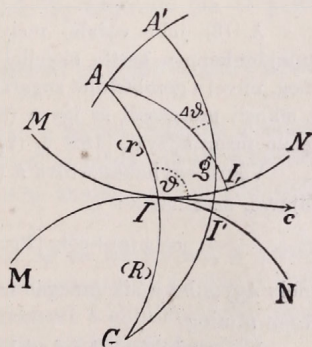
Legyen (215. ábra) MN a gördülő MN az alapgörbe a sugáregységi gömbfelületen; A a mozgó merev rendszer tetszőleges, de a gömbfelületen fekvő pontja t időkor; A' ugyanezen pont helyzete $t + \Delta t$ -kor, rulettája az AA' görbe.

Továbbá legyen I a momentán pólus t -kor, I' e pólus $t + \Delta t$ -kor, hová ekkor az MN görbe I pontja érkezik, míg a t -kor I, A helyzetű legnagyobb körív $t + \Delta t$ -kor $I' A'$ helyzetbe jut; legyen még $II' = \Delta s = IP$.

Végre legyen G a gömbfelület azon pontja, melyben a rulettára normális IA legnagyobb körív folytatását a rulettára szintén normális $A'I'$ legnagyobb ív folytatása metszi.

Ez a pont végtelen kicsiny II' ívelem esetében az AA' ruletta-ív geodásiai görbületének középpontja (261. §. 2. pontja), melynek meghatározó egyenletét felállítani kívánjuk.

Az $(r) = IA$ ív a gördülés c sebessége irányával ϑ szöget képez, ellenben az IA ív az $I' A'$ ívvel $\Delta \vartheta$ szöget; e szerint a mozgó rendszer szögsebessége itt is $\frac{d\vartheta}{dt}$.



215. ábra.

Ha (A) és (G) az AGg háromszög A és G melletti szögei, akkor ezen gömbháromszögből a megelőző §. 2. pontjának (4) mintája szerint:

$$(A\vartheta)^2 = (A)^2 + (G)^2 + 2(A)(G) \cos [(r) + (R)] \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Az IAI , és az IGI' gömbháromszögekből a sinus-tétel szerint:

$$\frac{\sin(A)}{\sin II} = \frac{\sin(I)}{\sin(r)}; \quad \frac{\sin(G)}{\sin II'} = \frac{\sin(I)}{\sin(R)}.$$

Ámde az (I') és (I) szögek csak végtelen kicsiny mennyiségekkel különböznek a $\pi - \vartheta$, illetve $+\vartheta$ értékektől, miáltal:

$$\lim \left(\frac{A}{As} \right) = \frac{\sin \vartheta}{\sin(r)}; \quad \lim \left(\frac{G}{As} \right) = \frac{\sin \vartheta}{\sin(R)}$$

ezenkívül

$$\lim \left(\frac{A\vartheta}{As} \right) = \lim \left(\frac{A\vartheta}{At} : \frac{As}{At} \right) = \frac{\omega}{c},$$

e szerint a $(As)^2$ -el való osztás után az (1)-ből:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \sin^2 \vartheta \left\{ \frac{1}{\sin^2(r)} + \frac{1}{\sin^2(R)} + \frac{2}{\sin(r) \sin(R)} \cos [(r) + (R)] \right\}, \quad . \quad . \quad (2)$$

azaz, a megelőző §. 2. pontja transformációja szerint:

$$\frac{\omega}{c} = \left\{ \frac{1}{\operatorname{tg}(r)} + \frac{1}{\operatorname{tg}(R)} \right\} \sin \vartheta \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

A (3) jobb oldala, mely a (2)-ből gyökvonás útján származott, tulajdonképpen kettős előjellel bír; de itt csak a pozitív jel maradhat meg, mivel a gömbfelület sugarát a végtelenig növesztve, a gömbi mozgásnak a síkbeli mozgással és így a (3) formulának is a nevezett mozgás megfelelő formulájával, [182. §. (2)] meg kell egyeznie.

Végre egybekapcsolva a (3)-at a megelőző §. (2) vagy (6) formulájával, származik:

$$\cotg(\varrho) + \cotg(P) = [\cotg(r) + \cotg(R)] \sin \vartheta, \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

mely egyenlet a sík mozgás megfelelő egyenletével [182. §. (1a)] teljesen analog.

Ha gördülő görbe domború oldala az alapgörbe homorú oldalával érintkezik, akkor ezen egyenlet jobb- és baloldali második tagjának előjele megváltozik [v. ö. az i. h. (1b) formuláját].

I. *Jegyzet.* Az AA' ruletta gömbi görbületi sugara az $(r) + (R)$ ívösszeg; a ruletta körbe megyen át, ha ez az összeg állandó.

II. *Jegyzet.* *Inflexióspont* ott lép fel, hol az $(r) + (R)$ ív az $\frac{1}{2}\pi$ értékkel egyenlő, azaz, mikor az osculáló kör a gömb egy legnagyobb köre; ekkor $\cotg(r) \cotg(R) - 1 = 0$ vagy $\cotg(r) + \cotg(R)$ végtelen nagy; ha ekkor a $\cotg(\varrho) + \cotg(P)$ véges, akkor $\sin \vartheta = 0$.

263. §. Az EULER-SAVARY-féle szerkesztés alkalmazása a gömbi ruletták geodásiai görbülete középpontjainak meghatározására.

Tekintsük a 213. ábrában előtüntetett KIK és KIK két síkbeli görbét, mely a kúpok gördülése közben közönséges síkbeli gördülést végez egymáson.

Ha az alakkúp és a gördülőkúp alakja ismeretes, akkor a KIK és a KIK görbék alakja és C_1 és I_1 görbületi középpontjai is ismertek; e szerint a KIK síkjában fekvő és vele együtt mozgó tetszőleges rendszerbeli pont A_1 pont $A_1A'_1$ rulettájának G_1 görbületi középpontja az EULER-SAVARY-féle szerkesztés (183. §.) alapján azonnal található.

Ámde, egybekapcsolva A_1 -t, A'_1 -t s i. t. az O szilárd ponttal, az OA_1 , OB_1 , s i. t. sugarak rendre A , A' , . . . pontokban metszik a gömbfelületet és így az $A_1A'_1$ síkbeli ruletta nem más, mint az AA' gömbi ruletta (centrális, az O -ból képezett) vetülete az I -ben a felülethez húzott érintő síkra.

Az AA' gömbi ruletta geodásiai görbületének G középpontját (215. ábra) a gömbfelületen az I -től számított (R) ív és az Ic egyenestől számított $\pi - \vartheta$ szög adja meg; ezért, MEUSNIER tétele és LIOUVILLE megjegyzése értelmében [Mathematikai repertórium 99. §. 3. pontja] az AA' -nak az I tangenciális síkjára való $A_1A'_1$ vetülete csak oly görbületi sugárral, illetve görbületi középponttal bírhat, mely az IG ívnek e síkra való IG_1 -, illetve a G -nek G_1 centrális (az O pontot szempontnak tekintő) vetülete.

Az IG_1 görbületi sugár értéke e szerint (a gömb sugara a hosszegységgel lévén egyenlő) $IG_1 = \text{tg}(R)$.

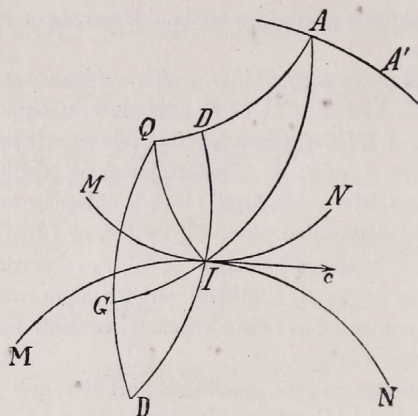
Szemmel tartva a fent mondottakat, a gömbi ruletták geodásiai görbületének meghatározására következő (a megfelelő sík mozgásánál [183. §.] alkalmazott eljáráshoz teljesen analog) geometriai eljárás kínálkozik:

Legyenek MIN és MIN a gördülő és az alapgörbék a gömbön (216. ábra); D és D az érintkező pontra vonatkozó geodásiai görbületeik középpontjai A a merev rendszerrel a gömbfelületen mozgó pont, AA' a rulettája, melynek geodásiai görbületét keressük.

Fektessünk az A és D valamint az A és I pontokon keresztül legnagyobb köríveket és folytassuk ezeket a D -n és az I -n túl; húzzunk az I ponton keresztül az AI ívre merőleges IQ legnagyobb körívet, mely Q -ban metszi az AD ív folytatását; végre kapcsoljuk a Q -t a D -vel a QD legnagyobb körívvel össze, mely az AI folytatását G -ben metszi; ez a G az AA' ruletta geodásiai görbületének keresett középpontja.

A gömbi ruletták egyéb görbületi viszonyai a síkbeli rulettákéi-

hez teljesen analog módon állapíthatók meg, miért is itt ezek részletezésétől eltekintünk (V. ö. a 269. §. 25—30. feladatait).



216. ábra.

264. §. Gömbön mozgó merev gömbi görbe beburkolóinak geodásiai görbülete.

Bebizonyítjuk a következő (a sík mozgás megfelelő viszonyainál [190. §.] szintén fennálló) tételt:

A gömbön mozgó merev gömbi görbe beburkolójának görbületi középpontja egybe esik azon ruletta görbületi középpontjával, mely rulettát a gömbi görbe görbületi középpontja ír le.

Legyen (217. ábra) mn a gömbi görbe, h_1 geodásiai görbületének középpontja; $m'n'$ e görbe szomszédos helyzete, AB beburkolója; továbbá, ha $m'n'$ a gömbi görbe helyzete, akkor I' a momentán pólus és I_1 az MN gördülő görbe azon pontja, mely akkor I -el esik egybe.

Az AB ívelem az IA és az $I'B$ legnagyobb körívekre merőleges lévén, a h_1AI egy legnagyobb körív, melynek folytatását a BT legnagyobb körív folytatása H_1 -ben metszi, mely H_1 e szerint az AB envelope-nak geodásiai görbületi középpontja.

Az I_1 és a h_1 pontokon átfektetett legnagyobb körív B_1 -ben metszi a beburkolót; az elemi gördülés után az I_1 az I' -be, a B_1 a B -be esik és így az ív forgás-szöge egyenlő a rendszer $\Delta\theta$ gördülési szögével, azaz $(B_1h_1B) \sphericalangle = \Delta\theta_1 = \Delta\theta$.

Jeleljék:

$$Ih_1 iv = (r_1); \quad IH_1 Iv = (R_1); \quad (h_1 Ic) \sphericalangle = \theta_1; \quad II_1 = II = \Delta s;$$

továbbá (H_1) és (h_1) a $(H_1h_1h_1)$ gömbi háromszögnek a H_1 és h_1 csúcsok melletti szögeit.

$$\frac{\omega}{c} = \left\{ \frac{1}{\text{tg}(r_1)} + \frac{1}{\text{tg}(R_1)} \right\} \sin \vartheta_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Összehasonlítva e formulát a 262. §. (3) egyenletével, kitűnik, hogy ez a (4) egy oly pontnak $(r_1) + (R_1)$ geodásiai görbületi sugárral bíró rulettájára nézve érvényes, mely pontnak az I momentán pólustól számított gömbi koordinátái (r_1) és ϑ_1 [ott ellenben (r) és ϑ]; de ez a pont csak a h_1 középpontja az mn geodásiai görbületének lehet; e szerint a H_1 nem csak az AB envelope-nak, hanem a h_1 rulettájának is a geodásiai görbületi középpontja. Evvel fent kimondott állításunk be van bizonyítva.

Jegyzet: A sík mozgásnál talált eredményeknek megfelelőleg (190. §.) az az olvasóra bízunk a következő részletek bebizonyítását:

1. Ha mn és m_1n_1 párhuzamos gömbi görbék (melyeknek megfelelő ívelemei egymástól egyenlő ítváolságban vannak), akkor ezeknek beburkolói is ily párhuzamos görbék.

2. Ha az mn görbe legnagyobb kör, akkor ez csak úgy maradhat a gömbfelületen, ha a momentán pólus e kör kerületi pontja; ez annyit mond, hogy akkor ez az mn legnagyobb kör egyszerűen az MN gördülő görbével esik egybe, és az mn beburkolója az MN alapgörbe, végre pedig, hogy ekkor még (4)-ből: $\omega \operatorname{tg} (R_1) = c \sin \vartheta_1$.

265. §. A gömbi ruletta osculáló síkjának helyzete.

A tetszőleges A pont momentán sebessége merőleges az OI_1 momentán tengely- és az A -ból reá bocsátott $AQ_1 = q$ függélyes által meghatározott síkra, ezen I_1OA sík e szerint az A pályagörbéjének normális síkja, melyben a φ_n normális gyorsulás is fekszik (218. ábra és 253. §.).

A normális gyorsulás pedig minden térbeli pályánál ennek fő (vagy első) görbületi sugarába esik [51. és 52. §§.], míg ezen (fő-) normális és az érintő egyenes a tárgyalt pálya osculáló síkjában fekszenek.

Ezen egyszerű megfontolások a pont körüli (gömbi) pályák görbületi viszonyai taglalására is alkalmazhatók.

Jeleljék η_n az OI_1 és a φ_n által képezett szöget; mivel φ_{n_1} és φ_{n_2} a φ_n -nek az OI_1 -re merőleges és a hozzá párhuzamos vetületei [a 253. §. (4a) és (5) egyenletei], azért a 211. és 218. ábrák jelölései szerint:

$$\sin \eta_n = \varphi_{n_1} : \varphi_n; \quad \cos \eta_n = \varphi_{n_2} : \varphi_n;$$

$$\operatorname{tg} \eta_n = \frac{\varphi_{n_1}}{\varphi_{n_2}} = - \frac{\omega \sin (r) + c \sin \vartheta \cos (r)}{c \sin \vartheta \sin (r)} = - \frac{\omega}{c} \frac{1}{\sin \vartheta} - \cotg (r) \quad (3)$$

Evvel a görbületi vagy az osculáló sík helyzete adva van, mert ez merőleges az AOI_1 síkra és az OI_1 momentán-tengelylyel η_n szöget képez.

Jegyzet: Mivel a 253. §. 4a. kifejezései értelmében pozitív ω és c sebességeknél és hegyes (r) és (ϑ) szögeknél a φ_{n_1} negatív, azaz \vec{AQ}_1 mentén-, a φ_{n_2} pedig pozitív, azaz \vec{OI}_1 mentén fekszik, azért ekkor a $\sin \eta_n$ negatív, a $\cos \eta_n$ pozitív és így az η_n a negyedik quadransban fekszik (218. ábra). Célszerű ennél fogva egy új, η szöget az $\eta_n = 2\pi - \eta$ összefüggés segítségével bevezetni (218. ábra), miáltal $\cos \eta = \cos \eta_n$; $\sin \eta = -\sin \eta_n$.

266. §. A gömbi ruletta görbülete egyenlő osculáló síkja- és a gömb metszéséből származó gömbi kör görbületével.

Jelölje $r-R$ a gömbi ruletta görbületi sugarának hosszát; a normális gyorsulás általánosságban [46. §. (5)] a 218. ábra jelölésével:

$$\varphi_n = \frac{v^2}{r-R} = \frac{\omega^2 r^2}{r-R} = \frac{\omega^2 \sin^2(r)}{r-R} \dots \dots \dots (1)$$

A 253. §. (5) kifejezésének tekintetbe vételével, hol azonban a gömbnek ott r -rel jelelt sugarát a hosszegységnek vesszük:

$$\frac{1}{r-R} = \frac{1}{\omega \sin^2(r)} [\omega^2 \sin^2(r) + 2c\omega \sin \vartheta \sin(r) \cos(r) + c^2 \sin^2 \vartheta]^{\frac{1}{2}} \dots \dots (2)$$

Ámde, másfelől rövidség kedvéért írva,

$$[\omega^2 \sin^2(r) + 2c\omega \sin \vartheta \sin(r) \cos(r) + c^2 \sin^2 \vartheta]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{[\dots]},$$

az idézett §. (4a) és (5) egyenletei szerint, tekintettel a megelőző § jegyzetében behozott η szögre:

$$\sin \eta = \frac{\omega \sin(r) + c \sin \vartheta \cos(r)}{\sqrt{[\dots]}}; \quad \cos \eta = \frac{c \sin \vartheta \sin(r)}{\sqrt{[\dots]}}.$$

Képezve ezen értékekkel a

$$\cos [\eta + (r)] = \cos \eta \cos(r) - \sin \eta \sin(r)$$

kifejezést, azonnal észreveszszük, hogy a (2)-ből marad:

$$\frac{1}{r-R} = -\frac{1}{\cos [\eta + (r)]} \dots \dots \dots (3)$$

Az egyenlet geometriai értelmezése céljából bocsássunk O -ból a φ_n irányára Og merőlegest (218. ábra), mely a gömbfelületet G -ben átdöfi; a rajz közvetlenül adja ($OA = 1$ lévén):

$$\overline{Ag} = \sin [\eta + (r) - \frac{1}{2}\pi] = -\cos [\eta + (r)],$$

azaz, a (3) szerint az, \overline{Ag} az A pályájának görbületi sugara az A pontra nézve.

Mivel pedig e sugár a g pontban merőleges \overline{Og} -re, azért az \overline{Ag} egyszersemind a g középpontú gömbi körnek is a sugara, mely kör síkja az A pályájának osculáló (vagy görbületi) síkjába esik.

Evvél tételünk be van bizonyítva és ki van mutatva, hogy a gömbi pálya tényleges görbületi sugara egyenlő a gömb sugarának a normális gyorsulás irányára való vetületével.

1. *Jegyzet.* A G az A rulettájának gömbi görbület középpontja; ítvávola az A -tól (a gömbi vagy geodásiai görbületi sugár), mivel I_1A ív $= (r)$, I_1G ív $= (R)$ és (218. ábra): GA ív $= (r) - (R)$; össze-
fűgése tényleges görbületi sugárral:

$$\left. \begin{aligned} r - R &= \sin [(r) - (R)] ; * \\ \overline{gA} &= \sin (GA) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

2. *Jegyzet:* Ha az A és a G az I különböző oldalain fekszenek, akkor az R távolság és az (R) ív előjele megváltozik.

267. §. *A pályák osculáló síkjainak speciális helyzetei.*

a. Oly pontok, melyek osculáló síkja a momentán tengelyre merőleges, megfelelnek a $\eta = \frac{1}{2}\pi$ feltételnek, de ekkor, mivel (r) csak az I_1 pontra nézve zérus, a 265. §. (3) egyenlete szerint, $\vartheta = 0$; a mi azt mondja, hogy az ily pontok az I_1O_1 (a momentán sebesség és a momentán gyorsulás tengelyei) síkjában fekszenek és hogy az I_1 pólus is ily pont.

b. Ellenben oly pontok, melyeknél az osculáló sík a momentán tengelyhez párhuzamos, az $\eta = 0$, vagy $\eta = \pi$ egyenletet elégítik ki.

Ezekre nézve a görbületi sugár is párhuzamos a momentán tengelyhez és az $\eta = 0$ vagy $\eta = \pi$ egyenlettel a 265. §. (3) formulájából lesz:

$$\operatorname{tg} (r) = -\frac{c}{\omega} \sin \vartheta,$$

vagy derékszögű coordinátákban [253. §. (3)], hol $\operatorname{tg} (r) = \frac{y}{z} \frac{1}{\sin \vartheta}$; és $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{y}{x}$;

$$cyz = -\omega (x^2 + y^2); \dots \dots \dots (1)$$

ez pedig ugyanaz a másodrendű kúp [254. §. (1)], melynek pontjaira nézve a φ_n vetülete a g -ra zérus.

Ezen másodrendű kúp a gömbi ruletták görbülete elméletében hasonló szereppel bír, mint a síkbeli mozgásoknál az inflexiók kör [170. §.]; de megjegyzendő, hogy itt az inflexiók pontokban a görbület nem lehet zérus, mert a gömbi rulettáknál a lehető legnagyobb görbületi sugár a gömb sugara, illetve a geodásiai görbület maximuma $\frac{1}{2}\pi$.

c. Végre, az oly pontok, melyek osculáló síkja az O centrumon megyen át, megfelelnek az $\eta = \pi - (r) = 2\pi - \eta_n$ feltételnek, azaz, a 265. §. (3) egyenlete szerint az

$$c \{ \cotg (r) - \operatorname{tg} [\pi - (r)] \} \sin \vartheta = -\omega, \quad \text{vagy az}$$

$$c [\operatorname{tg} (r) + \cotg (r)] \sin \vartheta = -\omega.$$

egyenletnek, melynek alakja a b . pont eljárásával, derékszögű coordinátákban:

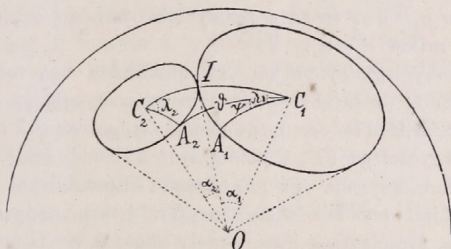
$$cy[x^2+y^2+z^2]=-\omega z(x^2+y^2). \quad (2)$$

Ezen harmadrendű kúpon fekvő pontokra nézve e szerint a görbületi sugár a gömb sugara, a geodásiai görbületi sugár pedig $\frac{1}{2}\pi$.

9. Feladatok a merev rendszerek pont körüli (gömbi) mozgására.

268. §. *Feladatok a momentán centrumokra és görbéire, a kúpok gördülésére, a gömbi ruletták alakjára és a kinematikai lánczokra.*

1. *A gömbi epicyclois esete.* Az alapgörbe C_1 középpontú, α_1 gömbi sugarú* kör; a gördülő görbe C_2 középpontú, α_2 gömbi sugarú kör (219. ábra).



219. ábra.

Legyen A_1 az alapkör egy pontja, I a momentán pólus, A_2 a gördülő görbének azon pontja, mely a gördülés folyamában A_1 -be jut; λ_1 és λ_2 az A_1C_1O és az A_2C_2O síkok és a C_1OC_2 sík között lévő szögek.

Az IA_1 és az IA_2 körívek egyenlő hosszúságú lévén e feltétel:

$$\lambda_1 \sin \alpha_1 = \lambda_2 \sin \alpha_2 \quad (1)$$

Legyenek továbbá ϑ és ψ az A_2 pontnak C_1 -ből számított gömbi polárcordinátái, úgy, hogy

$$\vartheta = (C_1OA_2) \nearrow; \quad \psi = (A_1C_1A_2) \nearrow;$$

ezek összefüggése megadja az A_2 gömbi epicycloisának az egyenletét.

A $(C_1A_2C_2)$ gömbi háromszögben a C_1 melletti szög $\lambda_1 - \psi$; a C_2 melletti λ_2 ; továbbá C_1C_2 ív $= \alpha_1 + \alpha_2$; C_2A_2 ív $= \alpha_2$. Elemi gömbháromszögtani tételek szerint (Math. repertórium 12. §. 2. rendszer):

$$\left. \begin{aligned} \cos \vartheta &= \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \cos \alpha_2 + \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \sin \alpha_2 \cos \lambda_2 \\ \cos \alpha_2 &= \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \cos \vartheta + \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \sin \vartheta \cos(\lambda_1 - \psi) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

* Gömbi sugár az a szög, melyet a gömb középpontjából a kör középpontjához és kerületéhez húzott egyenesek egymással képeznek.

A λ_2 az (1) alapján a λ_1 segítségével kifejezhető és ekkor a (2) egyenleteiből a λ_1 kiküszöbölendő; a ϑ és ψ között származó kapcsolat a gömbi epicyclois keresett egyenlete. V.

2. Vizsgáltassék meg ugyanily módon a gömbi *hypocyclois*, mely keletkezik, ha a kisebb nyílású körkúp gördül az álló, nagyobb körkúp belső kerületén. V.

3. Vizsgáltassék meg ugyanily módon a gömbi *pericyclois*, mely keletkezik, ha a nagyobb nyílású gördülő körkúp belső kerületével gördül az álló kisebb körkúp. V.

4. Állíttassanak fel a gömbi epitrochois, hypotrochois, peritrochois egyenletei, mely görbéket a gördülő kör-kerületen kívül lévő, a gördülő kúppal merev kapcsolatban a gömbfelületen mozgó pontok írnak le. V.

5. Vitessenek át a 152. §. tételei és esetei a gömbre. V.

5a. Vizsgáltassék meg részletesen az a gömbi epicyclois és hypocyclois, mikor $\alpha_1 = 2\alpha_2$ és az a pericyclois, mikor $\frac{1}{2}\alpha_1 = \alpha_2$; továbbá az az epicyclois, mikor $\alpha_1 = \alpha_2$. V.

6. Valamely legnagyobb kör AB quadransa úgy mozog a gömbön, hogy síkja mindig az O középponton megyen át, míg az A és B pontjai két legnagyobb, szilárd helyzetű, egymással ε szöget képező körön tartoznak maradni (megegyezőleg a 223. §. példájával s a 193. ábrával); bizonyíttassék be, hogy a quadrans síkja egy másodrendű kúpot burkol be, mely a két szilárd kör síkjait oly két sugár mentén érinti, melyek e síkok OA_0 metszővonalára merőlegesek [azaz, mely sugarak az OA és OB vonalak azon helyzetei, mikor quadrans az egyik vagy a másik síkkal esik egybe]. Sch.

7. A megelőző feladat, ha benne $\varepsilon = \frac{1}{2}\pi$, speciális esete a következő általánosabb problémának: Merev rendszer oly formán mozog pont körül, hogy egy legnagyobb kör állandó hosszúságú ívének (ú. n. *főv*-nek) egyik végpontja egy szilárd helyzetű legnagyobb köríven, másik végpontja pedig oly gömbi körön mozog, mely utóbbinak középpontja a szilárd főíven fekszik. [Ez a 147. §. második példájának a gömbre való átvitele].

Bizonyíttassék be, hogy az MIN gördülő kúp negyedrendű, míg az M/N alapkúp nyolczadrendű; továbbá, a mikor a gömbi kör legnagyobb körre fajul, hogy akkor az MIN negyedrendű kúp egybevágó két másodrendű kúppá fajul. Egyeztessék ez az eredmény a 6.-tal. Sch.

8. A megelőző feladat megfordítása következőleg formulázható: Merev rendszer olyformán mozog pont körül, hogy egy legnagyobb körének íve (ú. n. *főv*) mindig a gömbfelületen lévő szilárd ponton megyen keresztül, míg ezen főv meghatározott pontja egy gömbi kört ír le, mely tetszőleges helyzetű és sugarú lehet. Bizonyíttassék e megfordítás és keresetessék meg a momentán pólusok görbéje, az alap és a gördülő kúp alakja. Sch.

9. Valamely merev rendszer úgy mozog szilárd pont körül, hogy a sugáregységnyi gömbfelületen fekvő 2η középponti szögű AB legnagyobb körív A és B végpontjai egymásra merőleges két legnagyobb EA és EB körön síklanak. A szilárd O pont legyen a koordináták kezdete; a Z tengely a OE vonalban legyen, mely a szilárd két legnagyobb kör metszővonala;

bizonyíttassék be, hogy a momentán tengelyek helye *álló* coordináta-rendszerben, azaz, hogy az alapkúp az

$$(x^2+z^2)(y^2+z^2)\cos^2 2\eta = z^4 \quad (1)$$

egyenletnek felel meg, mely *negyedrendű* kúpot képvisel; ellenben, hogy ugyanezen momentán tengelyek helye a pontrendszerrel együtt mozgó coordinátarendszerben, azaz, gördülő kúp az

$$y^2 = (z^2 \sin^2 \eta - x^2 \cos^2 \eta) \cos 2\eta \quad (2)$$

egyenletnek felel meg, mely *másodrendű* kúpot jelent. V.

10. A *gömbi conchois* csak annyiban különbözik a sík conchoistól (70. ábra, 183. lap), hogy az egész rajz gömbfelületre alkalmazandó; ekkor az AB , NM , N_1M_1 , . . . legnagyobb körívek lesznek, melyek mind az O póluson haladnak keresztül, míg az MM'' . . . és NN'' . . . az O körüli párhuzamos körökké válnak, végre a $BN \dots N_3$ -ből is legnagyobb kör lesz. E mozgás a 8. felelet speciális esete.

Szerkesztessék e gömbi conchois egyenlete és határoztassék a rajta haladó pont mozgása, ha az ABO ívnek O körüli szögsebessége állandó. A.

11. A 153. §-ban említett két példa: az *Archimedes*-féle spirálisnak és a parabolának egyenesen való gördülése vitessék át a megfelelő gömbi mozgásra és vizsgáltsassanak meg a keletkező ruletták. V.

12. Valamely merev, derékszögű, egyenoldalú AOB sík háromszög a derékszögű O csúcsa körül mozog. Legyenek v_A és v_B az A és a B pontok sebességei és a az egyenlő oldalak hossza. Bizonyíttassék be, hogy bármily O körüli mozgásnál a v_A vetülete az OB egyenesre egyenlő a v_B vetületével az OA egyenesre, de vele ellentett jelű; továbbá, hogy e két sebességnek az AOB lap normálisára való vetületei is egyenlők, de ellentett jelűek, végre hogy a v_A és a v_B és az OA irányai által képezett szögek egyike hegyes, másika tompa.

[A feladat többféleképen fejthető meg.

a. *Első eljárás.* Legyenek OA és OB a merev rendszerrel mozgó X , és Y , coordináta-tengelyek, legyen a Z , ezek pozitív normálisa; ekkor valamely x , y , összszrendezőjű pontnak az X , Y , Z , tengelyek irányaira vonatkozó sebességi összszetevői a 243. §. (3) egyenletei szerint:

$$v_x = \omega_y z, -\omega_z y, \quad v_y = \omega_z x, -\omega_x z, \quad v_z = \omega_x y, -\omega_y x, \quad (1)$$

Az A pont coordinátái:

a B pontéi:

$$x = a, \quad y = 0, \quad z = 0; \quad x = 0, \quad y = a, \quad z = 0.$$

Az A sebességi componensei (1)-ből:

$$\left. \begin{array}{ccc} 0, & +a\omega_z, & -a\omega_y; \\ -a\omega_z, & 0, & +a\omega_x; \end{array} \right\} \quad \text{A } B \text{ sebességi componensei (1)-ből:} \quad (2)$$

azaz a v_A vetülete Y -re (OB -re) egyenlő, de ellentett jelű a v_B -nek az X -re (OA -ra) való vetületével:

$$v_A \cos(v_A, OB) = -v_B \cos(v_B, OA) = \omega_z, \dots (3)$$

b. *Második eljárás.* Legyenek valamely szilárd tengely-rendszerre nézve az A és a B pont koordinátái $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$; áll:

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 &= a^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2, \\ x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

A második egyenlet differentiálquotienséből:

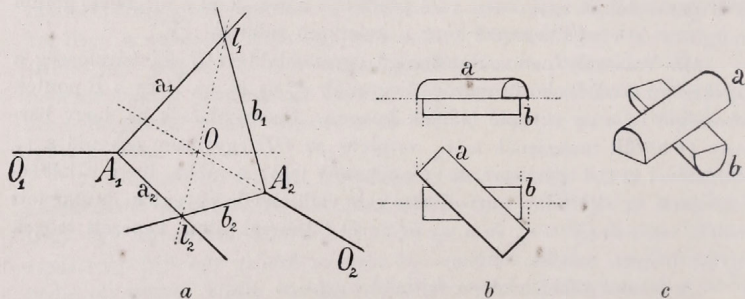
$$x_2 x'_1 + y_2 y'_1 + z_2 z'_1 = -(x_1 x'_2 + y_1 y'_2 + z_1 z'_2),$$

avagy, a -val osztva:

$$x'_1 \frac{x_2}{a} + y'_1 \frac{y_2}{a} + z'_1 \frac{z_2}{a} = - \left(x_2 \frac{x'_1}{a} + y_2 \frac{y'_1}{a} + z_2 \frac{z'_1}{a} \right), \dots (5)$$

mely a (3)-mal teljesen egyenértékű egyenlet]. V.

13. A MANNESMANN-féle csőhengerlésnél (290. §.) oly tengelyeket kell hajtatni, melyek egymáshoz való hajlása változtatható legyen. A célból



220. ábra.

a CARDANI-HOOKE-féle universális csukló helyett [222. §.] a 220. a, b, c ábrákban elötüntetett szerkezetet alkalmazzák. O_1A_1 a hajtó, O_2A_2 a hajtótengely, melyek folytatásai egymást O -ban metszik. A tengelyek A_1 és A_2 végein kiágazó karok vannak, melyek mindegyike az O_1O , illetve O_2O vonallal egyenlő szöget zár be; mozgás közben a keresztbe fektetett karok egymáson csúsznak s a karok csúszó felületeit bronzból készült félhengeres síma lapjai képezik, melyek az öntött acéllkarokba vannak ágyazva.

Vizsgáltassék meg e mozgás a CARDANI-HOOKE-féle csukló mintájára (223. §.) és bizonyíttassék be, hogy az l_1 és l_2 érintkező pontok mozgás közben ellipsziseket írnak le. V.

14. Vizsgáltassék meg a CARDANI-HOOKE-féle universális csukló [223. §.] azon általánosabb esete, mikor a szilárd helyzetű két tengely között két merev kereszt van [222. §. Jegyzete és 192. ábrája]. A.

15. A sík kinematikai lánczok valamenynyi sajátosságai átvihetők a gömbi mozgásra, ha e lánczok egyes merev, egyenesvonalú tagjai itt merev, legnagyobb körívek; ekkor az ott párhuzamos forgástengelyek itt a gömbi mozgás fixpontján haladnak át.

Szerkesztessenek a 145. és 147. §§-ban tárgyaltaknak megfelelő gömbi lánczok momentán pólusgörbéi. V.

269. §. *Feladatok a pont körüli mozgás gyorsulására és a gömbi ruletták görbületi viszonyaira.*

16. Valamely merev rendszer szilárd pont körül mozog; kerestessenek tetszőleges szilárd koordináta-tengelyekre nézve a rendszer azon pontjai, melyeknek gyorsulása a mindenkor momentán forgás tengelyére merőleges. E feladat a 254. §. 2. pontjával egyezik meg.

[A koordináták kezdete a momentán tengelyben lévén, 242. §. (3) egyenletei szerint

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y; \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z; \quad v_z = \omega_x y - \omega_y x; \quad \dots \quad (1)$$

$$\omega_x v_x + \omega_y v_y + \omega_z v_z = 0 \quad \dots \quad (2)$$

A feladat feltétele:

$$\omega_x \varphi_x + \omega_y \varphi_y + \omega_z \varphi_z = 0 \quad \dots \quad (3)$$

A (2)-öt a (3) tekintetbe vételével differentiálva, nyerjük:

$$\omega'_x v_x + \omega'_y v_y + \omega'_z v_z = 0, \quad \dots \quad (4)$$

azaz az (1) segélyével:

$$(\omega'_y \omega_z - \omega'_z \omega_y) x + (\omega'_z \omega_x - \omega'_x \omega_z) y + (\omega'_x \omega_y - \omega'_y \omega_x) z = 0 \quad \dots \quad (5)$$

Ez pedig a koordináták kezdetén átmenő oly sík egyenlete, melynek normálisa a szögsebesség és a szöggyorsulás tengelyeire merőleges. *Jegyzet:* Szorozva (4)-et dt -vel és (2)-höz adva, nyerjük:

$$(\omega_x + d\omega_x) v_x + (\omega_y + d\omega_y) v_y + (\omega_z + d\omega_z) v_z = 0. \quad \dots \quad (6)$$

Az (5) sík pontjainak sebességei a (2) és (6) szerint merőlegesek a momentán forgás tengelyére és annak szomszédos helyzetére; ez a sík e szerint a gördülő és az alapkúp közös érintő síkja (246. §.), és az érintkezés sugara maga a momentán tengely]. V.

17. Valamely merev rendszer szilárd pont körül forog; kerestessenek tetszőleges szilárd koordináta-tengelyekre nézve a rendszer azon pontjai, melyek gyorsulása a momentán forgás tengelyéhez párhuzamos (v. ö. a 254. §. 5. pontját).

[A koordináták kezdete a momentán-tengelyben lévén, a 248. §. (1) egyenlete szerint:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_x &= -(\omega_y^2 + \omega_z^2) x + (\omega_x \omega_y - \omega'_z) y + (\omega_x \omega_z + \omega'_y) z; \\ \varphi_y &= -(\omega_z^2 + \omega_x^2) y + (\omega_y \omega_z - \omega'_x) z + (\omega_y \omega_x + \omega'_z) x; \\ \varphi_z &= -(\omega_x^2 + \omega_y^2) z + (\omega_z \omega_x - \omega'_y) x + (\omega_z \omega_y + \omega'_x) y. \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (1)$$

Helyettesítve ezeket és az (1) értékeit a megelőző feladat (1) formuláiba:

$$\varphi_x = -x\omega^2 - z\Omega\omega \sin \alpha_1; \quad \varphi_y = -y\omega^2; \quad \varphi_z = +x\Omega\omega \sin \alpha_1. \quad (4)$$

A megelőző feladat (3) egyenletei pedig, az itt fennálló $\omega_x = 0$ és $\omega_y = 0$ értékek tekintetbe vétele mellett

$$\varphi_x \omega_z = 0 \quad \text{és} \quad \varphi_y \omega_z = 0,$$

azaz (4)-ből

$$\varphi_x = -x\omega^2 - z\Omega\omega \sin \alpha_1 = 0 \quad \text{és} \quad \varphi_y = -y\omega^2 = 0 \quad \dots \quad (5)$$

egyenletekre redukálódnak, melyekből, az (1) tekintetbe vétele mellett:

$$y = 0; \quad x = -\frac{z \sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = -\frac{z}{\cotg \alpha_1 + \cotg \alpha_2}. \quad \dots \quad (6)$$

A keresett egyenes vonal e szerint a ZOX síkban (a két kúp OC_1 és OC_2 tengelyei síkjában) és pedig a negatív Z és a pozitív X között lévő quadransban fekszik, melyben egyszersmind a gördülő kúp OC_2 tengelye fekszik. A vonal a közös érintő vonallal kisebb szöget képez, mint az α_1 és α_2 szögek kisebbike]. Vi.

19. Bizonyíttassék be, hogy a merev rendszer gömbi mozgásánál, azok a pontok, melyek gyorsulásának értéke $\varphi = \kappa$ -val egyenlő, oly ellipszoidon fekszenek, melynek középpontja a rendszer szilárd pontja. Kimutatandó továbbá, hogy a κ különböző értékeinek a hasonló és hasonló fekvésű ellipsoidok oly serege felel meg, melyekben a szögsebesség és a szöggyorsulás (az OI_1 és OI_2) tengelyei síkja (az I_1OI_2 sík) avval az OE sugárral conjugált, melynek pontjainak gyorsulása csak az OI_1 tengellyel párhuzamos; végre, hogy az OI_1 , OE , OI_2 tengelyek három conjugált átmérőt képeznek.

[A feladat a 251. §. (2) formulái alapján, az eredő gyorsulás négyzetének

$$\varphi^2 = (\omega'y + \omega^2x)^2 + (c\omega z - \omega'x + \omega^2y)^2 + c^2\omega^2y^2 = \kappa^2$$

kifejezésével könnyen fejthető meg]. Sch.

20. Bizonyíttassék be, hogy a rendszer mindazon pontjai, melyek gyorsulása a momentán tengellyel egy és ugyanazt a δ szöget képezik, oly másodrendű kúpfelületen fekszenek, melynek csúcspontja a szilárd pont. Sch.

21. Bizonyíttassék be, hogy a rendszer azon pontjai, melyek gyorsulása valamely adott irányhoz párhuzamos, a szilárd ponton átmenő két egyenesen fekszenek. E két egyenes egy síkban fekszik avval az egyenessel, melynek pontjai a momentán tengelyhez párhuzamos gyorsulást mutatnak (254. §. 5. pontja). Végre, ha az adott irány és a momentán-tengely között lévő δ szöghöz a megelőző 20. feladat szerint szerkesztjük azt a másodrendű kúpfelületet, melynek pontjainak gyorsulásai a momentán tengellyel ugyanezt a δ szöget képezik, akkor a jelen feladat két egyenese a nevezett síknak és kúpfelületnek metszővonalai. Sch.

22. Bizonyítsák be, hogy a $\varphi_t = 0$ és a $\varphi_n = 0$ feltételeknek megfelelő másod- és harmadrendű kúpfelületek [254. §. (3) és (8) egyenletei] egymást három egyenesben metszik, melyekben fekvő pontok egész gyorsulása az O -ból a pontokhoz vont sugarak mentén fekszik. V.

23. Bizonyítsák be, hogy a megelőző feladatban említett $\varphi_n = 0$ harmadrendű kúpfelület pontjaira nézve gömbi rulettáik görbületi sugara az O -tól a pontokhoz húzott vezérsugár mentén fekszik; továbbá, hogy osculáló (görbületi) köreik azon gömbfelületek legnagyobb körei, melyeken mozognak és hogy így görbületi sugaraik maximumot vesznek fel, azaz, a gömbi ruletták itt inflexiót mutatnak [262. §. II. jegyzete]. V

24. Bizonyítsák be, hogy a gyorsulásnak az OA vonsugarához való ε hajlásszögére nézve (211 vagy 218. ábra) áll:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{\varphi_{n,}} \sqrt{\varphi_t^2 + \varphi_n^2};$$

továbbá, hogy az A pont gömbi rulettájának normális síkja és a φ_n , és $\varphi_{n,}$ gyorsulásokat tartalmazó sík között lévő γ szögére nézve [253. §. (4) és (7)]:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\varphi_t}{\varphi_{n,}} = - \frac{\omega' \sin(r) - c\omega \cos \vartheta \cos(r)}{\omega^2 \sin(r) \cos(r) + c\omega \sin \vartheta}. \quad \text{V.}$$

25. A gömbi ruletták görbületére vonatkozó SAVARY-féle összefüggés [262. §. (4)]:

$$\cotg(\varrho) + \cotg(P) = [\cotg(r) + \cotg(R)] \sin \eta$$

(hol az idézett helyen lévő ϑ helyett itt η -át irtunk) a gömbi epitrochoisok, hypotrochoisok és peritrochoisok esetében tetemesen egyszerűsödik, mert ekkor rendre

$$1) (\varrho) = \alpha_2; \quad (P) = \alpha_1;$$

$$2) (\varrho) = -\alpha_2; \quad (P) = \alpha_1;$$

$$3) (\varrho) = \alpha_2; \quad (P) = -\alpha_1,$$

és így az egyenlet bal oldala mindig állandó, míg (r) és η az A_2 mozgó pont polárkoordinátái a momentán centrumra mint pólusra és az érintkező görbék közös érintő vonalára, mint polártengelyre vonatkozólag és végre $(r) + (R)$ a ruletta gömbi görbületi sugara.

A ruletta inflexióss ponttal bír, ha a $(r) + (R)$ összeg $\frac{1}{2}\pi$ -vel egyenlő; ez itt $\sin \eta = 0$ mellett is lehetséges (V. ö. a 262. §. II. Jegyzetét).

Kerestessenek az 1), 2), 3) alatt említett görbéknek inflexióspontjai. V.

26. A megelőző §. 9. feladata megfelel a sík mozgás 147. §. 1. példájának. Vizsgáltsák meg az AB ív tetszőleges pontjának rulettája és szerkesztessék ennek görbületi középpontja az EULER-SAVARY-féle eljárás segítségével, megfelelőleg a 185. §-ban a sík éllipsisnél követett szerkesztésnek. A.

27. 28. 29. Vitessenek át a 200. §. 18, 18a, 18b, 18c feladatai (az egyenlő és szimmetrikus két parabola, ellipsis, hyperbola egymáson való gördülése) a gömbre és vizsgáltsanak meg a gyúpontoknak megfelelő pontok rulettáinak görbületi viszonyai. A.

30. Egy ellipsises kúp gördül egy vele közös csúcsú körkúpon (vagy megfordítva). A gördülő alak tengelye a gömbfelületet átdöfi; vizsgáltsanak meg e pont rulettájának görbületi viszonyai. A.

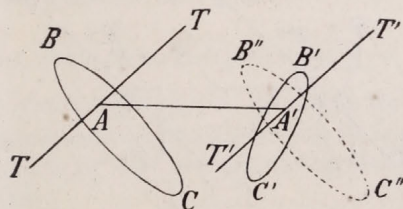
C. MEREV RENDSZEREK ÁLTALÁNOS MOZGÁSA.

1. Az általános mozgás geometriai tárgyalása és visszavezetése csavarmozgásra vagy gördülő és síkló mozgásra.

270. §. *Merev rendszer általános elmozdulásának szétbontása (helyetteszése) translációra és forgásra.*

A merev pontrendszer mozgása semmiféle korlátozásnak legyen alávetve; egyes pontjai csak annak (a merev rendszer fogalmával kifejezett) feltételnek feleljenek meg, hogy egymáshoz viszonyított helyzetük változatlan maradjon.

Legyen (221. ábra) BC a rendszer eredeti helyzete, $B'C'$ a helyzete az elmozdulás után; tetszőleges A pontjának elmozdulása $\vec{AA'}$.



221. ábra.

1. A rendszer ezen általános elmozdulását következőleg létesíthetjük (azaz a rendszert eredeti helyzetéből következő két egyszerű elmozdulás segítségével vihetjük át véghelyzetébe):

a. Tulajdonítsunk a BC rendszer minden pontjának egyenlő nagyságú párhuzamos $\vec{AA'}$ translációt, mi által a rendszer $B''A'C''$ helyzetbe jutott.

b. Ezután forgassuk a rendszert A' körül mindaddig, míg az a $B'A'C'$ véghelyzetbe jutott.

Ezek alapján a merev rendszer általános elmozdulása mindenkor szétbontható (helyettesíthető) egyszerű translációra és egyszerű forgásra (vagy translációs és rotációs [translatórius és rotatórius] componensre).

A tétel természetesen meg is fordítható. (A tételt úgy látszik CHASLES mondotta ki először, Bulletin des Sciences Mathématiques, XIV., 1830.)

2. A tétel még másképen és pedig oly alakban is fogalmazható, melyben azt a mechanikában és a physikai disciplinák legkülönbözőbb ágaiban alkalmazni szokás.

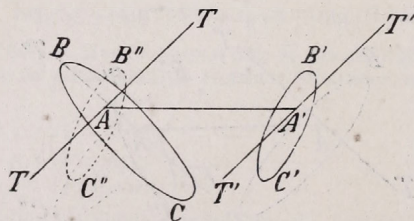
Ugyanis, mind a transláció (elmozdulás), mind a forgás *vector* jellegű lévén (15. és 232. §§), ezeket egymásra merőleges három-három componensre bontani szabad; e szerint:

Merev rendszer általános elmozdulása összetettnek tekinthető egymásra merőleges három párhuzamos eltolódásból (transzlációból) és egymásra merőleges három tengely körüli forgásból (rotációból).

[Rendesen derékszögű coordináta-tengelyekre szokás az eltolódásokat és a forgásokat vonatkoztatni, de más rendszerű tengelyekre is lehet].

271. §. *Az általános elmozdulás rotatórius (forgató) componense minden pontra nézve ugyanaz.*

A megelőző §-ban választott A rendszerbeli pont (221. ábra) tetszőleges lehet; de a mint azt már a rajz is mutatja, az $\vec{AA'}$ transláció nagy-



222. ábra.

sága és iránya az A pont választásától függ; ellenben a forgás tengelyének iránya és szögének nagysága az A -tól független; ezt fogjuk bebizonyítani.

1. Hogy a rendszer általános elmozdulását létesítsük, forgassuk először a merev rendszert az A pont eredeti helyzete körül, mindaddig, míg a rendszer *párhuzamos* fekvésű lesz a véghelyzethez, és így $B''C''$ helyzetet foglalja el (222. ábra). Ezen A pont körüli forgás a 207. §. szerint mindenkor oly *tengely* körüli forgás által helyettesíthető, melynek tengelye az A ponton megyen keresztül; legyen TT' e tengely.

A $B''C''$ helyzetből a véghelyzetbe hozzuk a rendszert, ha avval $\vec{AA'}$ translációt közlünk. A TT' tengely ez által $T'T'$ helyzetbe jutott.

a. E szerint a merev rendszernek azon pontjai, melyek az ere-

deti helyzetben TT egyenesen fekszenek, az elmozdulás után oly $T'T'$ egyenesen fekszenek, mely az előbbi egyeneshez *párhuzamos*.

b. Következik ebből, hogy a *merer* rendszernek azon pontjai, melyek a TT egyenesre *merőleges* síkban fekszenek, az elmozdulás után a $T'T'$ egyenesre *merőleges* síkban vannak, mely *utóbbi sík* e szerint az *előbbihez párhuzamos*.

Ezen eredmény érvényes a TT egyenesre (tengelyre) *merőleges*, valamenynyi síkra nézve.

2. Ha a rendszernek tetszőleges más, D pontját vettük volna kiinduló pont gyanánt, melynek D' a véghelyzete, akkor oly módon, mint az 1. pontban, átvihetjük a rendszert eredeti helyzetéből a $B'C'$ véghelyzetbe. Mivel e véghelyzet az 1-ben *a.* és *b.* alatt említett véghelyzettel egybevág, azért következik:

a. A D körüli forgás T,T , tengelye a DD' elmozdulás alkalmazása után az előbbihez (a T,T -hez) *párhuzamos* T', T' helyzetű.

b. A T,T -re *merőleges* valamely síkban fekvő rendszerpontok a véghelyzetben a T', T' -re *merőleges*, azaz az eredetihez *párhuzamos* síkban fekszenek.

3. A 2. pont *a.* és *b.* alatti eredményei csak úgy egyeztetethetők meg az előbbi 1. pont *a.* és *b.* eredményeivel, ha a TT és T,T , tengelyek egymáshoz *párhuzamosak* és az A valamint a D körüli forgások szögei is egyenlők.

Evvel az e §. elején kimondott állításunk be van bizonyítva.

272. §. Az általános elmozdulás visszavezetése csavarmozgásra.

Legyen S az előbbi §-ban talált azon síkok egyike, melynek pontjai az általános elmozdulás után az eredetihez *párhuzamos* síkban fekszenek (223. ábra).

Toljuk el a rendszert önmagához *párhuzamosan* és az S -re *merőlegesen*, úgy, hogy az S sík abba az S_0 síkba jusson, melyben ez (az S) a rendszer véghelyzetében van, azaz az S' síkba, mely az S_0 síkkal egy és ugyanabba a síkba esik. [De ezen transláció által még nem hoztuk a rendszert véghelyzetébe, mert evvel csak azt értük el (223. ábra), hogy a rendszernek eredetileg az S síkban fekvő A, B, C , . . . pontjai az S_0 , azaz az S' síkba és pedig A_0, B_0, C_0 , . . . helyzetbe jutottak ugyan, de nem esnek egybe a szintén az S' síkban fekvő A', B', C' véghelyzeteikkel].

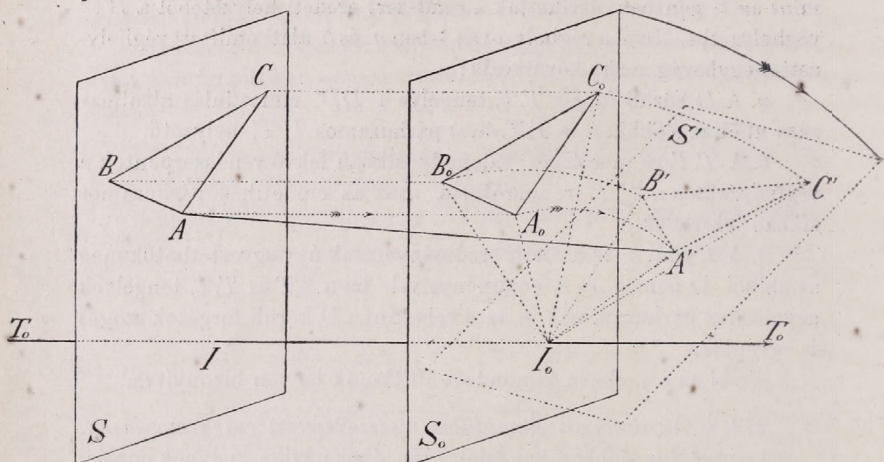
E közbeneső helyzetből a rendszert úgy visszszük át a véghelyzetbe, hogy ezt az S' síkjában (illetve valamenynyi pontját e síkhoz *párhuzamosan*, 134. §.) addig toljuk el, míg a véghelyzetbe ér.

Ámde az ilyen síkbeli (az S' síkhoz *párhuzamos*) elmozdulás mindenkor helyettesíthető oly forgás által, melynek $T_0 T_0$ tengelye az

S_0 -, azaz az S' síkra merőleges, avagy a megelőző §. TT' tengelyéhez párhuzamos (135. §.).

E szerint a merev rendszer tetszőleges elmozdulását helyettesítettük egy *transzláció* és egy oly *forgás* által, melynek *tengelye a transzláció irányához párhuzamos*.

Ily mozgás azonban az egyszerű *csavarmozgás*, az a mozgás ugyanis, melyet a *csavarorsó* és a vele mereven egybekapcsolt test végez, ha azt a *csavartokban* forgatjuk; itt egyidejűleg a *csavartengely mentén transzláció* (haladás) és a *csavartengely körül forgás* történik.



223. ábra.

273. §. *Merev rendszer általános mozgása, tekintve azt momentán csavarmozgások egymásutánja gyanánt. A momentán csavarmozgás meghatározó adatai.*

Az általános elmozdulás a megelőző §§. értelmében *csavarmozgás* által is létesíthető.

1. *Véges elmozdulásnál* a rendszer pontjai leírt pályáívek *véges* mértékben különböznek azon csavarvonalak íveitől, melyeket a rendszer pontjai leírnának, ha a csavarmozgás tényleg bekövetkezne (v. ö. a 16. és a 137. §§-okat).

A kezdet- és a véghelyzet azonban a tényleges mozgásnál és a csavarmozgásnál ugyanazok.

A két mozgás különbsége annál *kisebb* lesz, mennél *kisebb* a tekintetbe vett mozgás maga.

2. Ha csak *elemi* elmozdulást veszünk tekintetbe, akkor az azt

létesítő elemi mozgás és a hozzátartozó elemi csavarmozgás között a különbség csak másodrendű kicsiny tagokban lép fel.

E szerint a merev rendszer elemi mozgását *minden tekintetben* helyettesíthetjük a hozzátartozó *pillanati* (*momentán, instantán*) csavarmozgás által; ennek tengelyét sokszor röviden *momentán-tengelynek*, vagy Mozzr-*féle tengelynek, sőt még *centrális tengelynek* (284. §. 4. pontja) és *síkló tengelynek* (275. §.) is nevezik.

Ez az előbbi elnevezés azért jogosult, mert e tengelyben fekvő pontjai a mozgó rendszernek valamenynyi pontjai közül a legkisebb sebességgel bírnak (v. ö. a köv. §. 5. pontját).

3. A pillanati csavarmozgás jellemző adatai: a tengely *iránya* (két iránycosinus, azaz két adat) a tengely *fekvése* a térben (a tengelyre merőleges síknak e tengelylyel való metszőpontjának koordinátái e síkban, azaz két adat) a momentán forgás szöge vagy szögsebessége (*egy adat*) és a tengelymenti transláció nagysága (*egy adat*); összesen e szerint a *momentán csavarmozgást hat meghatározó elem adja meg*.

4. A merev rendszer tetszőleges, véges mozgását elemi mozgásokra bonthatjuk szét, melyek mindegyike pillanati csavarmozgás által helyettesíthető.

Kimondhatjuk ennek alapján a tételt: *Merev rendszernek legáltalánosabb mozgása mindig létesíthető vagy helyettesíthető momentán csavarmozgások egymásutánja által*; a pillanati csavarmozgás tengelyének iránya és fekvése, szögsebessége és translációja általában folytonosan változik.

274. §. *A csavarmozgás sebességi diagrammja a momentán tengelyre merőleges sík. Következtetések.*

A megelőző §§-ok értelmében a legáltalánosabb mozgásban lévő merev rendszer minden pontjának sebessége két componensből állónak tekinthető: az első a csavarmozgás momentán tengelyéhez párhuzamos *transzlatórius (haladó) sebesség*, a második az arra merőleges irányú *rotatórius (forgási) sebesség*.

Ezen összetevők elegendők a rendszer sebességi diagrammjának szerkesztésére.

1. Legyen (224. ábra) Ω a közös pont, melyből a rendszer egyes pontjainak sebességeit irány és nagyság szerint felrajzoljuk; legyen $\vec{\Omega H}$ a közös translatórius sebesség, továbbá legyenek rendre \vec{HA} , \vec{HB} , \vec{HT} , ... az A , B , C ... pontok forgási sebességei, melyek az ΩH -re merőleges síkban fekszenek.

* Guilio Mozzr: Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi. Napoli, 1763.

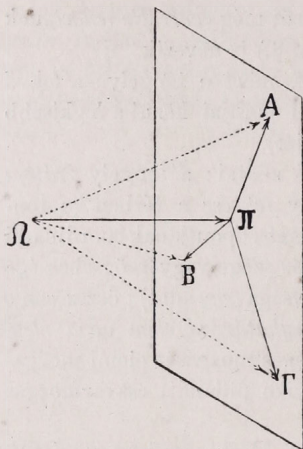
E szerint ezen A, B, C, \dots pontok eredő sebességei rendre $\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B}, \vec{\Omega C}, \dots$, átfogók melyek A, B, C, \dots végpontjai a momentán tengelyre merőleges síkban fekszenek.

Röviden: a momentán csavarmozgás sebességi diagrammja a tengelyre merőleges sík, melynek a közös Ω ponttól való távolsága a tengelyhez párhuzamos transzlációs sebesség.

2. Ha valamely rendszerbeli pont sebessége a forgás tengelyére merőleges, ez csak úgy lehetséges, ha az $\Omega\Pi$ összetevő zérus, azaz akkor transzláció nem lévén, a mozgás tengely körüli egyszerű forgássá redukálódik: e szerint a szilárd tengely vagy szilárd pont körüli (azaz sík vagy gömbi) mozgással van dolgunk.

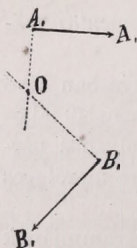
3. Ha a forgássebesség zérus, a rendszer csak transzlációs (haladó) mozgást végez.

4. Könynyű bebizonyítani, hogy a rendszer három pontjának sebességei elegendők a momentán tengely meghatározására.



224. ábra.

Ugyanis, a közös Ω pontból rajzolva az $\Omega A, \Omega B, \Omega \Gamma$ adott sebességeket: az A, B, Γ pontokon átmenő sík $\Omega\Pi$ normálisa a momentán-tengelyhez párhuzamos; ezt az irányt ismerve, képezhetjük az ΩA sebességnek $\Omega\Pi$ -re merőleges ΠA komponensét, mely-



225. ábra.

nek $q\omega$ -val egyenlőnek kell lenni, hol ω a momentán szögsebesség, q az A pont távolsága a momentán tengelytől. Rajzoljuk most (225. ábra) az A és B pontok A' és B' vetületét a momentán tengelyre merőleges síkra, mely itt ez ábra síkja legyen, és legyen $A'A' = \Pi A, B'B' = \Pi B$; akkor az A' és B' sebességek irányára emelt normálisak O metszőpontja a momentán tengely egy pontja és így ezen tengelynek helyzete is meg van határozva.

5. A momentán-tengely pontjai csak transzlációs sebességgel bírnak, míg a rendszer többi pontjai ezenkívül még forgási sebességgel, joggal mondhatjuk, hogy a momentán tengely a *sebesség minimumát* mutató rendszerbeli pontok helye.

275. §. *A csavarmozgás visszavezetése egyenesvonalú felületek (tengelyfelületek, axoidok) gördülő és sikló mozgására.*

A momentán csavarmozgásnál a pillanati forgás (csavar-) tengelye a rendszerben fekvő bizonyos egyenes, melyet a merev rendszer egy meghatározott egyenes pontsorozata alkot.

A következő időpontban a momentán tengely nem csak más fek-

vésű, hanem azt a rendszernek más pontsorozata alkotja, és ez a kétös helyzetváltozás folytonosan történik.

Az egymásra következő momentán csavarmozgások tengelyei egy a térben folytonos oly görbe felületen fekszenek, mely csupa egyenes vonalak (a momentán tengelyek) által van alkotva. Ezt az egyenesvonalú felületet ezért *szilárd tengelyfelületnek*, *szilárd axoidnak* vagy **(MN)** felületnek fogjuk nevezni; az **(MN)** axoid a momentán csavartengelyek helye *szilárd* koordináta-rendszerben.

Másrészt a mozgó merev rendszer azon egyenes pontsorozatai, melyek egymásután a momentán csavar tengelyeit alkotják, szintén egy egyenesvonalú, **(MN)**-el jelölendő felületet, *mozgó tengelyfelületet* vagy *mozgó axoidot* alkotnak, mely a momentán tengelyeknek a mozgó merev pontrendszerben való geometriai helye.

Az **(MN)** és az **(MN)** axoidok a rendszer mozgása közben mindig egy egyenesben érintkeznek, melyben a két axoid mindenkori megfelelő két alkotó egyenese egybe esik és mely a mindenkori momentán csavar tengelye; magát a rendszer mozgását pedig következőleg végbemenőnek foghatjuk fel:

Az **(MN)** felület az **(MN)** alapfelületen gördül, azaz a momentán érintkezés egyenese körül végtelen kis forgást szenved; e közben azonban az **(MN)** felület az érintő egyenes mentén még translációt, azaz síkló mozgást szenved, melynél a mozgó axoid érintő egyenese síklik a szilárd axoid érintő egyenesére mentén; evvel az elemi csavarmozgás elő van tüntetve.

Minden időpillanatban az **(MN)** felület meghatározott egyenese coincidál (egybeesik) az **(MN)** megfelelő egyenesével és így minden időelemben a részletezett elemi mozgás áll elő.

Ezek szerint a rendszer legáltalánosabb mozgása olyannak tekinthető, melynél valamely **(MN)** egyenesvonalú felület (a mozgó axoid) folytonosan gördül és egyszersmind a közös érintkező vonal mentén folytonosan síklik egy másik, szintén egyenesvonalú **(MN)** alapfelületen (a szilárd axoidon).

276. §. *A momentán csavarmozgás elemi elmozdulási és sebességi összetevői. A simuló csavargörbe.*

1. Válaszszuk a momentán csavar tengelyét Z tengely gyanánt és jeleljék q , ϑ a tetszőleges A rendszerpont polárkoordinátáit az XY síkban.

A q sugarú hengeren lévő közönséges, m menetmagasságú csavarvonal egyenlete írható:

$$x = q \cos \vartheta, \quad y = q \sin \vartheta, \quad z = \frac{m}{2\pi} \vartheta \quad \dots \quad (1)$$

Az elemi elmozdulás és összetevői az (1)-ből:

$$dx = -q \sin \vartheta d\vartheta, \quad dy = q \cos \vartheta d\vartheta, \quad dz = \frac{m}{2\pi} d\vartheta$$

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2.$$

Jelelve ω -val a szögsebességet és u -val vagy c_0 -lal a tengelymenti translációt, az A pont v sebessége és összetevői:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= -\omega y, & v_y &= +\omega x, & v_z &= u = \frac{m}{2\pi} \omega = c_0 \\ v^2 &= q^2 \omega^2 + u^2 = q^2 \omega^2 + c_0^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots (2)$$

A ds ívelem hajlása a momentán tengelyhez i lévén, erre nézve

$$\operatorname{tg} i = \frac{q\omega}{u} = \frac{q\omega}{c_0},$$

mely hajlás a tengelytől egyenlő q távolú pontokra nézve ugyanaz.

Az XYZ koordináta-rendszer helyzete mozgás közben folytonosan változik.

Az $\frac{u}{\omega} = \frac{c_0}{\omega}$ viszonyt sokszor a *momentán mozgás csavarodási viszonyának* vagy *paraméterének* is nevezik.

Az általános elemi elmozdulásnál a rendszer minden pontja oly közönséges csavaronal elemét írja le, mely vonalnak (henger-) tengelye a momentán csavarmozgás tengelye, hengerének sugara pedig a pontnak e tengelytől való távolsága.

A pont tényleges pályájának csak egy íveleme közös ezen hengeres csavaronal megfelelő elemével, a két elem érintője közös, és ezért itt általánosságban az *érintkezés elsőrendű* [Math. repertórium, Kiegészítések, 75aa. §-ának 2. pontja; 1. lap].

2. Könynyű bebizonyítani, hogy minden egyes pont pályaelemét egyszerű, tengely körüli forgás által létesítettnek is tekinthetjük.

Fektessük ugyanis az ívelemen keresztül a hozzátartozó osculáló (görbületi) síkját és húzzuk meg az ezen síkban fekvő (első, fő-) görbületi sugarat. Minden egyenes, mely a görbületi síkra merőleges (a binormálisához párhuzamos) és a görbületi sugarat vagy folytatását metszi, oly forgás tengelyének tekinthető, mely körül az A pontot elemi szöggel forgatva, ez a tényleges pálya ívéhez simuló körívet ír le, de a két ívelem érintkezése itt is általánosságban csak elsőrendű [i. h. u. o.]

3. De meg kell még jegyeznünk, hogy a midőn csak *egy* pont pályáját tekintjük, ezen pályaelemet számtalan oly csavargörbe eleme által helyettesítetjük, melyek tengelyei önmaguk között (és a rendszer momentán csavartengelyéhez) párhuzamosak.

Ugyanis, a tengelyen és a tekintetbe vett ívelem egy pontján át síkot fektetve, e síkban fekvő, a momentán tengelyhez párhuzamos minden egyenes vonal egy csavarmozgás tengelyének tekinthető, mely mozgás translációja ugyanaz az u , mint fent, míg ω , szögsebességének az új tengelytől való q , távolsággal való szorzata, $q\omega$, ugyanaz, mint a fentirt $q\omega$ forgássebesség; e szerint csak a

$$q, \omega, = q\omega$$

egyenletet és azt a feltételt kell kielégíteni, hogy az új tengely az előbbihez párhuzamos legyen és a q -t vagy folytatását messe.

De ezen számtalan csavarvonal közül van egy, mely a pont pályájához leginkább hozzásimúl.

Ugyanis, legyen (Math. repertórium 68. §. (1) és (2) formulája) $\frac{d\eta}{dt}$ és $\frac{d\varepsilon}{dt}$ a pont pályája érintőjének és binormálisának szögsebessége; ezen két szögsebességet a 238. §. értelmében egy szögsebességgé tehetni össze, melynek tengelye a keresett eredő csavarmozgás tengelyével párhuzamos; magát a tengely fekvését a 281. és 283. §§. szerint nyerjük.

E szerint minden tényleges pályaelemhez szerkeszthetjük a hozzá tartozó *simuló csavargörbét* [Math. repertórium. *Kiegészítések* 75 aa §. 3. pontja], mely azon tulajdonsággal bír, hogy a pályagörbe görbülete és csavarodása e csavarvonal görbületével és csavarodásával esik egybe (v. ö. e műben a pontmozgás 71. §. 2. és 3. pontját).

De ez a simuló csavarvonal egy és ugyanazon időpillanatban a rendszer minden egyes pontjára nézve különböző.

277. §. CHASLES tétele. Merev vonal általános elmozdulásának vizsszavezetése tengely körüli forgásra.

Valamely merev rendszer tetszőleges egyenes vonalának legyen AB az eredeti, $A'B'$ az elmozdulás után való helyzete (226. ábra).

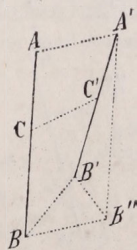
Az A pont elmozdulása $\overline{AA'}$; legyen $A'B''$ a vonalnak az eredetihez párhuzamos helyzete és így BB'' az $\overline{AA'}$ -val egyenértékű.

Fektesünk a B , B' , B'' pontokon keresztül síkot: akkor az $\overline{AA'}$ elmozdulás ezen síkhoz párhuzamos, míg a $\overline{BB'}$ elmozdulás magában ezen síkban fekszik.

E szerint a vonal A és B pontjai és így (mivel az A a vonal tetszőleges pontja) valamenynyi pontjai is, a $BB'B''$ síkhoz párhuzamos elmozdulást szenvedtek; ez az elmozdulás pedig mindenkor a mozgás síkjára merőleges tengely körüli forgással helyettesíthető (135. §.), mely tengely a $BB'B''$ síkra merőleges és így az $\overline{AA'}$ elmozdulásra is merőleges.

A tengely az AB -hez nem párhuzamos, hanem a sík mozgás azon tulajdonságával bír, hogy a tengelyt tartalmazó és a tetszőleges C pont CC' elmozdulását felező sík egyszersmind merőleges ezen CC' -re. Miután ez az AB vonal minden pontjának véges vagy elemi elmozdulására érvényes, ezen tulajdonságot a CHASLES-től származó következő tételben fejezhetjük ki:

Merev vonal általános elmozdulásánál e vonal valamenynyi pontja pályaelemeinek normális síkjai egy és ugyanazon egyenesben



226. ábra.

metszik egymást, mely egyenes a vonal elemi elmozdulását helyettesítő momentán forgás tengelye (v. ö. a 305. §. 5. és 6. pontját).

2. Általános elmozdulások és mozgások összetevése és szétbontása.

278. §. *Két általános véges elmozdulás (csavarmozgás) összetevése, visszavezetve egymást nem metsző tengelyek körüli forgások összetevésére.*

1. Minden egyes általános elmozdulás (csavarmozgás) egy translációból és egy forgásból összetettnek tekinthető (270. §.). Két általános elmozdulás (csavarmozgás) e szerint két transláció és két különböző irányú és fekvésű, egymást általánosságban nem metsző tengelyek körüli forgás által helyettesíthető.

2. A két transláció a vectorok szabályai szerint egy eredő translációt ad; a két nem egy síkú tengelyek körüli forgások összetevését a következő §-ban tárgyaljuk.

279. §. *Egymást nem metsző két tengely körüli véges forgások összetevése egy translációvá és egy forgássá. Geometria tárgyalás. Végeredmény.*

1. Alkalmazzuk mindenképp előtte a rendszerek sík mozgásának azon tételét (160. §. és 122. ábra), mely szerint minden véges forgás szétbontható egy a forgás-síkjához párhuzamos translációra és az eredetihez párhuzamos tengelyű, vele egyenlő szögű forgásra.

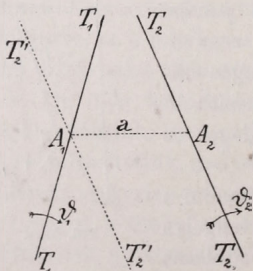
Legyenek T_1T_1 és T_2T_2 az adott két forgás tengelyei, ϑ_1 és ϑ_2 azok forgásszögei (227. ábra).

Húzzuk a T_2T_2 egyenesét a T_2T_2 -hez párhuzamosan, de úgy, hogy a T_1T_1 tengelyt valamely A_1 pontjában messe; legyen még

$A_1A_2 = a$ a T_2T_2 -nek az A_1 -től való merőleges távolsága. Az idézett tétel értelmében a T_2T_2 körüli ϑ_2 szögű forgás szétbontható egy oly translációra, mely e forgás síkjához párhuzamos, e síkban az A_2A_1 -től számított ϑ_2 szög felező vonalára merőleges irányú és $2a \sin \frac{1}{2}\vartheta_2$ értékű- és egy a T_2T_2 körüli ϑ_2 szögű forgásra.

2. Ez a T_2T_2 körüli ϑ_2 szögű forgás a 225. §. értelmében a tengelyét A_1 -ban metsző T_1T_1 körüli ϑ_1 szögű forgással egy forgássá tehető össze.

3. Az 1. és 2. eredménye: *Nem egy síkban fekvő két tengely körüli forgások helyettesíthetők egy transláció és egy egyszerű forgás által.* A tétel természetesen meg is fordítható. (V. ö. a 284. §-ot).



227. ábra.

4. Szemmel tartva e 3. pontot és a megelőző §. 1. és 2. pontjait [mivel a 3. pont translációjának a megelőző §. két translációjához való csatolása által csak más transláció keletkezik], nyerjük a tételt: két általános elmozdulás összetehető egy translációvá és egy forgássá; azaz végeredményben ismét egy általános elmozdulássá.

280. §. Általános véges elmozdulások (csavarmozgások) helyettesítésének (összsetevésének) tárgyalása sík és gömbi mozgások segítségével.

Az 270 és 271. §§. valamint a megelőző két §. kifejtései szerint minden általános véges elmozdulás transláció és forgás által lévén helyettesíthető, önként következik, hogy általános elmozdulások összevetése és szétbontása translációk és forgások összevetésére és szétbontására van visszavezetve.

Közelebbről pedig, két csavarmozgás, melyek tengelyei $T_1 T_1$ és $T_2 T_2$, tengelymenti translációi u_1 és u_2 , forgásszögei ϑ_1 és ϑ_2 , a megelőzők értelmében mindig összetehetők egy csavarmozgássá, melynek jellemző adatait is azonnal nyerhetjük, ha a 17 és 232. §§-ok kifejtéseit jelen esetünkre alkalmazzuk.

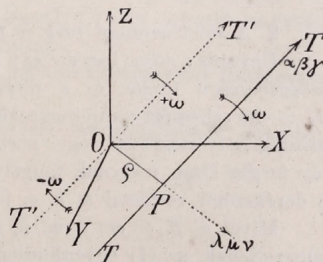
Az olvasó az egyszerű analitikai kifejtéseket és számításokat könnyen fogja végezhetni, ha ezekre szüksége van; de mivel ily véges elmozdulások összevetése és szétbontása mind a kinematikában, mind a dynamikában igen ritkán fordul elő, az erre vonatkozó számítást itt mellőzzük.

Ellenben szükségesnek látjuk az általános, de *elemi* elmozdulásokra nézve néhány oly tételt explicite kifejtetni, melyet a mechanikában gyakran alkalmaznak.

281. §. Merev rendszer elemi forgásának (szögsebességének) analitikai szétbontása párhuzamos tengelyű egyenlő forgásra s a forgás síkjában fekvő translációra és viszont.

E §. czímében kifejezett, a sík mozgás 160. §-ában bebizonyított tételt most elemi forgásokra nézve analitikailag akarjuk kifejezni.

1. Legyen XYZ egy álló koordináta-rendszer, TT a tetszőleges fekvésű és helyzetű (momentán) tengelye a forgásnak, ω a szögsebessége, ρ e tengely távolsága az O kezdettől és P ezen ρ talppontja és a P koordinátái a, b, c , (228. ábra).



228. ábra.

Jelöljék a TT tengely-, a ρ merőleges-, és az ezen két egyenesre merőleges pozitív normális vonal * iránycosinusait rendre

$$\alpha, \beta, \gamma; \quad \lambda, \mu, \nu; \quad l, m, n;$$

ezek megfelelnek az ismert összefüggéseknek [Math. repertórium 46. §. (2) és 47. §. (2)]:

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1 \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 &= 1 \\ l^2 + m^2 + n^2 &= 1 \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} \lambda l + \mu m + \nu n &= 0 \\ \alpha l + m\beta + n\gamma &= 0 \\ \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu &= 0 \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} l &= \beta\nu - \gamma\mu \\ m &= \gamma\lambda - \alpha\nu \\ n &= \alpha\mu - \beta\lambda \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

A TT tengelyű forgást az O kezdeten átmenő $T'T''$ párhuzamos tengelyre akarjuk vonatkoztatni (áthelyezni) és ezen célból tulajdonítsunk a rendszernek $T'T''$ körül egyszerre $+\omega$ és $-\omega$ szögsebességeket, melyek a rendszer mozgásbeli állapotát nem változtatják.

A TT tengelyű $+\omega$ szögsebességű és $T'T''$ tengelyű $-\omega$ szögsebességű két forgás egy translációt létesít, mely $\rho\omega dt$ értékű és mely a forgás síkjában, az OP -re merőlegesen fekszik (158. §. és 164. §. 2. pontja); az ábra szerint iránycosinusai $-l, -m, -n$, mert a transláció a P -ből a papír síkja fölött lévő szem felé húzott normális irányával esik egybe.

Ezenkívül fenmarad az $T'T''$ tengelyű, $+\omega$ szögsebességű forgás.

Ezek értelmében az α, β, γ iránycosinusokkal bíró TT tengely körüli ω szögsebességű forgás helyettesíthető:

a. A TT -hez párhuzamos $T'T''$ tengelyű, $+\omega$ szögsebességű forgás által, melynek derékszögű szögsebességi összetevői rendre:

$$\omega_x = \alpha\omega; \quad \omega_y = \beta\omega; \quad \omega_z = \gamma\omega \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

b. Az $udt = \rho\omega dt$ értékű közös transláció által, mely a TT és a ρ irányára merőleges; ennek derékszögű sebességi összetevői:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= -l\rho\omega = -\rho\omega(\beta\nu - \gamma\mu) = -(\omega_y c - \omega_z b) \\ u_y &= -m\rho\omega = -\rho\omega(\gamma\lambda - \alpha\nu) = -(\omega_z a - \omega_x c) \\ u_z &= -n\rho\omega = -\rho\omega(\alpha\mu - \beta\lambda) = -(\omega_x b - \omega_y a) \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

2. A tétel azonnal meg is fordítható.

Ugyanis: adva legyen egy α, β, γ iránycosinusú tengely körüli ω szögsebességű forgás és a forgás síkjában lévő, $u_x = -lu, u_y = -mu, u_z = -nu$ sebességi componensekkel bíró transláció; akkor ez a két mozgás mindig helyettesíthető egy párhuzamos tengely körüli ω szögsebességű oly forgás által, melynek tengelye az előbbtől ρ távolságban van, hol a ρ derékszögű vetületei a, b, c , iránycosinusai pedig λ, μ, ν .

Mivel $\alpha, \beta, \gamma, \omega; l, m, n, u$ adott mennyiségek, míg λ, μ, ν, ρ az ismeretlenek, az (1) egyenletcsoport értelmében:

* A pozitív normális a rajz síkja fölött levő szemtől a P -felé vont egyenes irányával esik egybe.

$$u_{kx} = -(\omega_{ky}c_k - \omega_{kz}b_k), \quad u_{ky} = -(\omega_{kz}a_k - \omega_{kx}c_k), \quad u_{kz} = -(\omega_{kx}b_k - \omega_{ky}a_k);$$

3. Ámde az 1. alatt említett forgások, melyek tengelyei a közös O metszöponttal bírnak, a 239. §. értelmében *egy* forgássá tehetők össze, melynek tengelye az O ponton megyen keresztül. Jeleljék Ω ezen eredő forgás szögsebességét, Ω_x , Ω_y , Ω_z összetevőit és A , B , Γ , tengelyének iránycosinusait.

4. Továbbá, a a merev rendszernek 2. alatt említett translációi, a közönséges módon összetehetők *egy eredő translációvá*, melynek sebessége U , összetevői U_x , U_y , U_z , iránycosinusai L , M , N .

5. Alkalmazva a forgásokra és a translációkra a vectorok összetevési módját, nyerjük:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_x &= \Sigma \alpha_k \omega_k, & \Omega_y &= \Sigma \beta_k \omega_k, & \Omega_z &= \Sigma \gamma_k \omega_k; \\ \Omega_x^2 &= \Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2 \\ U_x &= -\Sigma (\omega_{ky}c_k - \omega_{kz}b_k), & U_y &= -\Sigma (\omega_{kz}a_k - \omega_{kx}c_k), & U_z &= -\Sigma (\omega_{kx}b_k - \omega_{ky}a_k); \\ U^2 &= U_x^2 + U_y^2 + U_z^2. \end{aligned} \right\} (1)$$

Az eredményt e szerint szóval következőleg fejezhetjük ki: Ha adva van *tetszőleges számú és fekvésű tengelyek körüli elemi forgás, akkor ezen forgások mindenkor összetehetők egy forgássá és egy translációvá; de általánosságban véce az eredő transláció nem fekszik az eredő forgás síkjában.**

Hogy az összetevés eredményét *analytikailag* lehessen kifejezni, szükséges, hogy az egyes forgásoknak ω_k , α_k , β_k , γ_k , . . . jellemzőin kívül, még annak a (különben tetszőlegesen választható) O pontnak a fekvése, melyen keresztül az eredő forgás tengelyét kívánjuk fektetni, adva legyen, közelebről pedig, hogy a tőle az egyes forgási tengelyekre bocsátott . . . P_k . . . merőlegesek talppontjainak a_k , b_k , c_k össszrendezői ismereteseek legyenek.

Ezen így ismertnek feltételezett . . . ω_k ; α_k , β_k , γ_k ; a_k , b_k , c_k . . . meghatározó részek segítségével, az (1) formulák kifejezik az eredő forgás és az eredő transláció jellemzőit.

Jegyzet: Még az az általánosítás léphet fel, hogy a merev rendszer a nevezett forgásokon kívül még bizonyos, tetszőleges számú, nagyságú és irányú translációknak van alávetve. Ez az eset önként talál megoldást: az adott translációk a 278. §. 2. pontja értelmében *egy* translációvá egyesítendők, mely az (1) alatti U translációhoz geometriai módon kapcsolandó.

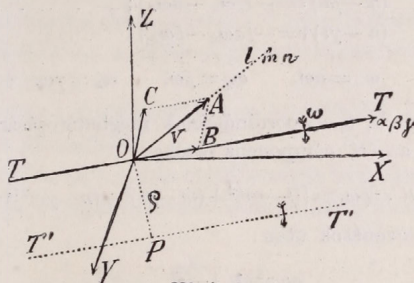
* Ennek oka az, hogy általánosságban, az (1) rendszerből

$$U_x \Omega_x + U_y \Omega_y + U_z \Omega_z \leq 0;$$

ha ez az összeg $= 0$ volna, a transláció az eredő forgás síkjában feküdne.

283. §. A rendszer valamely pontjának translációja és a ponton átmenő tengely körüli elemi forgása adva lévén, határoztassanak meg a csavarmozgás jellemző adatai.

Legyen (230. ábra) O a mozgó pontrendszer valamely pontja, melyet itt egyszerűség kedvéért a koordináták kezdetének választjuk; $v=OA$ legyen translációjának sebessége, l, m, n a v iránycosinusai; TT legyen az O ponton átmenő tengely, ω forgásának szögsebessége, α, β, γ a TT iránycosinusai.



230. ábra.

1. Bontsuk szét az \overline{OA} translációt a TT -hez párhuzamos \overline{OB} és a TT -re merőleges, az AOB síkban fekvő \overline{OC} componensre és jelelje ϵ az OA és az OT irányok között lévő szög cosinusát, úgy, hogy

$$\overline{OB} = v\epsilon = v(\alpha + \beta m + \gamma n) \quad (1)$$

Ezen \overline{OB} -nek derékszögű összetevői rendre:

$$\alpha\epsilon v, \quad \beta\epsilon v, \quad \gamma\epsilon v \quad (2)$$

Ellenben az \overline{OA} derékszögű componensei írhatók:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= lv = \alpha\epsilon v + (l - \alpha\epsilon) v \\ v_y &= mv = \beta\epsilon v + (m - \beta\epsilon) v \\ v_z &= nv = \gamma\epsilon v + (n - \gamma\epsilon) v \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

A (3) szerint a v_x, v_y, v_z mennyiségek két-két componens összegeinek tekintendők, az első componensek az \overline{OB} -éi, a második összetevők az ábra értelmében csak az \overline{OC} -éi lehetnek, melyek e szerint a következők:

$$\overline{OC} \text{ componensei: } (l - \alpha\epsilon) v, \quad (m - \beta\epsilon) v, \quad (n - \gamma\epsilon) v \quad (4)$$

E szerint a (2) a transláció sebességének a TT tengely mentén, a (4) a transláció sebességének a TT -re merőleges síkban fekvő része derékszögű összetevői.

2. A 281. §. tétele értelmében ezt az utóbbi, \overline{OC} translációt a TT körüli ω szögsebességű forgással egyesíthetni egy másik, az előbbihez párhuzamos $T'T'$ tengelyű, szintén ω szögsebességű forgással.

Az új tengely a TT -től $OP=\rho$ távolságban van; jeleljék a P koordinátáit a, b, c , [az idézett §. s a 228. ábrában $\overline{PO}=-\rho$ az új tengely távolsága a régítől; ennek P -től számított vetületei rendre $-a, -b, -c$]. Ezért, és mivel a (4) kifejezések a forgás síkjában fekvő transláció sebességi összevetőit adják meg, az idézett §. (3) formuláiból:

$$\left. \begin{aligned} (l-\alpha\varepsilon)v &= -(b\omega_x - c\omega_y) \\ (m-\beta\varepsilon)v &= -(c\omega_x - a\omega_z) \\ (n-\gamma\varepsilon)v &= -(a\omega_y - b\omega_x) \end{aligned} \right\}, \quad \dots \quad (5)$$

hol:

$$\omega_x = \alpha\omega, \quad \omega_y = \beta\omega, \quad \omega_z = \gamma\omega.$$

3. A P pont a, b, c koordinátáinak meghatározására nézve jegyezzük meg, hogy az OC componens értéke:

$$\overline{OC} = \rho\omega = v[(l-\alpha\varepsilon)^2 + (m-\beta\varepsilon)^2 + (n-\gamma\varepsilon)^2]^{\frac{1}{2}},$$

vagy némi összevonások után:

$$\rho\omega = v\sqrt{1-\varepsilon^2} \quad \dots \quad (6)$$

E szerint a $\rho\omega = \overline{OC}$ iránycosinusai rendre az (5) és (6)-ból:

$$\frac{l-\alpha\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}; \quad \frac{m-\beta\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}; \quad \frac{n-\gamma\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \quad \dots \quad (7)$$

A TT iránycosinusai α, β, γ lévén, nyerjük ezek és a (7) segélyével az \overline{OC} -re és a TT -re merőleges $\overline{OP}=\rho$ irány iránycosinusait [Math. repertorium 46. §. (1)].

$$-\frac{(m-\beta\varepsilon)\gamma - (n-\gamma\varepsilon)\beta}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}; \text{ s i. t. ;}$$

szorozva ezeket az iránycosinusokat a ρ -nak (6) kifejezésével, nyerjük a P pont koordinátáit, melyek rendre:

$$a = -\frac{v}{\omega}(m\gamma - n\beta); \quad b = -\frac{v}{\omega}(n\alpha - l\gamma); \quad c = -\frac{v}{\omega}(l\beta - m\alpha) \quad \dots \quad (8)$$

A 272. §. értelmében ezen az a, b, c koordinátájú P ponton keresztül megyen az α, β, γ iránycosinusú tengelye a momentán csavarmozgásnak, mivel a translációnak fenmaradó \overline{OB} componense ezen irány mentén fekszik.

E szerint a csavarmozgás közös translációja az \overline{OB} , melynek értékét az (1) formula adja meg, $T''T'$ tengelyének iránycosinusai α, β, γ , és e tengely átmegy a (8) formulákban megadott a, b, c koordinátájú P ponton, szögsebessége pedig a TT körülivel, az ω -val egyenlő.

Evvel a csavarmozgás jellemzői a merev rendszer O pontjának v sebessége (illetve elmozdulása) és a körüle történő forgás adatai alapján teljesen meg van határozva.

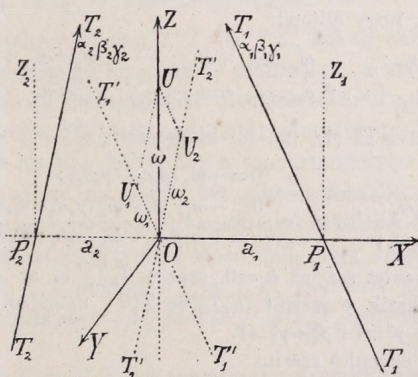
284. §. *Merev rendszer általános elemi mozgásának (a csavarmozgásnak) visszazavartatása (helyettesítése) conjugált két egyenes körüli forgásra.*

A 279. §. tétele szerint bármily két tengely körüli forgás helyettesíthető egy tengely körüli forgás és egy transláció által; e tétel meg is fordítható és alkalmazva ezt a csavarmozgásra, kimondhatjuk, hogy minden csavarmozgás szétbontható két tengely körüli (két) forgásra.

A következőkben a szétbontás ezen nevezetes módjának szabályait állapítjuk meg.

A szétbontás számtalanféleképen történhetik; az egyik tengelyt tetszés szerint választhatni.

Legyen OZ a momentán csavarmozgás tengelye, ω szögsebessége és $c_0 = u$ közös translációjának sebessége. (231. ábra).



231. ábra.

1. Jeleljék T_1T_1 az egyik, tetszőlegesen választott tengelyt, ω_1 a körüle történő forgás szögsebességét.

Fektessük az OX tengelyt a Z tengely és a T_1T_1 vonal közötti legrövidebb távolságba és legyen $x_1 \doteq a_1 = OP_1$ e távolság, ez által az YZ sík a T_1T_1 -hez párhuzamos fekvésű; legyenek végre a T_1T_1 iránynak az X, Y, Z tengelyre vonatkozó iránycosinusai rendre $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, hol a jelen esetben: $\alpha_1 = 0, \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$; továbbá, az O -ból T_1T_1 -re bocsátott OP_1 merőlegesnek koordinátái itt $a_1 = a_1, b_1 = 0, c_1 = 0$.

E T_1T_1 körüli ω_1 szögsebességű forgás a 281. §. szerint egyenértékű az O ponton átmenő, T_1T_1 -hez párhuzamos $T'_1T'_1$ tengely körüli szintén ω_1 szögsebességű forgással és egy közös u_1 translációval; ezek összetevői [i. h. (2), (3)]:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{1x} &= \alpha_1 \omega_1 = 0; & \omega_{1y} &= \beta_1 \omega_1, & \omega_{1z} &= \gamma_1 \omega_1; \\ u_{1x} &= 0; & u_{1y} &= -\omega_{1z} a_1; & u_{1z} &= +\omega_{1y} a_1. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

2. A másik, $T_2 T_2$ tengely körüli forgásnak ω_2 szögsebessége, $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ iránycosinusi és az O -tól való OP_2 merőleges távol P_2 végpontjának a_2, b_2, c_2 koordinátái még ismeretlenek (231. ábra); de ezen $T_2 T_2$ körüli mozgást szintén szétbonthatni az O -n átmenő, $T_2 T_2$ párhuzamos $T_2 T_2'$ tengely körüli ω_2 szögsebességű forgásra és egy közös u_2 translációra; ezek componensei [281. §. (2), (3)]:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{2x} &= \alpha_2 \omega_2; & \omega_{2y} &= \beta_2 \omega_2; & \omega_{2z} &= \gamma_2 \omega_2; \\ u_{2x} &= -(\omega_{2y} c_2 - \omega_{2z} b_2); & u_{2y} &= -(\omega_{2z} a_2 - \omega_{2x} c_2); & u_{2z} &= -(\omega_{2x} b_2 - \omega_{2y} a_2). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

3. Az adott csavarmozgás ω szögsebességének és translációja (u vagy c_0) sebességének derékszögű összetevői itt:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= 0, & \omega_y &= 0, & \omega_z &= \omega; \\ u_x &= 0, & u_y &= 0, & u_z &= u. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Ha a két $T_1 T_1$ és $T_2 T_2$ tengely körüli forgás [azaz a velük egyenértékű (1) és (2) két forgás és két transláció] e csavarmozgással egyenértékű, akkor kell, hogy álljon:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega_{1x} + \omega_{2x}; & \omega_y &= \omega_{1y} + \omega_{2y}; & \omega_z &= \omega_{1z} + \omega_{2z}; \\ c_{0x} &= u_x = u_{1x} + u_{2x}; & c_{0y} &= u_y = u_{1y} + u_{2y}; & c_{0z} &= u_z = u_{1z} + u_{2z}; \end{aligned}$$

avagy, felhasználva az (1), (2), (3) kifejezéseit:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \alpha_2 \omega_2; & 0 &= -\omega_2 (\beta_2 c_2 - \gamma_2 b_2); \\ 0 &= \beta_1 \omega_1 + \beta_2 \omega_2; & 0 &= -\omega_1 \gamma_1 a_1 - \omega_2 (\gamma_2 a_2 - \alpha_2 c_2); \\ 0 &= \gamma_1 \omega_1 + \gamma_2 \omega_2; & c_0 &= u = +\omega_1 \beta_1 a_1 - \omega_2 (\alpha_2 b_2 - \beta_2 a_2). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Az első egyenlet szerint $\alpha_2 = 0$, azaz a $T_2 T_2$ is az YZ -hoz párhuzamos síkban fekszik, e szerint $T_1' T_1'$ és $T_2' T_2'$ magában az YZ -síkban fekszenek és $\beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$; $\beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1$.

A második egyenlet szerint

$$\beta_1 : \beta_2 = -\omega_2 : \omega_1 = \sqrt{1 - \gamma_1^2} : \sqrt{1 - \gamma_2^2}; \quad \dots \quad (4a)$$

a harmadik szerint a $T_1' T_1'$ és $T_2' T_2'$ tengelyeken lemerő ω_1 és ω_2 mennyiségek vetülete a momentán csavartengelyre egyenlő az ω -val, azaz az ω_1 és ω_2 azon *parallelogramm* oldalai, melynek átlója ω (231. ábra).

A (4) három utolsó egyenlete pedig, az első háromnak tekintetbe vétele mellett írható:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \beta_2 c_2 - \gamma_2 b_2; & \alpha_2 \omega &= -\omega_1 \gamma_1 (a_1 - a_2); & c_0 &= u = +\omega_1 \beta_1 (a_1 - a_2) \\ \text{vagy még:} & & & & \\ 0 &= \omega_2 (\beta_2 c_2 - \gamma_2 b_2); & \alpha_1 \omega &= +\omega_2 \gamma_2 (a_1 - a_2); & c_0 &= u = -\omega_2 \beta_2 (a_1 - a_2) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Az (5) második és harmadik, továbbá ötödik és hatodik egyenleteinek osztatából származik:

$$\left. \begin{aligned} \frac{c_0}{a_2\omega} = \frac{u}{a_2\omega} = -\frac{\beta_1}{\gamma_1} = -\frac{\sqrt{1-\gamma_1^2}}{\gamma_1} = -\operatorname{tg}(T_1T_1, Z); \\ \frac{c_0}{a_1\omega} = \frac{u}{a_1\omega} = -\frac{\beta_2}{\gamma_2} = -\frac{\sqrt{1-\gamma_2^2}}{\gamma_2} = -\operatorname{tg}(T_2T_2, Z). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

A két egyenlet felállítja a szükséges összefüggést a T_1T_1 és T_2T_2 két tengely helyzete és iránya között.

Végre, a P_2 távolságát az O -tól ϱ_2 -vel, ezen $\varrho_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}$ iránycosinusait λ_2, μ_2, ν_2 -vel jelevé (hol $a_2 = \lambda_2\varrho_2, b_2 = \mu_2\varrho_2, c_2 = \nu_2\varrho_2$ és az OP_2T_2 sík normálisa iránycosinusait l_2, m_2, n_2 -vel, az (5) első vagy negyedik egyenlete írható:

$$0 = l_2\varrho_2\omega_2 = 0$$

miből $l_2 = 0$, és így $m_2^2 + n_2^2 = 1$; azaz az OP_2T_2 sík az X tengelyt tartalmazza és az YZ síkhoz párhuzamos, a mint azt már előbb találtuk.

Ezenkívül a (4) első egyenlete szerint az $\alpha_2 = 0$ lévén, a 281. §. (4) egyenleteiből itt:

$$\lambda_2 = m_2\gamma_2 - n_2\beta_2; \quad \mu_2 = 0, \quad \nu_2 = 0; \quad \dots \quad (7)$$

avagy: $a_2 = \varrho_2, b_2 = 0, c_2 = 0$, szóval: az OP_2 perpendikuláris az X tengely folytatásába esik és így T_1T_1 -re is merőleges.

4. Ezek értelmében az a T_1T_1 és T_2T_2 két egyenes, melyek körüli ω_1 - és ω_2 szögsebességű forgások a momentán, ω szögsebességű csavarmozgást teljesen helyettesítik, oly helyzetű, hogy a kettőnek leg-rövidebb távolsága, P_1P_2 , a momentán csavartengelyt is derékszög alatt metszi, és hogy e két vonal a csavartengelyen és P_1P_2 távolságon átmenő síkra merőleges két síkban fekszik; végre az ω_1, ω_2 és ω szögsebességek vectorai egyenközényt alkotnak (231. ábra).

Az OZ csavartengelyt még Mozzi-féle vagy *centrális tengely*nek is nevezik (273. §. 2. pontja); P_1 a T_1T_1 *centrális pontja*, $T_1P_1P_2$ a T_1T_1 -nek *centrális síkja*; P_2 és $T_2P_2P_1$ a T_2T_2 centrális pontja, illetve síkja.

Maga a T_1T_1 és T_2T_2 két egyenest *conjugált egyenespárnak* nevezik (303 és 304. §§.); helyzetüket a momentán csavarmozgás tengelyéhez, az OZ -hez az a_1, γ_1 és az a_2, γ_2 adja meg; ha a csavarmozgás jellemzői ω, c_0 (vagy u) és az egyik vonal helyzete, a_1, γ_1 és a hozzátartozó ω_1 szögsebesség ismeretesek (vagy ez utóbbiak tetszőlegesen választvák), a másik vonal a_2, γ_2, ω_2 adatai a (6) és (4a) egyenletekből adódnak.

A conjugált egyenespárok a merev rendszerek általános mozgásában igen fontos szerepet visznek, v. ö. a 303—306. §§-t.

Jegyzet: Az 1. pontban a momentán csavartengelyhez és a tetszőleges T_1T_1 vonalhoz a lehető legegyszerűbben fektettük az XYZ tengelyrendszert, a nélkül, hogy a mozgás általánosságát korlátoztuk volna; ha pedig

e rendszernek tetszőleges fekvést adunk, a tárgyalás teljesen symmetrikus ugyan, de tetemesen bonyolódott lesz.

3. Példák a merev rendszerek, a kinematikai lánczok és a mechanizmusok általános mozgására.

285. §. Példa általánosabb gördülő mozgásra.

Valamely merev rendszer olyformán mozog, hogy benne fekvő egy térbeli görbe egy másik, szilárd térbeli görbén olyképen gördül, miszerint a két görbe osculáló síkjai mindig egybeesnek.

Ez a gördülés kétféleképen történhetik; vagy úgy, hogy a görbék görbületi körei (s így görbületi középpontjai is) a közös érintőnek egyik oldalán vagy pedig ennek két oldalán fekszenek.

Legyenek ds_1 és ds_2 a két görbe ívelemei, $d\vartheta_1$ és $d\vartheta_2$, illetve $d\varepsilon_1$ és $d\varepsilon_2$ a hozzájuk tartozó érintőknek, illetve simuló síkjaik normálisainak elemi irányváltozásai [Math. repertórium 68. §.]; akkor a gördülés folytán bekövetkező elemi forgásnak az összetevője a binormális körül $d\vartheta_1 \pm d\vartheta_2$, míg az összetevő a tangens körül $d\varepsilon_1 \pm d\varepsilon_2$, hol a kettős előjelek közül a felsők vagy az alsók érvényesek, a szerint, a mint a két görbe görbületi középpontjai a közös érintő különböző oldalain vagy csak egyik oldalán fekszenek.

Az eredő forgás momentán tengelye e szerint a rectificáló síkba esik [Math. repertórium, Kiegészítések 1. lap]; a forgás szöge

$$[d\vartheta_1 \pm d\vartheta_2]^2 + (d\varepsilon_1 \pm d\varepsilon_2)^2]^{\frac{1}{2}};$$

vége a momentán tengely s a közös érintő által bezárt η szög tangense;

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{d\vartheta_1 \pm d\vartheta_2}{d\varepsilon_1 \pm d\varepsilon_2} \quad (1)$$

a. Ha a két görbe görbulete egyenlő, de csavarodása különböző, akkor $d\vartheta_1 = d\vartheta_2 = d\vartheta$ és az (1)-ből

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{2d\vartheta}{d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2}; \quad \text{vagy} \quad \operatorname{tg} \eta_{\infty} = 0;$$

az utóbbi esetben $\eta_{\infty} = 0$ és a forgás csak a közös érintő körül történhetik.

b. Ha a két görbe görbulete különböző, de csavarodása egyenlő, akkor $d\varepsilon_1 = d\varepsilon_2 = d\varepsilon$ és az (1)-ből

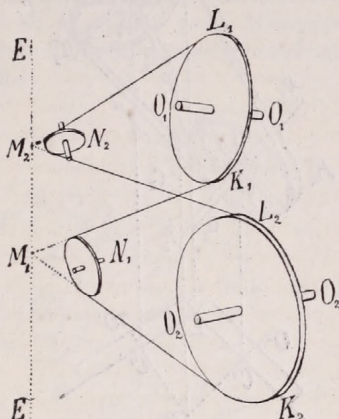
$$\operatorname{tg} \eta = \frac{d\vartheta_1 + d\vartheta_2}{2d\varepsilon}; \quad \text{vagy} \quad \operatorname{tg} \eta_{\infty} = \infty;$$

az utóbbi esetben $\eta_{\infty} = \frac{1}{2}\pi$ és a forgás csak a binormális körül történhetik, a mi analog, de nem azonos a sík görbék egymáson való gördüléséhez.

A példa részletezését s egyszerűbb görbékre való alkalmazását az olvasónak ajánljuk.

286. §. *Tetszőleges hengerkerek mozgásának átvitele csigák és vég nélküli szíjak (kötelek) közvetítésével.*

Jeleljék (232. ábra) O_1O_1 és O_2O_2 a két, egymással mozgásbeli kapcsolatba hozandó tengelyt; a kapcsolást hajlítható kötél (fonál) segítségével kívánjuk létesíteni. E célból erősítsünk e tengelyekre K_1L_1 , K_2L_2 lapos csigákat (kerekeket), melyek sugarainak viszonya a szögsebességek kívánt viszonyának reciprok értékével legyen egyenlő. E kerek középein átmenő, lapjaikhoz párhuzamos síkjai egymást az EE egyenesben messék; húzzunk ezen egyenes tetszőleges M_1 pontjából a két kerekhez M_1K_1 és M_1K_2 érintőket és alkalmazzunk az általuk képezett $K_1M_1K_2$ szögben egy villában mozogható (222. §.), az M_1 -ben EE -hez oly módon erősített kicsiny N_1 hengerkerek vagy csigát, mely nemcsak saját tengelye körül, hanem villájának az M_1 -ben az EE -re merőleges tengelye körül is szabadon foroghat, úgy hogy az N_1 kerék síkja mindig beáll a $K_1M_1K_2$ síkba. Ugyanily formán erősítünk az EE másik tetszőleges M_2 pontjához N_2 csigát vagy hengerkerek. Ha most e négy kerek az 232. ábrában előtüntetett módon kötéllel vagy szíjjal egybekapcsoljuk, akkor mindegyik kerék abban a síkban van, melyet a szíjnak öt mozgató két része (ága) képez; e szerint ezen transmissió a kívánt egybekapcsolást helyesen létesíti és a mozgás mindkét irányára nézve működik.



232. ábra.

287. §. *Tetszőleges tengelyű hengerkerek közvetlen egybekapcsolása vég nélküli szíj segítségével.*

Ha a mozgás átvezését (a transmissiót) csak egy mozgás-irány mentén kívánjuk és a tengelyek egymástól való távolsága nem kicsiny, vagy az általuk bezárt szög csak csekély, akkor a következő gyakorlati megfontolások érvényesítendők: A tapasztalat kimutatta, hogy a szíj azon részének, mely a kerékhez közeledik, okvetetlenül a kerék síkjában kell lennie, míg a szíj eltávozó része tetemesen eltérhet e siktól a nélkül, hogy a szíj leválnék a keréktől.

Ezt véve tekintetbe, legyenek (233. ábra) O_1O_1 és O_2O_2 az adott tengelyek, P_1P_2 e vonalak egymástól való legrövidebb távolsága és L_1L_2 a P_1P_2 -hez párhuzamos oly vonal, mely egyszerre érinti a két kerék hengeres felületeit.

Ezt az L_1L_2 vonalat úgy találjuk, hogy a kerek C_1 és C_2 középpontjaiból a megfelelő O_1O_1 , illetve O_2O_2 tengelyekre merőleges C_1L_1 ,

hogy ha az első kerek sugara végtelen nagy lesz, akkor K_1K_1 kerülete egyenes vonalra redukálódik, melyre merőlegesek egyenlő közű fogainak lapjai; ennek a speciális esetnek felel meg a végnélküli csavar, ha profilje derékszögű négyszög; ezért ezen szerkezet AB kerekének ezen esetben *körevolvens*-alakú fogazást kell adnunk, melynek részletesebb adatai az idézett §. alapján kiszámíthatók.

b. Ámde az még nem elegendő, hogy a csavar profiljének és a kerék fogának (vagy fogainak) a meridián síkkal való keresztmetszetei egymással (e síkban) érintkezzenek, hanem még az is szükséges, hogy a fogprofil-felület és a vele érintkező csavarfelület közös érintő síkot is mutassanak. Ha m a csavarmenet magassága és R_1 a csavarfelületnek a meridiánsíkban fekvő valamely érintkező pont távolsága a tengelytől, akkor ezen pont által a forgás közben leírt csavargörbe érintője az O_1O_1 -re merőleges síkkal (a forgás síkjával) oly i szöget képez, melyre nézve (276. §. 1. pontja):

$$\cot g i = \frac{2\pi R_1}{m}, \quad (1)$$

az i egyszersemind e pont érintő síkja normálisának a meridiánsíkkal képezett szöge.

A kerék fogának felülete e szerint annak a két feltételnek tartozik egyszerre eleget tenni, hogy a meridiánsíkkal való metszete körevolvens, míg érintősíkjá mindig állandó $\frac{1}{2}\pi - i$ szöget képez a meridiánsíkkal. E felület ennek értelmében úgy létesíthető, ha a körevolvensnek mint generatrixnek, az AB keréknek (a meridiánsíkra, az ábrára merőleges) C_2 tengelye körül állandó szögsebességű forgást és e tengelyhez párhuzamos (a meridiánsíkra merőleges) állandó sebességű translációt tulajdonítunk.

Miután e felületnek csak kicsiny és rövid része szükséges, a gyakorlatban ezt oly hengerfelülettel helyettesítik, melynek szelvénye a körevolvens, míg tengelye a kerék síkjával $\frac{1}{2}\pi - i$ szöget képez.

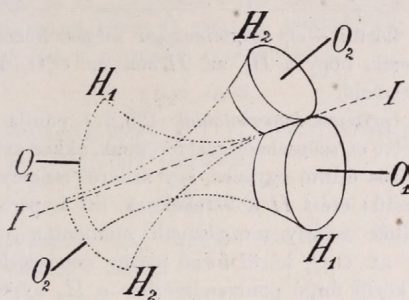
3. Jeleljék ω_1 és ω_2 a csavar és a kerék szögsebességét, m a csavarmenet magasságát és n_2 a kerék fogainak számát; R_1 és R_2 a csavar és a kerék primitív kerületének sugarait (235. ábra), akkor áll:

$$\omega_2 R_2 = \omega_1 R_1 \operatorname{tg} i \quad (2)$$

4. A gyakorlati céloknek megfelelő egy szerkesztést a 235. ábra mutat; a csavar profiljei tompított háromszögek, a kerék fogait egyenes lapú felületek határolják. A kerék véges vastagságának befolyását e rajz felső fele és alsó vetülete jól tünteti elő, mivel a C_d vonal feletti része az AA meridiánsík geometriai viszonyait, a C_d alatt lévő része ellenben az ehez párhuzamos, a kerék határlapját képező BB síkét adja meg.

289. §. *Hyperboloidos fogazott kerek és ezek elmélete.*

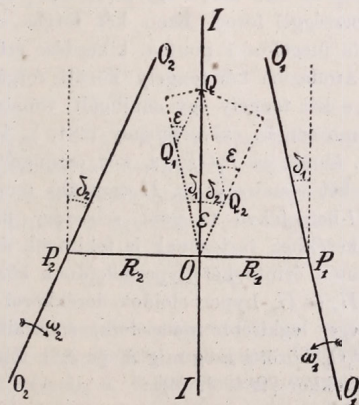
Azt a feladatot, **valamely adott tengely körüli forgást egy másik, az első nem metsző tengely körüli forgássá átalakítani**, hyperboloidos fogazott kerek segítségével is lehet megoldani. [Ily kerek szabatos elméletét először BELANGER (1860) adta].



236. ábra.

E célra itt legegyszerűbben úgy járunk le, ha a következő geometriai és kinematikai megfontolásokból indulunk ki :

1. Legyenek ω_1 és ω_2 a szögsebességek azon O_1O_1 és O_2O_2 tengelyek körül (236 és 237. ábrák), melyek egyikéről a mozgást a másikra



237. ábra.

átvinni kívánjuk ; választjuk ezeket oly két forgási hyperboloidnak, H_1 -nek és H_2 -nek tengelyeiül, melyek mozgás közben egymást mindig egy közös II generatrix mentén érintsék. E felületek szerkesztése abból adódik, hogy a két kerékhez (a 195. §. 2. pontjának mintájára) egyszerre oly mozgást adunk, mely által e két kerék egymáshoz viszonyított mozgása nem változik.

egymásután egymásba kapaszkodjanak, csak azt kell megfontolni, hogy míg az első kerék egy egész forgást végzett (2π -szöget írt le), addig a második kerék $2\pi \frac{\omega_2}{\omega_1}$ szöget írt le, de e közben az első kerék n_1 számú barázdájának érintkezésbe kellett jönnie ugyanannyi n_1 számú domború vonallal a másik kereken. Ezen utóbbiak azonban csak a nevezett $2\pi \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1}$ szögön terülnek el és ezért a második keréknek egész $2\pi = (2\pi \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1}) \frac{\omega_1}{\omega_2}$ területén $n_1 \cdot \frac{\omega_1}{\omega_2}$ számú domború vonalnak (és ugyanannyi barázdának) kell lennie, azaz kell, hogy álljon:

$$n_2 = n_1 \frac{\omega_1}{\omega_2}, \text{ vagy: } n_1 : n_2 = \omega_2 : \omega_1, \quad \dots \quad (5)$$

szóval, a barázdák száma a szögsebességekkel fordítva arányos.

Mivel pedig a derékkörök sugarainak vagy kerületeinek viszonya a (4) szerint általánosságban véve különbözik az $\omega_2 : \omega_1$ viszonytól, azért e kerületek viszonya nem egyenlő az $n_1 : n_2$ viszonyynal, azaz a *barázdák köze* és így a *fogak egymástól való távolsága is a két kerekre nézve különböző.*

Csak abban az esetben, ha a kerek tengelyei párhuzamosak, a (4)-ben $\varepsilon = 0$ és a fogak távolsága egyenlő; de ekkor a hengeres fogazás esete áll elő (195—198. §§.).

Ez az egyik lényeges különbség, mely a hyperboloidos fogazást a hengeres és a kúpos fogazástól megkülönbözteti: a másik abban áll, hogy az egymással érintkező barázdák és domború vonalak érintkezés közben egymáson *siklanak* is, miáltal mindig létesül surlódás.

290. §. A MANNESMANN-féle csőhengerlés kinematikája.

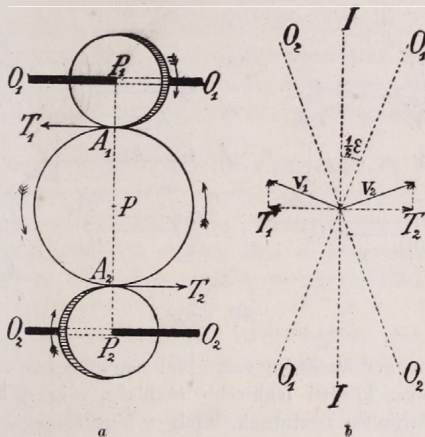
A legutolsó években a fémcsőgyártás egy nevezetes módja keltette fel a szakkörök figyelmét.

Az eljárás, mely az addig alkalmazásban lévőttől teljesen elüt, lényegében véve egymást nem metsző két tengely körüli forgásnak és egy kényszernek a puha (izzó) fémtömegre való alkalmazásából áll. (V. ö. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 25. füzet 1890).

1. Jeleljék (238a és b ábrák) O_1O_1 és O_2O_2 a két változatlan helyzetű tengelyt, melyek mindegyike egyenlő R sugarú rövid h_1 és h_2 aczélszövegert visz (239a. és b. ábrák); a két tengely közötti legrövidebb távolság P_1P_2 ; a rajz síkja tartalmazza e távolságot és szimmetrikus fekvésű legyen a két tengelyhez (azaz O_1O_1 hajlása e síkhoz egyenlő, de ellentett irányú mint az O_2O_2 hajlása). E két henger közé úgy helyezzessék egy harmadik, az első kettőt érintő, R_0 sugarú izzó hh fémhenger (238a és 239a és b. ábrák), hogy annak II tengelye merőleges legyen a P_1P_2 legrövidebb távolságra és ennek P középpontján menjen keresztül, végre II iránya az az O_1O_1 és az O_2O_2 -vel egyenlő értékű, ellentett

előjelű $\frac{1}{2}\epsilon$ szögeket képezzen (238b. ábra; e szögek zérus értéket vesznek vesznek fel, ha az O_1O_1 és O_2O_2 egymáshoz párhuzamosak).

Ha most valami hajtómű a két aczélszélhenger egyenlő előjelű forgásba hozza, akkor ezek a közöttük lévő fémhenger felületeik súrlódásánál fogva szintén mozgásnak indítják; a mozgásnak olyannak kell lennie, hogy az A_1 és A_2 közös érintkező pontok elmozdulásai (sebességei) a megfelelő érintkező két-két hengerre nézve ugyanazok legyenek.



238. ábra.

A felső aczélszélhenger A_1 pontjának v_1 sebessége a P_1A_1P egyenesre merőleges és a középső henger II tengelyével $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\epsilon$ szöget képez (238a és b ábrák) ezért e sebesség vetületei ezen II tengely mentén $v_1 \cos(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\epsilon)$; és e tengelyre merőlegesen (az A_1 -hez húzott, a rajz síkjában fekvő közös A_1T_1 érintő mentén) $v_1 \sin(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\epsilon)$.

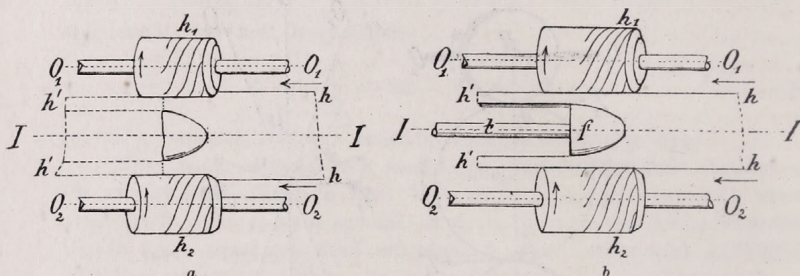
Az alsó aczélszélhenger A_2 pontjának v_2 sebessége merőleges a P_2A_2P egyenesre és a középső henger II tengelyével $-(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\epsilon)$ szöget képez (a $-$ előjel mutatja, hogy a v_2 a v_1 -hez szimmetrikusan fekszik, 238a és b ábrák); ezért v_2 componense az II mentén $v_2 \cos(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\epsilon)$, a közös A_2T_2 érintő mentén pedig $-v_2 \sin(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\epsilon)$.

Tegyük most fel, hogy a két aczélszélhenger forgása egyenlő; akkor $v_1 = v_2 = v$ és így a megelőzők értelmében a középső hengernek mind az A_1 , mind az A_2 pontja az II mentén egyenlő nagyságú és irányú $v \sin \frac{1}{2}\epsilon$ haladó sebességet, az II körül pedig egyenlő nagyságú, de ellentett irányú $v \cos \frac{1}{2}\epsilon$ forgási sebességet nyer. Ezek szerint a középső henger momentán csavarmozgásának tengelye az II , transzlátorius (haladó) sebessége $v \sin \frac{1}{2}\epsilon$, szögsebessége $\frac{v \cos \frac{1}{2}\epsilon}{R_0}$; a fémhenger tehát a két aczél-

henger egyenlő forgása folytán saját tengelye körül forgást és saját tengelye mentén translációt nyer.

2. Az 1. pont alatti eredmények mindaddig szigorúan érvényesek míg a középső henger *merev* szerkezetű és mind az *II* tengelye mentén, mind ezen tengely körül szabadon mozoghat.

Lényegesen más mozgási jelenség létesül, ha a középső henger lágy (izzó fém) szerkezetű és tengelye menti mozgása czélszerűen alkalmazott kényszer (feltétel) által akadályozva vagy legalább lassítva van.



239. ábra.

a. A lágy henger átmérője valamivel nagyobb legyen, mint a két h_1 és h_2 acélhenger közötti legkisebb távolság, míg e két acélhenger végükön kis letompulást mutatnak, mely e lágy tömegnek e kettő közé történő benyomulását az anyagnak elszakítása nélkül lehetővé teszi (239a és b. ábrák); ezenkívül az acélhengerek felülete, a surlódás növelése czéljából csavaralakú barázdákkal legyen beborítva.

Ha most ezen hh lágy (izzó vas-) henger egyik végét a nagy erővel és gyorsan forgatott két acélhenger közé helyezik, akkor a megelőzők értelmében az izzó henger saját tengelye körül gyors forgást nyer, míg tengelye menti előhaladása mint egész merev henger nem történhetik, hanem az acélhengerekkel érintkező *felületi pontjai* a surlódás folytán az 1. pont alatt részletezett csavarmozgást kénytelenek végezni.

Ebből következik, hogy míg a lágy henger magva csak tengelye körüli forgást, de tengelymenti haladás alig végezhet, addig a két acélhengerrel érintkező felületi rétege ezenkívül még tengelymenti translációt is kénytelen végezni.

Az izzó, eleinte tömör vasrúd felületi rétege ezen megmunkálás közben gyors forgatással saját tengelye mentén sebesen lesz előre tolva, ellenben a rúd magva e mozgásnak tengelye menti ösztetevőjét nem képes oly gyorsan követni és csak lassan haladhat előre.

Ennek következménye az lesz, hogy a rúd mellső végén horpadás áll be, mely a hengerlés folytatásával mind mélyebbre húzódik a rúd belsejébe, míg végre ennek hátsó végét eléri (239a. ábra). Ekkor a rúd hátulsó végén először fénylő pontot veszünk észre, mely csakhamar izzó

körre válik, a rúd ezen vége rohamos forgása közben szétnyílik és így kész a cső hátulsó nyílása is.

A leírt folyamatból észrevehetni, hogy az aczélhengerek a közéjük kerülő vasrudat a szó szoros értelmében megnyúzzák és így a tömör vashengerből csövet készítenek.

A felületi réteg tengelye menti sebessége $v \sin \frac{1}{2}\varepsilon$; ez annál nagyobb, mennél nagyobb a két aczélhenger közötti ε szög; de akkor, különben egyenlő körülmények között, a keletkező cső fala is annál vékonyabb lesz.

aa. Ha az aczélhengerek egymáshoz igen rézsútosan állanak (ha ε szög tetemes), akkor a rúd magvának tengelye menti mozgását avval is lehet késeletetni, hogy a rúd vége elé erős aczéltüsköt, t -et támasztunk (239b. ábra), mely forgathatóan van ágyazva és végén egy szintén forgatható f fejet hord. E tüsköt hosszszirányában csavarral úgy lehet beállítani, hogy fejére a pontra kerüljön, melyben az üregképződés kezdetét kívánjuk. Az így készített csövek belső fala sima.

bb. Ha az izzó vasrúd hátsó vége kúposan van letompítva, akkor az aczélhengerek e véget nem érinthetvén, nem is munkélhatják meg és így a cső ezen hátulsó része zárva marad, mintegy feneket kap.

Ha még az izzó vasrúd mellső vége is kúposan van letompítva, akkor a technika egy nevezetes eredménye, egy mindkét végén zárt cső keletkezik.

[Érdekes az a körülmény, hogy az ily teljesen elzárt cső belsejében a vegyi elemzés oly gáz jelenlétét mutatta ki, melynek 99%-ka hidrogén és 1%-ka nitrogén].

b. Az a . alatt leírt módon gyártott csövek sok esetben már bizonyos célokra használhatók; de sokszor kell ezeket előbb még kibővíteni.

E bővítés az ú. n. tárcsás hengermű segítségével történik (240. ábra), mely lényegében véve két hyperboloidos felületű kerékből áll [289. §.].

Ugyanis (240. ábra) e kerek O_1O_1 és O_2O_2 tengelyei nem fekszenek egy síkban; mindegyikük végén egy a felületen csavaralakúlag rovátkolt hyperboloidos csonka tárcsát, h_1 -et, h_2 -öt visz (ha a hyperboloid felületnek e tárcsákon lévő része elég rövid, e felület egyszerű kúpfelületekkel helyettesíthető, 289. §. 4. pontja). A két tárcsa közé nyúló, foroghatóan ágyazott t tuskó végén f kúp alakú fejet visz; e tuskónak (a rajz síkjában fekvő) II tengelye átmegegyen a rajz síkjához párhuzamos O_1O_1 és O_2O_2 tengelyek közötti legrövidebb távolság középpontján, merőleges e távolságra és teljesen szimmetrikus fekvésű e két tengelyhez képest, épen úgy mint a 239b. ábránál.

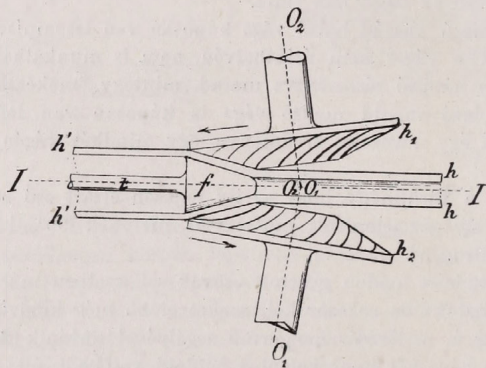
Ha most két külön gőzgép a h_1 és h_2 kerekeket egyenlő, de ellentett irányú forgásba hozzák, akkor ezek a közéjük az f -felé dugott fehér-izzó, vastagfalú csövet (az 1. pont tárgyalása értelmében) oly csavarmozgásba hozzák, melynek tengelye a t tuskó II tengelyével esik egybe; e szerint e kerek a csövet forgatva terelik az f kúp felé. Ekkor a három kúpos felület közé került csövet a tárcsák surlódása és nyomása gyors forgás közben nagy erővel nyomják az f kúpra és ennek tengelye mentén tovább, úgy

hogy a lágy cső kénytelen az f fej legnagyobb átmérőjének nagyságáig kibővülni.

c. Az a és b alatt említettek a MANNESMANN-féle eljárások lényegét tüntetik elő; az így készített csövek csavarvonalszerű structurája teljesen magán hordja azon csavarmozgás bélyegét, melynek alkalmazásával keletkezett; a tapasztalat kimutatta, hogy az így gyártott csövek sokkal erősebb nyomásokat bírnak elviselni, mint a más úton gyártott, velük egyenlő vastag falú csövek.

d. Ha az a és b -ben említett aczélhengerek illetve aczélkúpok forgás-sebességét a megmunkálás közben megváltoztatjuk, akkor a keletkező cső falának vastagsága annak különböző keresztmetszeteiben különböző lesz.

A vasnak ezen, bátran mondhetni erőszakos megmunkálása igen nagy menynyiségű munkakészletet igényel, melyet nagy erősségű gőz-



240. ábra.

gépekkel, nagy tömegű és gyorsan forgó lendítő kerekekben halmoznak fel és melyet e csöveknek mind az a . mind a b . alatt említett módszerek szerinti, átlag legfeljebb harmincz másodperczig tartó gyártása közben majdnem teljesen kell igénybe venni.

Az eljárásokat azonban még tetemesen kell tökéletesíteni.

4. Merev rendszer általános elemi elmozdulásának és sebességének analitikai megvizsgálása.

291. §. *A térben szilárd tengelyek és a merev rendszerrel mozgó (elszállító) tengelyek geometriai vonatkozásai.*

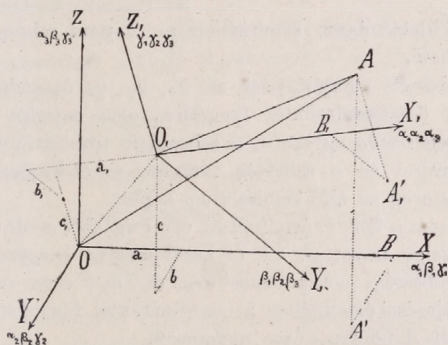
Jeleljék (241. ábra), mint a 241. §-ban, a pont körüli mozgás tárgyalásánál, XYZ a térben nyugvó koordináta-rendszert és x, y, z a mozgó pontrendszer valamely tetszőleges A pontjának ezen álló rendszerre vonatkoztatott összrendezőit, míg X, Y, Z , a mozgó pontrendszerrel szilárd

kapcsolatban lévő (elszállító) tengelyeket és x, y, z , az A változatlan coordinátáit e mozgó tengelyekre nézve; az első rendszer O kezdetének coordinátái az XYZ rendszerre nézve a, b, c , míg a második rendszer O , kezdetének coordinátái az XYZ rendszerre nézve a, b, c [v. ö. a Math. repertórium 49. §-a (1) és (3) formuláit].

Ekkor:

$$\left. \begin{aligned} a &= a_1 + b_1 \beta_1 + c_1 \gamma_1 \\ b &= a_2 + b_2 \beta_2 + c_2 \gamma_2 \\ c &= a_3 + b_3 \beta_3 + c_3 \gamma_3 \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} x &= a + x_1 \alpha_1 + y_1 \beta_1 + z_1 \gamma_1 \\ y &= b + x_2 \alpha_2 + y_2 \beta_2 + z_2 \gamma_2 \\ z &= c + x_3 \alpha_3 + y_3 \beta_3 + z_3 \gamma_3 \end{aligned} \right\}; \quad \dots \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= a_1 + b_1 \alpha_1 + c_1 \beta_1 \\ b &= a_2 + b_2 \alpha_2 + c_2 \beta_2 \\ c &= a_3 + b_3 \alpha_3 + c_3 \beta_3 \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} x &= a + x_1 \alpha_1 + y_1 \alpha_2 + z_1 \alpha_3 \\ y &= b + x_2 \beta_1 + y_2 \beta_2 + z_2 \beta_3 \\ z &= c + x_3 \gamma_1 + y_3 \gamma_2 + z_3 \gamma_3 \end{aligned} \right\}; \quad \dots \quad (2)$$



241. ábra.

hol $\alpha_1 \dots \gamma_3$ az idézett §-ban fellépő s a 241. ábrában is jelzett irány-cosinusok; a többi, ezen cosinusokra vonatkozó összefüggések [ott a (3)–(6) egyenletrendszerek] itt is érvényesek.

292. §. A csavarmozgás kimutatása a szilárd coordináta-rendszerben.

1. Az XYZ rendszerre nézve a sebesség componensei [megelőző §. (1)]:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= a' + x_1 \alpha'_1 + y_1 \beta'_1 + z_1 \gamma'_1 \\ v_y &= b' + x_2 \alpha'_2 + y_2 \beta'_2 + z_2 \gamma'_2 \\ v_z &= c' + x_3 \alpha'_3 + y_3 \beta'_3 + z_3 \gamma'_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Itt az a', b', c' az O , kezdőpont sebességi vetületei az XYZ tengelyek mentén, míg x, y, z , állandók.

Ha ebbe a rendszerbe az x, y, z , értékeit a megelőző §. (2) rendszeréből helyetteszzük, akkor egészen analog transzformációt alkalmazhatni, mint a 242. §-ban a gömbi mozgásnál.

Az e helyettesítésnél az (1)-ből származó egyenletekben jeleljék ω_x , ω_y , ω_z a 242. §. (2) rendszerében kifejezett szögsebességi componenseket és u_x , u_y , u_z a transzformáció folytán származó összegek azon részeit, melyek függetlenek a coordinátáktól; ez utóbbiak, tekintettel a megelőző §. (1) egyenletei első csoportjára, a következők:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= a' + a'_1 + b'_1 \beta'_1 + c'_1 \gamma'_1 = 2a' - (a'_1 \alpha_1 + b'_1 \beta_1 + c'_1 \gamma_1); \\ u_y &= b' + a'_2 + b'_2 \beta'_2 + c'_2 \gamma'_2 = 2b' - (a'_2 \alpha_2 + b'_2 \beta_2 + c'_2 \gamma_2); \\ u_z &= c' + a'_3 + b'_3 \beta'_3 + c'_3 \gamma'_3 = 2c' - (a'_3 \alpha_3 + b'_3 \beta_3 + c'_3 \gamma_3). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

E mennyiségek egy u sebesség derékszögű componenseinek tekinthetők.

Ezek szerint az (1) transzformált alakja:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= x' = u_x + \omega_y z - \omega_z y \\ v_y &= y' = u_y + \omega_z x - \omega_x z \\ v_z &= z' = u_z + \omega_x y - \omega_y x \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Ezen egyenletrendszer értelmében az A pont sebessége két részből állónak tekinthető.

Az első résznek componensei az u_x , u_y , u_z összetevők, melyek a (4) szerint az összszerendezőktől független, azaz minden rendszerbeli A pontra nézve ugyanazon egyszerű, u sebességű transláció összetevői; ez az u egyszersmind az a sebesség, melylyel az O kezdetben lévő rendszerbeli pont mozog az álló rendszerhez képest.

A másik rész a 239. §. értelmében oly forgásból eredő sebesség, melynek forgástengelye az x -, y -, z -k O kezdőpontján megyen keresztül és melynek szögsebességi componensei ω_x , ω_y , ω_z ; ezen componensek a 242. §. (2) kifejezései értelmében a coordinátáktól függetlenek, azaz, minden rendszerbeli A pontra nézve ugyanazok.

Jegyzet: Szorozva itt is a (3) egyenleteit rendre ω_x -, ω_y -, ω_z -vel, ezek összege:

$$v_x \omega_x + v_y \omega_y + v_z \omega_z = u_x \omega_x + u_y \omega_y + u_z \omega_z \quad (3a)$$

2. Keressük most a mozgó pontrendszer azon pontjait, melyek sebességei a forgás tengelyéhez párhuzamosak; e pontok coordinátáit ξ -, η -, ζ -val jeleljük.

Ilyenekre nézve a feltétel az, hogy a v sebesség és vetületei egy-máshoz ugyanazon viszonyban legyenek, mint az ω szögsebesség és vetületei, röviden:

$$v : v_x : v_y : v_z = \omega : \omega_x : \omega_y : \omega_z,$$

vagy a (3)-ból, a ξ , η , ζ coordináták bevezetésével:

$$\frac{v}{\omega} = \frac{u_x + \omega_y \zeta - \omega_z \eta}{\omega_x} = \frac{u_y + \omega_z \xi - \omega_x \zeta}{\omega_y} = \frac{u_z + \omega_x \eta - \omega_y \xi}{\omega_z} = \frac{v}{\omega} \quad (4)$$

Mivel itt az u_x , u_y , u_z ; ω_x , ω_y , ω_z valamenynyi rendszerbeli pontra nézve ugyanazok, azaz a coordinátáktól függetlenek, azért a (4) formulák oly egyenesnek egyenletei, melynek iránya a forgás tengelyének irányához párhuzamos.

Az ezen tengely mentén fekvő pontok sebességei e szerint e tengelyhez párhuzamos lévén, ez az egyenes a csavarmozgás tengelye, vagy: az általános mozgás mindig csavarmozgással helyettesíthető, melynek tengelyét a (4) egyenletek szolgáltatják.

Jegyzet; Ezen tengelymenti pontokra nézve a (3a) egyenletben írva $\omega_x = (v_x \omega) : v$ s i. t., némi egyszerűsítés után:

$$v_x \omega_x + v_y \omega_y + v_z \omega_z = v \omega,$$

és így a (3a)-ból a (4) egyenlet $v : \omega$ része:

$$\frac{v}{\omega} = \frac{u_x \omega_x + u_y \omega_y + u_z \omega_z}{\omega^2}; \dots \dots \dots (4a)$$

de ebből általában nem következik, hogy a tengelymenti pontokra nézve $v = u$.

293. §. A csavarmozgás kimutatása a mozgó rendszerrel haladó (elszállító) tengelyrendszerben.

1. Az x, y, z , coordináták az időtől függetlenek ugyan, de azért az A pont v sebességét szabad vonatkoztatni az X, Y, Z , tengelyek irányaira, melyek az álló X, Y, Z tengelyekkel rendre az $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ szögeket képezik (241. ábra).

A megelőző §. (1) kifejezéseivel a v_x, v_y, v_z összetevőket az X, Y, Z , tengelyek irányaira vetítve, nyerjük:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \alpha_1 v_x + \alpha_2 v_y + \alpha_3 v_z \\ v_y &= \beta_1 v_x + \beta_2 v_y + \beta_3 v_z \\ v_z &= \gamma_1 v_x + \gamma_2 v_y + \gamma_3 v_z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Ebbe a rendszerbe a v_x, v_y, v_z idézett értékeit helyettesítve, írjuk rövidség kedvéért, tekintettel a 291. §. (2) egyenletei első csoportjára:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= a' \alpha_1 + b' \alpha_2 + c' \alpha_3 = a'_1 - (a \alpha'_1 + b \alpha'_2 + c \alpha'_3) \\ u_y &= a' \beta_1 + b' \beta_2 + c' \beta_3 = b'_1 - (a \beta'_1 + b \beta'_2 + c \beta'_3) \\ u_z &= a' \gamma_1 + b' \gamma_2 + c' \gamma_3 = c'_1 - (a \gamma'_1 + b \gamma'_2 + c \gamma'_3) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Továbbá, a gömbi mozgás 243. §-ában bevezetett $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, jelöléseket itt is megtartva, az (1) rendszerből:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= u_x + \omega_y z - \omega_z y, \\ v_y &= u_y + \omega_z x - \omega_x z, \\ v_z &= u_z + \omega_x y - \omega_y x, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Az A pont $v = v$ sebessége a (3) szerint két részből állónak tekinthető.

Az első rész az u , sebesség, melylyel a pontrendszernek O , -ben lévő pontja az álló rendszerhez képest mozog; ennek összetevői u_x, u_y, u_z ; mivel ez a sebesség a (2) szerint valamenynyi rendszerbeli pontra nézve közös, ez közös translációnak tekinthető.

A második rész az idézett 243. §. (3) szerint oly forgásból ered, mely-

nek tengelye az O , kezdetén megyen keresztül és szögsebességi vetületei ω_x , ω_y , ω_z , melyek a koordinátáktól függetlenek lévén, a rendszer minden pontjára nézve szintén ugyanazok.

Eszerint a (3) a pontrendszer mozgását egy közös u , translációból és egy az O -n átmenő tengely körüli forgásból állónak tekinthetni, hol a forgás tengelyének iránycosinusai az ω_x , ω_y , ω_z , componensekkel arányosak.

Jegyzet: Szorozva a (3) egyenleteit rendre ω_x -, ω_y -, ω_z -vel, ezek összege:

$$v_x \omega_x + v_y \omega_y + v_z \omega_z = u_x \omega_x + u_y \omega_y + u_z \omega_z, \quad (3a)$$

2. Ha a pontrendszer azon pontjait keressük, melyek sebességei a forgás tengelyével párhuzamosak, ezeket az általános:

$$v : v_x : v_y : v_z = \omega : \omega_x : \omega_y : \omega_z,$$

feltételekből nyerjük.

Jelelve ξ -, η -, ζ -val e pontok koordinátáit, a (3) szerint e feltételek:

$$\frac{v}{\omega} = \frac{u_x + \omega_y \zeta - \omega_z \eta}{\omega_x} = \frac{u_y + \omega_z \xi - \omega_x \zeta}{\omega_y} = \frac{u_z + \omega_x \eta - \omega_y \xi}{\omega_z} = \frac{v}{\omega}, \quad (4)$$

Ezek oly egyenes vonal egyenletei, mely, mint a megelőző §-ban, maga a csavarmozgás tengelye, hol ξ , η , ζ , ennek folyó koordinátái, és így az általános mozgás itt is viszsza van vezetve csavarmozgásra.

A megelőző és ezen §. (4) egyenletei ugyanazon csavartengely egyenleteit adják, de az előbbi az álló XYZ , az utóbbi pedig a mozgó X, Y, Z , tengelyrendszerre vonatkozólag.

Jegyzet: Itt is ezen tengelymenti pontokra nézve az $\omega_x = (v_x \omega) : v$, s i. t. összefüggések alapján:

$$v_x \omega_x + v_y \omega_y + v_z \omega_z = v \omega,$$

és így a (3a)-ból a (4) egyenlet $v : \omega$, része

$$\frac{v}{\omega} = \frac{u_x \omega_x + u_y \omega_y + u_z \omega_z}{\omega^2}, \quad (4a)$$

Az egyenlet a megelőző §. (4a) egyenletével egyenlő; de ebből sem következik általában, hogy a tengelymenti pontokra nézve $v = u$.

294. §. *A v és v, az u és u, sebességek és az ω és ω , szögsebességek összefüggése.*

Négyszetre emelve a megelőző két §§. (1) egyenleteit és tekintetbe véve az $\alpha_1 \dots \gamma_3$ cosinusok összefüggéseit, nyerjük:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2 \quad (1)$$

Négyszetre emelve a megelőző két §. (2) egyenleteit, ezekből:

$$\left. \begin{aligned} u^2 &= u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 = u^2 \\ u'^2 &= u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 = u'^2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Ezenkívül az $OO_1=l$ távolság:

$$l^2 = a^2 + b^2 + c^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \quad (3)$$

A megelőző két §. (3) egyenletei szerint az u a rendszer azon pontjának sebessége, mely a t időpillanatban az XYZ szilárd tengelyek O kezdetében van, míg az u , nem más, mint az X,Y,Z , rendszer O , pontjának sebessége az XYZ rendszerben. Ez a két sebesség általánosságban vére nem egyenlő.

Mivel az u , sebességnek vetületei az XYZ álló rendszerben a', b', c' , ellenben az u sebességét ugyanezen rendszerben a 292 §. (2) egyenletei jobb oldalai adják: a két sebesség egyirányú vetületeinek különbségei, tekintettel a 291. §. (1) és (2) rendszerei első csoportjaira rendre:

$$\left. \begin{aligned} u_x - a' &= a' - (a'_1\alpha_1 + b'_1\beta_1 + c'_1\gamma_1) = a_1\alpha'_1 + b_1\beta'_1 + c_1\gamma'_1 \\ u_y - b' &= b' - (a'_2\alpha_2 + b'_2\beta_2 + c'_2\gamma_2) = a_2\alpha'_2 + b_2\beta'_2 + c_2\gamma'_2 \\ u_z - c' &= c' - (a'_3\alpha_3 + b'_3\beta_3 + c'_3\gamma_3) = a_3\alpha'_3 + b_3\beta'_3 + c_3\gamma'_3 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Az egyenletek jobb oldalai általánosságban nem zérusok; ezért baloldali különbségeik sem enyésznek el.

Végre a gömbi mozgás 243. §-ának (5) egyenlete szerint:

$$\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \omega_1^2 \quad (5)$$

295. §. A momentán csavartengely geometriai helye. A szilárd és a mozgó tengelyfelületek (az axoidok) egyenletei.

1. A momentán tengely egyenletének egyszerű alakja az X,Y,Z , mozgó koordináta-rendszerben.

Kapcsoljuk össze a 293 §. (4) egyenletei elsőjét ugyane §. (4a) egyenletével; nyerjük:

$$\frac{u_x + \omega_y \zeta - \omega_z \eta}{\omega_x} = \frac{u_x \omega_x + u_y \omega_y + u_z \omega_z}{\omega^2},$$

vagy:

$$u_x + \omega_y \zeta - \omega_z \eta = \frac{1}{\omega^2} [u_x \omega_x^2 + u_y \omega_x \omega_y + u_z \omega_x \omega_z]; \text{ s i. t. } \quad (1)$$

A [] zárójeles kifejezéshez adva a

$$0 = u_x (\omega_y^2 + \omega_z^2) - u_x \omega_y^2 - u_x \omega_z^2 = 0$$

identitást és megjegyezve, hogy [294. §. (5)]

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \omega_1^2,$$

az (1)-ből:

$$u_x + \omega_y \zeta - \omega_z \eta = u_x + \frac{\omega_x u_y - \omega_y u_x}{\omega^2} \omega_y - \frac{\omega_z u_x - \omega_x u_z}{\omega^2} \omega_z; \text{ s i. t. } \quad (2)$$

A (2)-ben fellépő ξ , η , ζ , koordináták a momentán csavartengely pontjainak összszrendezői a pontrendszerrel együtt mozgó X,Y,Z , tengely-

rendszerben; a (2) egyenletek szerkezeténél fogva, *jobb* oldalakon az $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, mennyiségek szorzói szintén csak koordináták (hosszúságok) lehetnek; jelelve az utóbbiakat röviden ξ_1, η_1, ζ_1 -val, ezek értéke:

$$\xi_1 = \frac{\omega_y u_z - \omega_z u_y}{\omega_1^2}, \quad \eta_1 = \frac{\omega_z u_x - \omega_x u_z}{\omega_1^2}, \quad \zeta_1 = \frac{\omega_x u_y - \omega_y u_x}{\omega_1^2} \quad (3)$$

és így végre a (2)-ből:

$$\left. \begin{aligned} \omega_y \zeta_1 - \omega_z \eta_1 &= \omega_y \zeta_1 - \omega_z \eta_1 \\ \omega_z \xi_1 - \omega_x \zeta_1 &= \omega_z \xi_1 - \omega_x \zeta_1 \\ \omega_x \eta_1 - \omega_y \xi_1 &= \omega_x \eta_1 - \omega_y \xi_1 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

A (4) szerint a ξ_1, η_1, ζ_1 ugyanazon feltételeknek felelven meg, mint a ξ, η, ζ , a (ξ_1, η_1, ζ_1) pont szintén a momentán tengely pontja de helyzete a tengelyen nem tetszőleges, hanem a (3) értékek által meg van határozva.

Jelelje ϱ a tengely tetszőleges (ξ, η, ζ) pontjának távolságát a nevezett (ξ_1, η_1, ζ_1) ponttól; mivel e két pont a momentán tengelyen fekszik, ennek pedig az iránycosinusai $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ s i. t., rendre szabad írunk:

$$\xi = \xi_1 + \varrho \frac{\omega_x}{\omega}, \quad \eta = \eta_1 + \varrho \frac{\omega_y}{\omega}, \quad \zeta = \zeta_1 + \varrho \frac{\omega_z}{\omega} \quad (5)$$

Jegyzet. Mivel a (3) jobboldali részei az időtől függő alkotókból szerkesztvők, a ξ_1, η_1, ζ_1 is az időnek függvényei; de ez akként értelmezendő, hogy minden időpillanatnak a (3) szerint egy meghatározott (ξ_1, η_1, ζ_1) pont felel meg, mely pontok a merev pontrendszerben egy folytonos pontsorozatot (görbét) alkotnak; ellenben e pontoknak az elszállító X, Y, Z , rendszerre vonatkozó ξ_1, η_1, ζ_1 koordinátái ezen X, Y, Z , rendszerben az időben állandók, azaz a $\frac{d\xi_1}{dt}, \frac{d\eta_1}{dt}, \frac{d\zeta_1}{dt}$ sebességi összetevők mindig zérusok.

2. A szilárd tengelyfelület (alappfelület, szilárd aroid) egyenlete az álló XYZ koordináta-rendszerben.

Ha az (5) egyenleteit rendre szorozzuk $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ -el (az X tengelynek az X, Y, Z , tengelyekkel képezett szögeivel), összegejük:

$$\xi \alpha_1 + \eta \beta_1 + \zeta \gamma_1 = \xi_1 \alpha_1 + \eta_1 \beta_1 + \zeta_1 \gamma_1 + \frac{\varrho}{\omega} (\omega_x \alpha_1 + \omega_y \beta_1 + \omega_z \gamma_1); \text{ s i. t. } (5a)$$

Amde, az egyenletek bal oldalai a 291. §. (1) egyenletei szerint a $\xi - a, \eta - b, \zeta - c$ különbségek, hol ξ, η, ζ ugyanazon pont koordinátái az XYZ álló és ξ_1, η_1, ζ_1 ennek koordinátái az X, Y, Z , mozgó rendszerben; ezek pedig a 293. §. 2. pontja értelmében a momentán tengely folyó koordinátái.

Továbbá az (5a) zárójeles mennyisége nem más, mint az ω , vetülete az X tengelyre, mivel pedig a 294. §. (5) egyenlete szerint $\omega = \omega$, e vetület egyenlő ω_x -el; e szerint az (5a) egyenleteket írhatjuk:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a + \xi_1 \alpha_1 + \eta_1 \beta_1 + \zeta_1 \gamma_1 + \varrho \frac{\omega_x}{\omega} \\ \eta &= b + \xi_1 \alpha_2 + \eta_1 \beta_2 + \zeta_1 \gamma_2 + \varrho \frac{\omega_y}{\omega} \\ \zeta &= c + \xi_1 \alpha_3 + \eta_1 \beta_3 + \zeta_1 \gamma_3 + \varrho \frac{\omega_z}{\omega} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

A (6)-ban fellépő ω szögsebesség, ennek derékszögű összetevői, az $\alpha_1 \dots \gamma_3$ irányszögek, végre pedig a ξ_1, η_1, ζ_1 koordináták az 1. pont *Jegyzete* szerinti módon az időtől, és a ξ, η, ζ még a ϱ -tól is függenek; e szerint itt ξ, η, ζ a momentán tengely folyó koordinátái minden időpontra nézve a szilárd XYZ rendszerben.

Ha a (6) egyenleteiből a folyó időt és a ϱ távolságot elimináljuk, nyerünk egy összefüggést a ξ, η, ζ koordináták között:

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = 0, \dots \dots \dots (7)$$

mely a szilárd egyenesvonalú felület (*a szilárd tengelyfelület vagy axoid*) egyenlete az álló XYZ rendszerben.

3. *A mozgó tengelyfelület (gördülő és sikló axoid) egyenlete a szilárd ZYZ koordináta-rendszerben.*

Nagyon könnyű bebizonyítani, hogy a mozgó felület egyenletét valamely t_0 időpillanatra nézve akként nyerjük, hogy a (6) egyenleteiben (és bennük még az $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ -ben is) az $\alpha_1 \dots \gamma_3$ irányszögeknek ezen t_0 -ra vonatkozó értékeit írjuk és ezeket valamint a mozgó koordináták kezdetének a_0, b_0, c_0 koordinátáit változatlanoknak tekintjük.

Jelelve Ξ, H, Z -val az így származó koordináták értékeit, a (6) és az (5a) egyenleteiből:

$$\left. \begin{aligned} \Xi &= a_0 + \xi_1 \alpha_{1_0} + \eta_1 \beta_{1_0} + \zeta_1 \gamma_{1_0} + \frac{\varrho}{\omega} (\omega_x \alpha_{1_0} + \omega_y \beta_{1_0} + \omega_z \gamma_{1_0}), \\ H &= b_0 + \xi_1 \alpha_{2_0} + \eta_1 \beta_{2_0} + \zeta_1 \gamma_{2_0} + \frac{\varrho}{\omega} (\omega_x \alpha_{2_0} + \omega_y \beta_{2_0} + \omega_z \gamma_{2_0}), \\ Z &= c_0 + \xi_1 \alpha_{3_0} + \eta_1 \beta_{3_0} + \zeta_1 \gamma_{3_0} + \frac{\varrho}{\omega} (\omega_x \alpha_{3_0} + \omega_y \beta_{3_0} + \omega_z \gamma_{3_0}). \end{aligned} \right\} \dots \dots (8)$$

E formulák értelmezése nagyon egyszerű.

Bennük ugyanis a mozgó koordináta-tengelyek fekvése meghatározott és *állandó*-nak tekintendő, azaz e helyzet t_0 időpillanatra vonatkozik, ellenben a ξ_1, η_1, ζ_1 , az $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, és a ϱ mennyiségek ugyanazok, mint a (6) egyenletekben, azaz a folyó idő minden tetszőleges t pillanatára érvényesek.

E szerint a Ξ, H, Z jelentik a merev pontrendszer azon egyenesének koordinátáit (az álló XYZ rendszerre vonatkozólag), mely a t tetszőleges időben a pontrendszer momentán tengelye lesz vagy volt; de szigorúan megjegyzendő, hogy ezen Ξ, H, Z koordináták e tengely fekvését nem t -kor, hanem t_0 időpillanathoz adják meg.

Ez a (8) egyenletrendszer érvényes az egymásra következő valamennyi momentán tengelynek t_0 -ra vonatkozó helyzetére nézve.

Ha a (8)-ból a folyó időt és a ρ -t elimináljuk, nyerünk egy

$$\Phi(\Xi, H, Z) = 0 \quad (9)$$

alakú összefüggést, mely a mozgó egyenesvonalú felület (a mozgó tengelyfelület vagy axoid) egyenlete t_0 időpillanatban és az XYZ koordináta-rendszerre vonatkoztatva.*

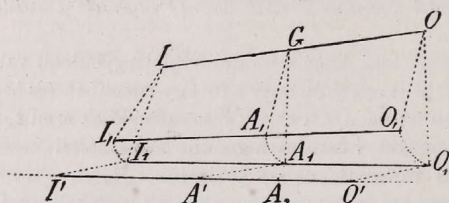
4. Ha a (6)- és a (8)-egyenleteknek az időtől függő részeiben $t=t_0$ -át írunk, akkor:

$$t=t_0: \quad \xi=\Xi, \quad \eta=H, \quad \zeta=Z \quad (10)$$

mely összefüggések értelmében a t_0 időpillanatban a (6) és (8) egy és ugyanazon egyenest képviselnek, mely itt az álló és a mozgó felület közös egyenes.

296. §. *A szilárd és a mozgó tengelyfelületeknek (az axoidoknak) a közös generatrix mentén közös érintő síkjaik vannak.*

A. Geometriai eljárás.



242. ábra.

Jelölje a t időpillanatban a momentán csavartengely (a közös generatrix) helyét IO (242. ábra); továbbá legyen $I'O'$ a szilárd, I, O , a mozgó felület azon két generatrixe, mely a $t+dt$ időkoraz $I'O'$ -ban egybeesik. Mindezen szomszédos

generatrixek egymással csak végtelen kicsiny szögeket képeznek; ezeknek csak rövid részeit mutatja a 242. ábra.

Ha be tudjuk bizonyítani, hogy a mozgó felületnek IOI, O , és a szilárd felületnek $IOI'O'$ végtelen rövid szalagaik helyzete és területe egymástól csak másod-, illetve harmadrendű kicsiny mennyiségekkel különböznek, akkor azt is bizonyítottuk, hogy e két rövid szalag síkjai közősek, azaz, hogy a két felületnek a közös IO generatrixen átmenő, ennek I pontjához tartozó OII , és OII' érintő síkjai egybeesnek.

Az I, O -t a momentán csavarmozgás értelmében, úgy vihetjük át az $I'O'$ -be, ha először IO körül elemi forgást létesítünk, miáltal I, O -t $I_1 O_1$ -be és A pontját A_1 -be hozzuk; ha másodszor a $I_1 O_1$ -nak az IO -hoz párhuzamos elemi translációt tulajdonítunk, miáltal $I_1 O_1$ -t az $I'O'$ -be és A_1 -t az A' -be hozzuk.

* Ha (6)-ban [505, 1.] ξ, η, ζ ismeretes, akkor belőlük adódik $\xi_1 = a_1 + \xi a_1 + \eta a_2 + \zeta a_3 + \rho \frac{\omega x}{\omega}$ s i. t. és a (7) vagy (9) mintájára nyerjük a mozgó egyenesvonalú felület egyenletét az elszállító koordináta-rendszerben.

Az A_1A' elemi (elsőrendű kicsiny) transláció az IO -val párhuzamos lévén, csak végtelen kis szöget képezhet a Δt idő múlva csavartengely gyanánt szereplő $I'O'$ vonallal, mert az IO és $I'O'$ tengelyek között dt időköz lévén, irányaik is csak elsőrendű végtelen kis szöggel térhetnek el egymástól.

E szerint az I_1O_1 és az $I'O'$ vonalak egymástól való A_1A_2 távolsága csak másodrendű (esetleg még magasabb rendű) kicsiny lehet.

Ugyanaz áll az A, A_1 ívre nézve is, mivel a GA , sugár elsőrendű kicsiny és a G melletti forgásszög szintén elsőrendű.

Az I, O , és az $I'O'$ vonalak egymástól való A, A_2 távolsága pedig az A, A_1 és A_1A_2 componensek geometriai összegéből állván, szintén csak másodrendű kicsiny lehet.

Ezek szerint az IOI, O , és az $IOI'O'$ felületszalagok, melyek közös oldala a végtelen rövid IO és melyek területe másodrendű kicsiny: egymástól felületre nézve csak harmadrendű, normálisuk irányaira nézve elsőrendű kicsiny menynyiségekkel különböznek, azaz hajlásszögük elsőrendű kicsiny. Ennek értelmében e két szalag helyzete és területe a megfelelő magasabb rendűek elhagyásával egybeesőnek tekinthető és így a két axoid-felületnek a közös IO generatrixen átmenő, ennek I pontjára vonatkozó OII , és OII' érintő síkjai közősek.

Ez áll a véges (vagy végtelen) hosszúságú közös generatrix minden pontjára nézve és így a két axoid az egész közös generatrix mentén egymással érintkezik, dacára annak, hogy a közös érintő sík helyzete e generatrix mentén különböző lehet. (V. ö. a 310. §. 3. pontját).

B. Analytikai eljárás.

Az alapfelület egyenleteiben [295. §. (6) és (7)] a t idő és a ϱ tekintendők független változóknak; legyenek ξ, η, ζ a $\varphi(\xi, \eta, \zeta)=0$ felület tetszőleges pontjának koordinátái, míg x_a, y_a, z_a e felülethez ezen (ξ, η, ζ) pontban húzott érintő sík tetszőleges pontjának folyó koordinátái; mind ezek a szilárd XYZ rendszerre vonatkoznak.

E sík egyenlete:

$$(x_a - \xi) \left(\frac{\partial \eta}{\partial \varrho} \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) + (y_a - \eta) \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial \xi}{\partial \varrho} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) + (z_a - \zeta) \left(\frac{\partial \xi}{\partial \varrho} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial \varrho} \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) = 0 \quad (1)$$

* Ezen formula igazolása igen egyszerű [Math. repertórium 100 §.].

Ha ugyanis u és v a GAUSS-féle felületi koordináták és rövidség kedvéért (mint ott):

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 = E^2; \quad \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 = G^2,$$

továbbá, ha $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, illetve $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ az $u=\text{const.}$, illetve $v=\text{const.}$ görbékhez húzott érintő egyenesek irányszögei, akkor [a Math. repertórium 79. §-a (2) és 100. §-a (3) formulája szerint]:

$$\cos \alpha_1 = \frac{\partial x}{\partial u} : \sqrt{E} \quad \text{s i. t.}; \quad \cos \alpha_2 = \frac{\partial x}{\partial v} : \sqrt{G} \quad \text{s i. t.}$$

Hasonló kifejezés áll mozgó felülethez húzott érintő síkra nézve.

A 295. §. (6) és (8) egyenleteiből rendre:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \rho} = \frac{\omega_x}{\omega} = \frac{\omega_x \alpha_1 + \omega_y \beta_1 + \omega_z \gamma_1}{\omega}; \quad \frac{\partial \Xi}{\partial \rho} = \frac{\omega_x \alpha_{10} + \omega_y \beta_{10} + \omega_z \gamma_{10}}{\omega}; \quad \text{s i. t. (2)}$$

Ha az egyenleteket és quotienseit $t=t_0$ -időre vonatkoztatjuk, akkor az idézett §. 3. és 4. pontja szerint:

$$t=t_0: \quad \left. \begin{aligned} \xi &= \Xi; & \eta &= H; & \zeta &= Z. \\ \frac{\partial \xi}{\partial \rho} &= \frac{\partial \Xi}{\partial \rho}; & \frac{\partial \eta}{\partial \rho} &= \frac{\partial H}{\partial \rho}; & \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} &= \frac{\partial Z}{\partial \rho} \end{aligned} \right\} \quad \dots (3)$$

A ξ , η , ζ és a Ξ , H , Z mennyiségeknek az idő szerint képezett quotiensei ugyancsak az idézett (6) és (8) egyenletekből adódnak; de ha ezen quotienseket a $t=t_0$ -időpontra vonatkoztatjuk, ezek csak annyiban fognak különbségeket mutatni, a mennyiben a (6) [és az (5a)] egyenletek szerint ezen utóbbiakba még az a , b , c koordináták és az α_1 , β_1 , γ_1 cosinusok quotiensei is lépnek, melyek itt *totális* quotiensek, mivel a nevezett mennyiségek csak az idő függvényei.

Nyerjük e szerint:

$$t=t_0\text{-kor:} \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \Xi}{\partial t} + \frac{da}{dt} + \xi_1 \frac{d\alpha_1}{dt} + \eta_1 \frac{d\beta_1}{dt} + \zeta_1 \frac{d\gamma_1}{dt} + \\ + \frac{\rho}{\omega} \left(\omega_x \frac{d\alpha_1}{dt} + \omega_y \frac{d\beta_1}{dt} + \omega_z \frac{d\gamma_1}{dt} \right); \quad \text{s i. t.}$$

Ámde a gömbi mozgásnál talált tétel szerint [244. §., (2₂)] a jobb-oldali zárójeles trinom mindig zérus.

Ha a 295. §. (6) egyenleteiben $\rho=0$ tétetik, ezek bal oldalai megadják a (ξ_1, η_1, ζ_1) pont koordinátáit a szilárd XYZ rendszerben; e koordináták csak az időtől függhetnek; jelelve ezeket ξ_0 -, η_0 -, ζ_0 -al, az idő szerint képezett quotienseik, tekintettel az idézett §. 1. pontjának *Jegyzetére*:

$$\frac{d\xi_0}{dt} = \frac{da}{dt} + \xi_1 \frac{d\alpha_1}{dt} + \eta_1 \frac{d\beta_1}{dt} + \zeta_1 \frac{d\gamma_1}{dt} \quad \text{s i. t.} \quad (4)$$

A felülethez húzott érintő sík normálisa merőleges mind az $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, mind az $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ irányra; ha ε e két irány képezte szög, akkor e normális iránycosinusai e szerint rendre [Math. repertórium 44. §. (3)]:

$$\frac{\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}}{\sin \varepsilon \sqrt{EG}}; \quad \frac{\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}}{\sin \varepsilon \sqrt{EG}}; \quad \frac{\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}}{\sin \varepsilon \sqrt{EG}}.$$

Ha ξ , η , ζ a felület (x, y, z) pontjához húzott érintő sík folyó koordinátái, akkor [a Math. repertórium 79. §-ának (7) formulája és] a most irt iránycosinusok értelmében ezen érintő sík egyenlete:

$$(\xi-x) \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right) + (\eta-y) \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) + (\zeta-z) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) = 0;$$

és ez a szövegben idézett egyenlet, csakhogy az e jegyzetben használt u és v ; x , y , z és ξ , η , ζ helyébe a szövegben ρ és t ; ξ , η , ζ és x_a , y_a , z_a lép.

és így:

$$t=t_0\text{-kor} \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \Xi}{\partial t} + \frac{d\xi_0}{dt}, \text{ s i. t. } \dots \dots \dots (5)$$

Az egyenletek könnyen értelmezhetők.

Jelelje ugyanis c_0 (vagy u) a (ξ_0, η_0, ζ_0) pont abszolút (a szilárd XYZ -re vonatkoztatott) sebességét; mivel pedig e pont a csavartengely egy pontja, sebessége csak e tengelyhez párhuzamos lehet, azaz a c_0 iránycosinusai a szilárd rendszerben

$$\frac{\omega_x}{\omega}, \quad \frac{\omega_y}{\omega}, \quad \frac{\omega_z}{\omega}.$$

E szerint a c_0 összetevői, tekintettel az ω_x -nek a jelen §. (2) egyenletében írt értékére:

$$\frac{d\xi_0}{dt} = c_0 \frac{\omega_x}{\omega} = \frac{c_0}{\omega} (\omega_x \alpha_1 + \omega_y \beta_1 + \omega_z \gamma_1); \text{ s i. t. } \dots \dots \dots (6)$$

E kifejezést $t=t_0$ időre vonatkoztatva a (2) és (3) szerint:

$$t=t_0: \quad \frac{d\xi_0}{dt} = c_0 \frac{\partial \Xi}{\partial \varrho} \dots \dots \dots (7)$$

és így az (5)-ből rendre:

$$t=t_0: \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \Xi}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \Xi}{\partial \varrho}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} + c_0 \frac{\partial H}{\partial \varrho}; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial t} + c_0 \frac{\partial Z}{\partial \varrho} \dots \dots \dots (8)$$

Ha most a (3) és a (8) egyenletek alapján az (1)-et Ξ -, H -, Z -val és differenciálquotiensseikkel kifejezzük, és megjegyezzük, hogy a (3)- és (8)-ból

$$\frac{\partial \eta}{\partial \varrho} \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \varrho} \frac{\partial Z}{\partial t} + c_0 \frac{\partial Z}{\partial \varrho} - \frac{\partial Z}{\partial \varrho} \left(\frac{\partial H}{\partial t} + c_0 \frac{\partial H}{\partial \varrho} \right) = \frac{\partial H}{\partial \varrho} \frac{\partial Z}{\partial t} - \frac{\partial Z}{\partial \varrho} \frac{\partial H}{\partial t}, \text{ s i. t.,}$$

vége az (1) egyenletből:

$$\left. \begin{aligned} (x_a - \Xi) \left(\frac{\partial H}{\partial \varrho} \frac{\partial Z}{\partial t} - \frac{\partial Z}{\partial \varrho} \frac{\partial H}{\partial t} \right) + (y_a - H) \left(\frac{\partial Z}{\partial \varrho} \frac{\partial \Xi}{\partial t} - \frac{\partial \Xi}{\partial \varrho} \frac{\partial Z}{\partial t} \right) + \\ + (z_a - Z) \left(\frac{\partial \Xi}{\partial \varrho} \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial \varrho} \frac{\partial \Xi}{\partial t} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

Ez pedig a $\Phi(\Xi, H, Z)=0$ alakú mozgó felülethez [295. §. (9)] húzott érintő sík egyenlete, mely e bebizonyítás értelmében a $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ felülethez húzott érintő sík (1) egyenletével $t=t_0$ -kor egybeesik.

E szerint az alapfelület és a mozgó felület $t=t_0$ időben nem csak közös generatrixszal, hanem ennek minden pontjában (mely mindkét felülethez tartozik) az ezekhez tartozó közös érintő síkokkal is bírnak. (V. ö. a 310. §. 3. pontját).

297. §. A momentán csavartengely mentén fekvő pontok sebessége.

A megelőző §. (6) egyenleteiben c_0 -al jelelt haladó sebességét könnyen fejezhetni ki a 292. §. és a 293. §. (4a) egyenleteiből, melyek a momentán tengely menti pontokra vonatkoznak.

Ha ezen pontok sebességét itt is c_0 -al jeleljük, és megjegyezzük, hogy a 294. §. (1) és (5) egyenletei szerint itt $v=c_0=v$; $\omega=\omega$, akkor a fent idézett egyenletekből:

$$\left. \begin{aligned} \frac{c_0}{\omega} &= \frac{v_x}{\omega_x} = \frac{v_y}{\omega_y} = \frac{v_z}{\omega_z} = \frac{u_x \omega_x + u_y \omega_y + u_z \omega_z}{\omega^2} = \frac{c_0}{\omega}; \\ \frac{c_0}{\omega_i} &= \frac{v_x}{\omega_x} = \frac{v_y}{\omega_y} = \frac{v_z}{\omega_z} = \frac{u_x \omega_x + u_y \omega_y + u_z \omega_z}{\omega_i^2} = \frac{c_0}{\omega_i}; \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

hol v_x, v_y, v_z , illetve v_x, v_y, v_z , a c_0 sebességnek componensei; e szerint

$$c_0 = \frac{u_x \omega_x + u_y \omega_y + u_z \omega_z}{\omega} = \frac{u_x \omega_x + u_y \omega_y + u_z \omega_z}{\omega_i} = c_0 \dots (2)$$

A c_0 sebesség csak akkor lehet zérus, ha a (2) számlálója az; akkor tekintettel a 292. §. (3a) összefüggésére, a pontrendszer valamenynyi pontjának sebessége a momentán forgás tengelyére merőleges és így a mozgó felület *gördül* az állón.

Ezen esetben a mozgás előtűntethető egy egyenesvonalú felületnek egy másik ily felületen való *gördülése* által. Az a speciális eset, hogy ez a két felület *kúp*, csak gömbi mozgásnál következik be, de ez a $c_0=0$ feltételből folyó eseteknek csak egyike (v. ö. a 310. §. 1. és 4. pontját).

298. §. *Coincidáló (egymást fedő) pontok és megfelelő görbék.* A görbék érintői általánosságban nem közösek, az általuk az egyenesvonalú felületeken határolt területek egyenlők.

Coincidáló (egymást fedő, vagy megfelelő) pontjai a két egyenesvonalú felületnek azok, melyek a mozgás folytán valamely időpillanatban egymást fedik; *megfelelő görbék* pedig olyanok, melyek a két felületen haladva, a közös generatrix valamely pontján mennek át és e mellett a

$$\psi(\varrho, t)=0 \dots (1)$$

tetszőleges összefüggésnek tesznek eleget; ρ alatt a 295. §. (5) egyenleteivel behozott távolságot, t alatt a folyó időt értve.

E szerint a görbékre nézve a ϱ és t közül csak az *egyik* a független változó, mely itt a t legyen.

1. Ekkor a 296. §. (8) egyenleteiben, melyek még mindig a $t=t_0$ időpontra vonatkoznak, az idő szerint képezett quotiensek *totalis* quotiensek lesznek s így ezen görbékre nézve az idézett egyenletek:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\xi}{dt} + c_0 \frac{\partial \xi}{\partial \varrho}; \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\eta}{dt} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial \varrho}; \quad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} + c_0 \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} \dots (2)$$

Ámde, a ξ, η, ζ a $t=t_0$ időpillanatban szintén a momentán csavartengely folyó koordinátái lévén, ezeknek partiális quotiensei a ϱ sze-

rint e tengely iránycosinusait adják [Math. repertórium 67. §. (3)], melyek itt $\omega_x : \omega$ s i. t.; e szerint:

$$d\xi = d\Xi + \frac{\omega_x}{\omega} c_0 dt; \quad d\eta = dH + \frac{\omega_y}{\omega} c_0 dt; \quad d\zeta = dZ + \frac{\omega_z}{\omega} c_0 dt \quad . \quad (2a)$$

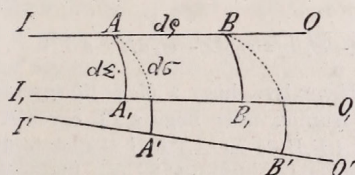
A görbéhez húzott érintők iránycosinusai [Math. repertórium 79. §. (3)] egymáshoz oly viszonyban állanak, mint ezen egyenesek ξ, η, ζ , illetve Ξ, H, Z coordinátáinak az idő szerint képezett quotiensei a közös pontban (azaz t_0 időben).

De a (2) értelmében ezek a megfelelő iránycosinusok általánosságban nem lehetnek egyenlők, és így a két görbe érintői a közös pontban is különböző irányúak. Ez annyit mond, hogy e görbékre nézve *met-szés van*, de *érintkezés és gördülés nincs*.

Ez áll minden megfelelő görbepárra nézve minden időpillanatban (243. ábra).

Jegyzet. Ha a momentán tengelyben lévő pontok sebessége zérus, $c_0=0$, akkor a (2) szerint a közös pontban a két görbe érintője is közös és egyszerű *gördülés* következik be (v. ö. a megelőző §. végét).

2. A megfelelő görbék a két felületen területeket határolnak, melyek egyenlő voltának bebizonyítására elegendő, ha kimutatjuk hogy két megfelelő felületi elem területei csak magasabb (harmad-)rendű menyyniségekkel különbözhetnek egymástól.



243. ábra.

Legyen (243. ábra) IO a közös generatrix, I, O , a mozgó, $I'O'$ a szilárd felületen fekvő azon két generatrix, mely dt idő múlva coincidál; legyen továbbá A és B az IO -nak egymástól $d\sigma$ távolságban lévő két pontja, melyeken át az $AA'=d\sigma$ és az $AA'=d\Sigma$, illetve a BB' és BB' , megfelelő görbék haladnak.

Bebizonyítjuk, hogy az $AA'B'B$ és az $AA'B'B$ elemek területe (harmadrendűek elhanyagolásával) egymással egyenlők.

Ezek az elemek első közelítésben egyenközényeknek tekinthetők, melyek közös alapvonala a $d\sigma$; területeik e szerint egyenlők, ha a két egyenközény magassága egyenlő, vagyis, ha:

$$d\sigma \sin(d\varphi, d\sigma) = d\Sigma \sin(d\varphi, d\Sigma),$$

vagy, ezen feltétel négyzetét írva, ha:

$$(d\sigma)^2 [1 - \cos^2(d\rho, d\sigma)] = (d\Sigma)^2 [1 - \cos^2(d\rho, d\Sigma)] \quad (3)$$

Az egyenlet $t=t_0$ időpillanatra vonatkozik.

a) A $d\sigma$ ívelem vetületei az XYZ tengelyekre $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ lévén és a $d\rho$ irányszögei a momentán csavartengelyeivel egybeesvén [295. §. (5)], iránykülönbségük cosinusai:

$$\cos(d\rho, d\sigma) = \frac{\omega_x}{\omega} \frac{d\xi}{d\sigma} + \frac{\omega_y}{\omega} \frac{d\eta}{d\sigma} + \frac{\omega_z}{\omega} \frac{d\zeta}{d\sigma}.$$

Ebből:

$$\begin{aligned} (d\sigma)^2 [1 - \cos^2(d\rho, d\sigma)] &= \omega^{-2} [\omega^2 (d\sigma)^2 - (\omega_x d\xi + \omega_y d\eta + \omega_z d\zeta)^2] = \\ &= \omega^{-2} \{ (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) [(d\xi)^2 + (d\eta)^2 + (d\zeta)^2] - (\omega_x d\xi + \omega_y d\eta + \omega_z d\zeta)^2 \}, \end{aligned}$$

azaz, sokszor alkalmazott transformációval (Math. repertórium 44. §. (2a)):

$$\begin{aligned} (d\sigma)^2 [1 - \cos^2(d\rho, d\sigma)] &= \omega^{-2} \{ (\omega_y d\zeta - \omega_z d\eta)^2 + \\ &+ (\omega_z d\xi - \omega_x d\zeta)^2 + (\omega_x d\eta - \omega_y d\xi)^2 \}. \end{aligned} \quad (4)$$

Ez az egyenlet szintén $t=t_0$ időpontra vonatkozik.

β) A (3) egyenlet jobb oldala a (4) mintája szerint transformálható és mivel a $d\rho$ a két elemre nézve közös:

$$\begin{aligned} (d\Sigma)^2 [1 - \cos^2(d\rho, d\Sigma)] &= \omega^{-2} \{ (\omega_y dZ - \omega_z dH)^2 + \\ &+ (\omega_z d\xi - \omega_x dZ)^2 + (\omega_x dH - \omega_y d\xi)^2 \}. \end{aligned} \quad (5)$$

Ez az összefüggés is $t=t_0$ -kor érvényes; de ekkor a (2a) egyenletek értelmében:

$$\omega_y d\xi - \omega_z d\eta = \omega_y dZ - \omega_z dH; \text{ s i. t. } \quad (6)$$

Evvel be van bizonyítva, hogy a (4) és (5) egyenletek baloldalainak is egyenlőknek kell lenniök, azaz, hogy a (3) egyenlet érvényes.

Ha pedig az AA, B, B és az $AA'B'B$ elemek területe egyenlő, akkor e 2. pont elején kimondott állításunk be van bizonyítva.

5. Kinematikai pólusok (fócusok) és poláris (focális) síkok. Conjugált egyenespárok. Egyenesvonalú felületek (axoidok).

299. §. *Oly pontok, melyek sebességei bizonyos adott irányhoz párhuzamosak, a momentán tengelyhez párhuzamos egyenesben fekszenek.*

A merev pontrendszer bármely A pontjának sebessége a 276. §. (2) formulái szerint a következő iránycosinusokkal bír:

$$\frac{v_x}{v} = - \frac{2\pi y}{\sqrt{m^2 + 4\pi^2 q^2}}; \quad \frac{v_y}{v} = + \frac{2\pi x}{\sqrt{m^2 + 4\pi^2 q^2}}; \quad \frac{v_z}{v} = \frac{m}{\sqrt{m^2 + 4\pi^2 q^2}}; \quad (1)$$

itt a Z -tengely a momentán forgás tengelye és m egy csavarmenet magassága, mely ugyanaz valamenynyi pontra nézve, míg $q^2 = x^2 + y^2$.

A sebesség *iránya* az oly pontokra nézve lesz ugyanaz, melyek számára a $v_z : v$ és a $v_y : v_x$ viszonyok ugyanazok, azaz, melyekre nézve (1) szerint a q és az $y : x$ viszony állandó.

Ezek a feltételek a Z -hez párhuzamos, tőle q távolságban lévő egyenes vonalat jelentenek.

300. §. *Kinematikai gyújtópont (fócus) vagy pólus vagy zérus-pont; focális vagy poláris vagy zérus-sík. A characteristika.*

1. Vegyük tekintetbe a merev rendszer oly pontjait, melyek egy síkban fekszenek; keressük ezek közül azokat ki, melyek sebességei e síkra merőlegesek.

A megelőző §. tétele szerint a rendszer azon pontjai, melyek sebességei egy bizonyos irányhoz párhuzamosak, a csavartengelyhez párhuzamos egyenesben feküdvén, a szóban forgó, keresendő síkbeli pont vagy pontok is a momentán csavartengelyhez párhuzamos egyenesben fekszik, illetve fekszenek; de ez az egyenes a síkot csak *egy* pontban metszheti; ezért e metszőpont a keresett pont.

Evvel ki van mutatva, hogy a síknak csak egyetlen egy pontja van, melynek sebessége magára e síkra merőleges.

E pont a síknak *kinematikai fócusa* vagy *pólusa* (vagy *zérus-pontja*), a sík pedig ezen pontnak *focális* vagy *poláris síkja* (vagy *zérus-síkja*).

2. A tetszőleges (x, y, z) pont *poláris síkjának* jellemzője az, hogy normálisa e pont sebességébe esik; ha x_1, y_1, z_1 e sík folyó coordinátái, akkor egyenlete [Math. repertórium 79. §. (7)] :

$$v_x(x-x_1) + v_y(y-y_1) + v_z(z-z_1) = 0, \quad \dots \quad (1)$$

vagy, ha Z egyszersmind a csavartengely, ω a forgás szögsebessége és c_0 a transláció sebessége: [276. §. (2)] :

$$-\omega(x-x_1)y + \omega(y-y_1)x + c_0(z-z_1) = 0,$$

azaz :

$$(x_1y - y_1x)\omega + c_0(z-z_1) = 0 \quad \dots \quad (2)$$

3. Jeleljék λ, μ, ν a merev rendszerben lévő tetszőleges sík normálisának iránycosinusait és x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 e sík A_1 és A_2 pontjainak coordinátáit; ekkor mivel A_1A_2 merőleges e normálisra:

$$\lambda(x_2-x_1) + \mu(y_2-y_1) + \nu(z_2-z_1) = 0 \quad \dots \quad (3)$$

Az A_1 pont v_1 sebességének összetevői, ha Z a momentán csavartengely (i. h.):

$$-\omega y_1, \quad +\omega x_1, \quad c_0.$$

Ha a v_0 nem merőleges az A_0A -ra, akkor A -ban ez a v_0 sem merőleges az egyenesre, azaz, ennek van az A_0A mentén egyösszetevője és így a v eredő egyetlen egy A pontban sem lehet merőleges az A_0A egyenesre.

Evvel a fent kimondott tételt bebizonyítottuk.

2. *Ha a merev rendszer valamely síkjában fekvő egy egyenese merőleges egyik pontjának sebességére, akkor az egyenes ezen sík pólusán megyen át.*

A megelőző tétel szerint ezen egyenes egyszersmind valamenynyi pontjának sebességeire merőleges; de áll az is, hogy ekkor ezek a sebességek általánosságban véve (244. ábra) nem párhuzamosak egymáshoz, hanem oly síkokban fekszenek, melyek mind az A_0A vonalra merőlegesek.

Az A pont v sebességének iránya annál közelebb jut az AA_0O sík normálisához, minél nagyobb v_∞ , azaz minél távolabb az A az A_0 -tól; ha A végtelen távolságban van tőle, a v iránya egybeesik e normálissal.

Az egyenesnek, az A_0 pontjától számított, másik oldalán fekvő B pontjának sebességi iránya szintén vég nélkül közeledik az AA_0O sík normálisához. ha B az A_0 -tól végtelen nagy távolságba jut, de iránya ellentett az előbbi határirányhoz képest.

E szerint ezen esetben a végnélküli AB egyenes vonal pontjainak sebességei mind párhuzamosak ezen egyenes normális síkjához, de két, egymással π szöget képező határirány között fekszenek.

Ezt tartva szemmel, bármily síkban is feküdjék az AB , pontjai egyikének a sebessége *mindenesetre* egybeesik ezen sík normálisával és e pont egyszersmind ezen sík pólusa, miáltal a fent kimondott állításunk be van bizonyítva.

3. *Azon egyenesek geometriai helye, melyek egy P ponton keresztül haladva, egyszersmind saját pontjaik sebességeire merőlegesek, ezen P pont focális (poláris) síkja.*

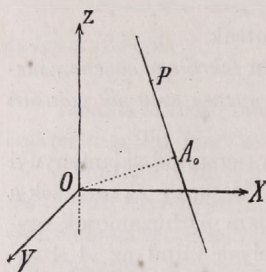
A közös P metszőpont az 1. tétel szerint oly sebességgel bír, mely a nevezett egyenesek mindegyikére merőleges; a 2. tétel szerint ez egyenesek csak oly síkban feküdhetnek, melynek pólusa a P .

Két ily egyenes megadja a pólus helyét a síkban.

4. *Ha a merev rendszer két síkjának metszővonala az egyik síknak pólusán halad keresztül, akkor a másik sík pólusa szintén ezen metszővonalban fekszik.*

Legyen MN a két sík metszővonala, P_1 és P_2 pólusaik. Ha P_1 az MN -en fekszik, akkor a pólus definitiója szerint, MN a P_1 sebességére merőleges. De ekkor az 1. tétel szerint az MN egyszersmind merőleges valamenynyi pontjának sebességére.

Mivel pedig az MN a másik síkhoz is tartozik, a 2. tétel értelmében ez az egyenes még ezen síknak pólusát is, P_2 -öt tartalmazza, és így állításunk le van bizonyítva.



245. ábra.

302. §. *Valamely egyenes mentén fekvő pólusok polársíkjaianak egymáshoz való hajlása.*

1. Az x, y, z öszszrendezőjű P pont valamely egyenes mentén fekszen, melynek α, β, γ az iránycosinusai és melynek az OZ -től legkisebb távolság A_0 , pontja x_0, y_0, z_0 coordinátákkal bírjon, míg e legkisebb távolság O kezdőpontját a coordináta-rendszer kezdetének választjuk. (245. ábra).

Az A_0P távolsággal, az α, β, γ és az x_0, y_0, z_0 menynyiségekkel a P pont coordinátái azonnal kifejezhetők:

$$x - x_0 = A_0P \cdot \alpha; \quad y - y_0 = A_0P \cdot \beta; \quad z - z_0 = A_0P \cdot \gamma \quad (1)$$

Ha Z a momentán csavarmozgás tengelye, ω szögsebessége, c_0 tengelymenti sebessége, akkor a P pont sebességének négyzete és polársíkja normálisának, azaz magának a sebességnek iránycosinusai [300. §. 2. pontja]:

$$\left. \begin{aligned} v^2 &= (x^2 + y^2) \omega^2 + c_0^2; \\ -\frac{y\omega}{v}, \quad +\frac{x\omega}{v}, \quad +\frac{c_0}{v} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Ellenben az A_0 pontra nézve e sebesség négyzete és polársíkja normálisának (azaz e sebességnek) iránycosinusai:

$$\left. \begin{aligned} v_0^2 &= (x_0^2 + y_0^2) \omega^2 + c_0^2; \\ -\frac{y_0\omega}{v_0}, \quad +\frac{x_0\omega}{v_0}, \quad +\frac{c_0}{v_0} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2_0)$$

2. Jelelje χ a szöget, melyet az A_0 és az A pontok focális (polár-) síkjai (vagy ezek normálisai) egymással képeznek; a (2) és (2₀) iránycosinusaiból nyerjük [Math. repertórium 44. §. (2a)]:

$$\left. \begin{aligned} v v_0 \sin \chi &= [(x_0 \omega - x_0 c_0)^2 + (c_0 y_0 \omega - c_0 y \omega)^2 + (y x_0 \omega^2 - x y_0 \omega^2)^2]^{\frac{1}{2}} \\ v v_0 \cos \chi &= [y y_0 \omega^2 + x x_0 \omega^2 + c_0^2] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Eliminálva az (1) segítségével az x, y, z -t, a (3)-ból

$$\begin{aligned} v v_0 \sin \chi &= \omega [(\overline{A_0P} \cdot \alpha \cdot c_0)^2 + (\overline{A_0P} \cdot \beta \cdot c_0)^2 + (\overline{A_0P} \cdot \omega)^2 (y_0 \alpha - x_0 \beta)^2]^{\frac{1}{2}} \\ v v_0 \cos \chi &= [(x_0^2 + y_0^2) \omega^2 + c_0^2 + \overline{A_0P} \cdot (x_0 \alpha + y_0 \beta)]. \end{aligned}$$

Ezekből:

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{\omega [c_0^2 (\alpha^2 + \beta^2) + \omega^2 (\alpha y_0 - \beta x_0)^2]^{\frac{1}{2}} \overline{A_0P}}{v_0^2 + (\alpha x_0 + \beta y_0) \overline{A_0P}} \quad (4)$$

E kifejezésben, egy és ugyanazon momentán csavarmozgásnál, ha P a merev rendszer valamely (az $x_0, y_0, z_0; \alpha, \beta, \gamma$ menynyiségekkel)

meghatározott A_0P egyenesben van, akkor csak $\overline{A_0P}$ távolság a változó és a (4)-et szabad írunk:

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{g_1 \overline{A_0P}}{g_0 + g_2 \overline{A_0P}} \dots \dots \dots (5)$$

hol g_0, g_1, g_2 állandó paramétereknek tekintendők és így az A_0 és P polársíkjainak χ hajlásszöge az $\overline{A_0P}$ függvénye gyanánt van kifejezve.

303. §. A conjugált egyenesekről. Alaptulajdonságaik.

Vegyük a merev rendszer két síkját, S_1 -et és S_2 -öt tekintetbe, melyek metszővonala EE ; legyenek pólusai (fócusai) P_1 és P_2 és EE az ezeket egybekapcsoló egyenes (246. ábra).

1. Fektesünk az EE egyenesen át síkokat, melyek az EE -t p_1, p_2, \dots -ben metszik; bizonyítjuk, hogy a p_1, p_2, \dots pontok a $P_1P_1P_2, P_1P_2P_2, P_1P_3P_2, \dots$ síkok pólusai (fócusai).

Ugyanis az S_1 és a $P_1P_1P_2$ síkok metszővonala, a P_1p_1 az egyik síknak, S_1 -nek P_1 pólusát tartalmazza; a 301. §. 4. tétele szerint ezen egyenes a másik síknak, $P_1P_1P_2$ -nek is a pólusát tartalmazza.

Továbbá: az S_2 és a $P_1P_1P_2$ síkok metszővonala, a P_2p_1 az egyik síknak, S_2 -nek P_2 pólusát tartalmazza; a 301. §. 4. tétele szerint ez az egyenes még a másik síknak, $P_1P_1P_2$ -nek is a pólusát fogja tartalmazni.

Ezek szerint a $P_1P_1P_2$ sík pólusa a P_1p_1 és a P_2p_1 egyeneseken egyszerre tartozik lenni, azaz p_1 metszőpontjuk e sík keresett pólusa.

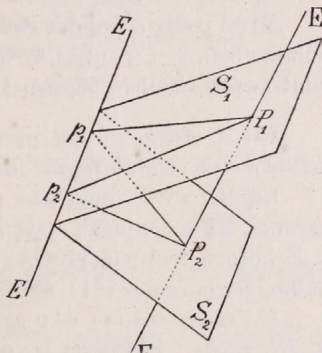
Épen így p_2 a $P_1P_2P_2$ sík pólusa, s í. t.

2. Most ezt az eredményt általánosítani fogjuk.

Fektesünk az EE -n keresztül (246. ábra) tetszőleges S síkot; akkor ez a sík valamenynyi $P_1P_1P_2, P_1P_2P_2, \dots$ síkok p_1, p_2, \dots pólusait fogja tartalmazni; de akkor ezen tetszőleges S síknak P pólusa is a nevezett $P_1P_1P_2, P_1P_2P_2, \dots$ síkoknak az S -el való p_1P, p_2P, \dots metsző vonalain, azaz a nevezett síkokban van, és így e sík pólusa csakis az utóbbi síkok közös metszővonalaiban, az EE egyenesben lehet.

E szerint a következő tételt nyerjük:

Valamely EE egyenesen áthaladó valamenynyi sík pólusai egy meghatározott másik EE egyenesen vannak és megfordítva:



246. ábra.

Valamely EE egyenesen áthaladó valamenynyi sík pólusai egy meghatározott másik EE egyenesen fekszenek.

Az eképen egybekapcsolt EE és EE vonalak *conjugált egyenesek*.

3. *Speciális eset.* Ha adva van A_1B_1 és A_2B_2 két egyenes, mely egymást D pontban metszi, akkor könnyű bebizonyítani, hogy conjugált egyenseik a D pont focális (poláris) síkjában fekszenek.

Legyen A_1B_1 , illetve A_2B_2 az A_1B_1 -, illetve A_2B_2 -hez tartozó conjugált két egyenes; akkor a 2. pont tétele szerint minden sík, mely A_1B_1 -en átmegy, az A_1B_1 -vel való metszéspontban bírja pólusát; e szerint, mivel D az A_1B_1 -ben fekszik, az A_1B_1 -en és D -n átmenő sík fócusa D .

Épen így az A_2B_2 -ön és a D -n átmenő sík pólusa szintén a D .

Mivel pedig a D pont csak *egy* síknak (focális síkjának) lehet a pólusa (300. §. 1. pontja), következik, hogy az A_1B_1 és az A_2B_2 a D pont focális síkjában fekszenek.

304. §. *Adva van egy egyenes, fejeztessék ki conjugált egyenesének helyzete a momentán forgás jellemzői által.*

Legyen a Z -k tengelye a momentán csavartengely, EE az adott egyenes, EE a conjugált egyenese; az X -tengelyt fektessük az EE és a Z közötti legrövidebb OA_0 távolba és így az YZ sík az EE vonalhoz párhuzamos (247. ábra).

1. Legyen $OA_0 = a$ és γ az EE és a Z -k tengelye által bezárt szög; az EE egyenes tetszőleges (x, y, z) összszerendezőjű A pontjára nézve áll:

$$x = a, \quad y = z \operatorname{tg} \gamma.$$

E szerint ezen A pont focálisíkjának egyenlete a 300. §. (2) egyenletéből:

$$(ay_1 - zx_1 \operatorname{tg} \gamma) \omega + (z_1 - z) c_0 = 0; \quad \dots \quad (1)$$

E focálisík (a 303. §. 2. pontja szerint) mindig átmegy a keresett, conjugált EE egyenesen, bármilyen is legyen az A helyzete az EE egyenesen, azaz, bármilyen is legyen a z változó értéke.

2. Ha e szerint az (1) egyenletet függetlennek tekintjük a z -től, és x_1, y_1, z_1 helyébe ξ -t, η -t, ζ -t írunk, a következő két kifejezést nyerjük:

$$a\omega\eta + c_0\zeta = 0; \quad \omega\xi \operatorname{tg} \gamma + c_0 = 0; \quad \dots \quad (2)$$

ezek pedig azon egyenesnek egyenletei, melyben egymást valamenynyi az (1) által képviselt síkok metszik, azaz ezek keresett EE egyenes egyenletei.

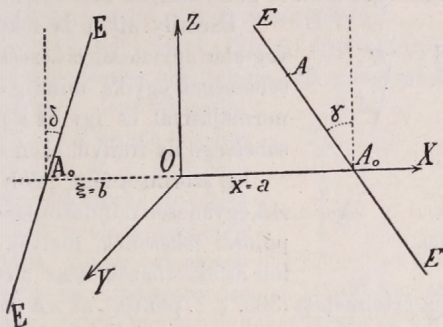
A (2) egyenletek elseje szerint ez az EE egyenes metszi az X tengelyt, és mivel ξ coordinátája állandó, az EE merőleges e tengelyre; leszen $\xi = b$, és

$$OA_0 = \xi = b = -\frac{c_0}{\omega \operatorname{tg} \gamma}; \quad \frac{\eta}{\zeta} = \operatorname{tg} \delta = -\frac{c_0}{a\omega}, \quad \dots \quad (3)$$

hol δ az EE vonal és a Z között lévő szög (247. ábra).

E szerint itt az **EE** vonal is az YZ -hez párhuzamos síkban fekszik és így az X tengelyben fekvő $A_0A_0=a+b$ hosszúság az **EE** és **EE** vonalak közötti legrövidebb távolság, mely a momentán csavartengelyt derékszög alatt metszi.

3. *Speciális esetek.* Ha az **EE** vonal a momentán csavartengelyen megyen keresztül, azaz, ha $a=0$, akkor (3) szerint az **EE** az Y tengelyhez párhuzamos.



247. ábra.

Ha az **EE** a momentán tengelyhez párhuzamos, azaz, ha $\gamma=0$, akkor (3) szerint **EE** végtelen távolba jut.

Végre, ha a mozgás egyszerű transláció, azaz, ha $\omega=0$, az **EE** az Y -hoz párhuzamos és végtelen távolba jut.

305. §. *Tételek a conjugált egyenesekről. Conjugált egyenesek párhajai.*

1. *Két conjugált egyeneset egybekapcsoló bármily egyenes merőleges valamenynyi pontjának sebességére.*

Legyen (248. ábra) **EE** és **EE** a két conjugált egyenes, **AA** ezek tetszőleges két pontját egybekapcsoló egyenes. Az **EA** sík pólusa a 303. §. 2. pontjának definitiója szerint az A pont; e szerint ezen sík és így az **AA** egyenes is merőleges az A pont sebességére; ebből folyólag a 301. §. 1. tétele szerint, az **AA** vonal merőleges valamenynyi pontjának sebességére.

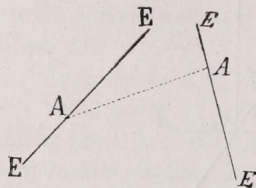
2. *Ha valamely egyenes, mely valamenynyi pontjának sebességére merőleges, a conjugált egyenesek egyikét metszi, akkor a másikat is kénytelen metszeni.*

Az **AA** egyenes (248. ábra) saját pontjai sebességeire legyen merőleges és A -ban messe a conjugált egyenesek egyikét; ámde az **EE**-n és **AA**-n átfektetett sík pólusa nem más, mint e síknak az **EE** conjugált egyenessel való A metszéspontja, de e pólusnak a 301. §. 2. tétele szerint

egyszersmind az AA egyenesen kell feküdnie és így AA kénytelen az EE -t is metszeni.

3. Ha valamely egyenes valamenynyi vagy csak egy pontjának sebességére normális, akkor önmagának a conjugáltja.

Legyen AA ily egyenes (248. ábra), melynek iránya valamenynyi pontjának sebességére merőleges, akkor, a 301. §. 2. pontja és az 244. ábra szerint e sebességek mind az AA -ra merőlegesek ugyan, de π szögnyi különbséget mutató határirányok között fekszenek.



248. ábra.

Bármily síkot is fektessünk az AA végtelen egyenesen is keresztül: a nevezett sebességek egyike mindig egybeesik e sík normálisával és így az a pont, melynek sebessége ily irányú, ezen sík pólusa.

E szerint a fent jelölt tulajdonságú AA egyenesen mindazon síkok kinematikai pólusai fekszenek, melyek az AA vonalon átfektethetők, azaz a conjugált egyenesek definitiója értelmében (303. §. 2. pontja), az AA önmagához conjugált egyenes. A 301. §. 1. tétele szerint elegendő, ha az egyenes csak egy pontjának sebességére merőleges, hogy önmagának conjugáltja legyen.

4. Két conjugált egyenest egybekapcsoló bármily egyenes önmagához conjugált egyenes.

Ez a tétel közvetlenül e §. 3. és 1. tételeiből folyik.

5. Valamely EE egyenes pontjai pályaelemeinek normális síkjai az EE conjugált egyenesben metszik egymást.

Az 1. pont taglalása szerint az EEA sík pólusa az A pont, ez annyit mond, hogy az A pont sebessége az EEA síkra merőleges, azaz, hogy az EEA sík az A pont sebességére és így pályaelemére is merőleges normális sík.

E megfontolás fennáll, ha A helyébe az EE egyenes bármily más B s i. t. pontját is vesszük tekintetbe; az EEA , EBB , ... síkok közös metszővonala az EE vonal. E szerint valamely EE egyenes vonal minden egyes pontjának pályaelemére merőleges normális síkok egymást az EE -hez conjugált EE egyenesben metszik.

6. Valamely EE egyenes elemi mozgása mindig visszavezethető az EE conjugált egyenes körüli forgásra.

Ha az EE egyenes, (248. ábra) elemi elmozdulását keressük, észreveszünk, hogy mozgása csak úgy történhetik, ha valamenynyi A pontja, saját sebessége mentén elemi pályáivet fut be. Az 5. pontból azonnal kitűnik, hogy az EE körüli bármily elemi forgás folytán vala-

menynyi A, \dots pont a mindenkori EA, \dots síkra merőleges elmozdulást nyert és így valóban az EE körüli elemi forgás helyettesíti a merev EE egyenes általános, elemi elmozdulását. A tétel megfordítva is áll.

Ez CHASLES tétele, melyet itt a conjugált egyenesek sajátságaiából vezettünk le (v. ö. a 277. §-ot).

306. §. Az egyenesvonalú felületek néhány sajátságai, származtatva a generatrix-egyenesnek általános mozgásából.

Az egyenesvonalú felületeket (275. §.) úgy tekintjük, mint a melyek a generatrix-egyenesnek legáltalánosabb mozgásából keletkeznek.

Az EE generatrix elemi elmozdulása közben (248. ábra) ennek minden pontja oly ívelemeket ír le, melyek a nevezett felületben fekszenek; továbbá a megelőző 305. §. 5. tétele szerint ezen ívelemek normális síkjai valamenynyien tartalmazzák az EE -hez conjugált EE egyeneset.

1. Az EE generatrix pontjai pályaelemeihez húzott érintők (sebességek) valamenynyien merőlegesek az EE conjugált egyeneshez és hyperbolás paraboloidot alkotnak (249a. ábra).

a. Mivel CHASLES tétele szerint (megelőző §. 6. tétele) az EE elemi elmozdulása az EE körüli elemi forgással egyenértékű, az EE pontjainak sebességei, azaz ívelemei érintőinek irányai az EE -hez merőleges síkokban fekszenek és így a tétel első része be van bizonyítva.

b. A tétel második része az analitikai geometria ismeretes tétele, melyet itt (csak álló XYZ rendszerre vonatkozólag) röviden bebizonyítottunk.

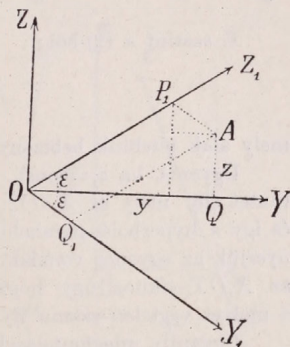
A hyperbolás paraboloid egyenlete [Math. repertórium 102. §. 123. lap]:

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{2x}{p} = 0. \quad (1)$$

Vezessünk be oly ferdeszögű koordináta-rendszert, melynek a rajz síkjára merőleges X_1 tengelye egybeesik az X tengellyel, míg Y_1 és Z_1 tengelyei az X_1 -re merőlegesek ugyan, de egymással 2ε szöveget képeznek és az Y tengely az $Y_1OZ_1=2\varepsilon$ szöveget felezi (249. ábra).

Ekkor $Q_1A=z_1$, $OQ_1=P_1A=y_1$ és az ábra szerint:

$$x=x_1; \quad OQ=y=(y_1+z_1) \cos \varepsilon; \quad QA=z=-(y_1-z_1) \sin \varepsilon.$$



249. ábra.

E szerint az (1) írható:

$$\frac{(y_1 + z_1)^2 \cos^2 \varepsilon}{b^2} - \frac{(y_1 - z_1)^2 \sin^2 \varepsilon}{c^2} = \frac{2x_1}{p}; \quad \text{azaz kifejtve:}$$

$$y_1^2 \left(\frac{\cos^2 \varepsilon}{b^2} - \frac{\sin^2 \varepsilon}{c^2} \right) + 2y_1 z_1 \left(\frac{\cos^2 \varepsilon}{b^2} + \frac{\sin^2 \varepsilon}{c^2} \right) + z_1^2 \left(\frac{\cos^2 \varepsilon}{b^2} - \frac{\sin^2 \varepsilon}{c^2} \right) = \frac{2x_1}{p} \quad (2)$$

Válaszszuk most az eddig tetszőleges ε szöget akként, hogy álljon:

$$\frac{\cos^2 \varepsilon}{\sin^2 \varepsilon} = \frac{b^2}{c^2}; \quad \text{azaz rendre } \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{c}{b}, \quad \cos \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon}} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}};$$

$$\frac{\cos^2 \varepsilon}{b^2} - \frac{\sin^2 \varepsilon}{c^2} = 0; \quad \frac{\cos^2 \varepsilon}{b^2} + \frac{\sin^2 \varepsilon}{c^2} = 2 \frac{\cos^2 \varepsilon}{b^2} = 2 \frac{b^2}{b^2 + c^2} \cdot \frac{1}{b^2} = \frac{2}{b^2 + c^2}.$$

E szerint a (2)-ből:

$$\frac{4y_1 z_1}{b^2 + c^2} = \frac{2x_1}{p}, \quad \dots \dots \dots (3)$$

mely alak tételünk bebizonyítására igen alkalmas.

Ugyanis, ha $z_1 = \text{const.}$, akkor a (3) egyenlet oly egyenes vonalat tüntet elő, mely az $X_1 O Y_1$ síkhoz párhuzamos s a Z_1 tengelyt metszi és így a hyperbolás paraboloidot a $z_1 = \text{const.}$ síkok sorozata által metszve, nyerjük az egyenes vonalak egész seregét, melyek mind párhuzamosak az $X_1 O Y_1$ -síkhöz, úgy, hogy magát e felületet is úgy tekinthetjük, mint a melyet végtelen számú ily egyenes alkot.

Ugyanily megfontolások érvényesek az $y_1 = \text{const.}$ síkok metszései által létesített egyenesekre nézve, melyek mind az $X_1 O Z_1$ síkhoz párhuzamosak és az Y_1 tengelyt metszik.

Evvel a fent kimondott tétel be van bizonyítva; azt a tételt pedig, hogy ezen egyenesek egyik rendszerének bármely egyenese metszi a másik rendszer valamennyi egyenesét, a 307. §. eljárásával, könnyen bizonyíthatni be. A 249a. ábra mutat ily hyperbolás paraboloid-felületet.

[Ha az EE mozgása az EE egyenesen átmenő valamely síkban történik, akkor a 199. §. 1. feladatának eredménye érvényes.]

2. Az egyenesvonalú felület tetszőleges EE egyenese mentén levő pontokból a felületre emelt normálisak szintén egy hyperbolás paraboloidon fekszenek.

Mivel e normálisak mind egyszersmind merőlegesek az EE -re, ezek az EE -re normális síkhoz párhuzamosan fekszenek és így a megelőző tétel szerint szintén hyperbolás paraboloidot alkotnak.

3. Az egyenesvonalú felület normálisa merőleges a generatrixre és metszi conjugált egyenesét.

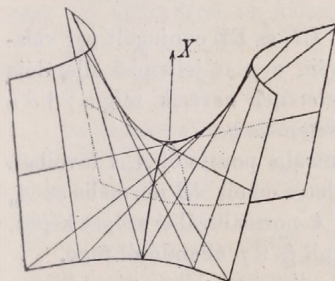
Legyen (250. ábra) A az EE tetszőleges pontja és emeljünk az A ponton keresztül az EE -re egy normális síkot, mely B -ben messe az EE -hez conjugált EE -t.

Az EE által leírt felülethez, az A pontban húzott érintősíknak mindenestre tartalmaznia kell az EE generatrixet és az A pont sebességének irányát; ámde ez utóbbi mindig merőleges az EBA síkra (305. §. 5. tétele) és így az AB , mely mind az EE -re, mind e sebességre merőleges, ezen érintő sík normálisába esik.

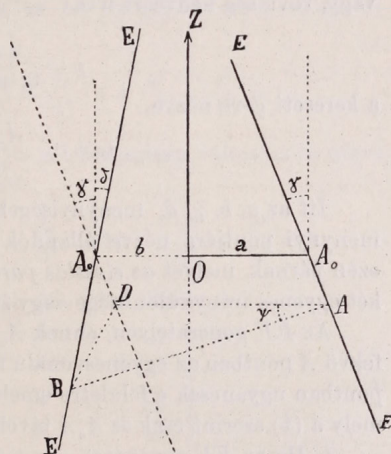
E szerint a felület normálisát az A pontban nyerjük, ha A -ból az EE generatrixre oly normálist húzunk, hogy ez a conjugált EE -t messe.

4. Az EE generatrix centrális pontja, centrális síkja. A keresztező szög és az eloszlás paramétere.

Legyen EE és EE a conjugált egyenespár (250. ábra), A_0A_0 a két egyenesre közösen merőleges egyenes és OZ a momentán csavartengely. Az A_0 az EE generatrix centrális pontja és az EA_0A_0 sík centrális síkja (284. §. 4. pontja).



249a. ábra.



250. ábra.

Az A_0A_0 egyenes a 304. §. 2. pontja szerint még az OZ -re is merőleges és ezenkívül, a megelőző tétel értelmében, egyszersmind az egyenesvonalú a felület normálisa is az A_0 pontban.

Ez az A_0A_0 normális a tetszőleges A -ban a felületre emelt AB normálissal ψ szöget képez, azaz, ψ az A pontban a felülethez húzott érintősík hajlása a centrális síkhoz, mely könnyen határozható meg.

a. Egészítsük ugyanis ki az A_0A_0 és A_0A egyeneseket az A_0A_0DA parallelogrammá; ekkor a BD egyenes, mely az EE -re merőleges ABD síkban fekszik, merőlegesnek tartozik lenni az A_0D -re, illetve az ehhez párhuzamos EE -re. Ezenkívül, mivel a megelőzők szerint az EE és az EE egyenesek az A_0A_0 -ra és így a DA -ra is merőleges síkokban fekszenek, mivel még A_0D az A_0A -hoz párhuzamos, azért

az $\mathbf{A}_0\mathbf{BD}$ síkja merőleges a \mathbf{DA} -ra és így e sík \mathbf{BD} egyenesre is merőleges \mathbf{DA} -ra.

A $\mathbf{BA}_0\mathbf{D}$ és \mathbf{BAD} háromszögek az előbbieket szerint a \mathbf{D} csúcsnál derékszögűek; a $\mathbf{BA}_0\mathbf{D}$ az \mathbf{EE} és \mathbf{EE} két egyenes legrövidebb távolságára merőleges $\mathbf{BA}_0\mathbf{D}$ síkban fekszik; ellenben a \mathbf{BAD} e síkra merőleges és \mathbf{BD} közös oldaluk, melyre nézve áll:

$$\mathbf{BD} = \overline{\mathbf{A}_0\mathbf{D}} \cdot \operatorname{tg}(\gamma + \delta); \quad \mathbf{BD} = \overline{\mathbf{AD}} \operatorname{tg} \psi;$$

$$\text{ebből, mivel } \mathbf{A}_0\mathbf{D} = \mathbf{A}_0\mathbf{A}; \quad \mathbf{A}_0\mathbf{A} = a + b = \mathbf{AD},$$

$$\overline{\mathbf{A}_0\mathbf{A}} \cdot \operatorname{tg}(\gamma + \delta) = (a + b) \cdot \operatorname{tg} \psi;$$

vagy, rövidség kedvéért írva:

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{a+b}{\operatorname{tg}(\gamma + \delta)}, \\ \operatorname{tg} \psi &= \frac{\overline{\mathbf{A}_0\mathbf{A}}}{p}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

a keresett ψ -re nézve

Itt az a, b, γ, δ , mennyiségek az \mathbf{EE} és \mathbf{EE} conjugált pár valamenynyi pontjára nézve állandók lévén, a p is jellemző állandója ezen párnak, melyet az *eloszlás paraméterének* nevezik, míg a $\gamma + \delta$ a két egyenes iránykülönbsége vagy *keresztező szöge*.

Az \mathbf{EE} generatrixen, ennek \mathbf{A}_0 centrális pontjától $\overline{\mathbf{A}_0\mathbf{A}}$ távolban fekvő \mathbf{A} pontban az egyenesvonalú felületre emelt \mathbf{AB} normális az \mathbf{A}_0 pontban ugyancsak e felületre emelt $\mathbf{A}_0\mathbf{A}$ normálissal ψ szöget képez, mely a (4) szerint csak az $\overline{\mathbf{A}_0\mathbf{A}}$ távolságtól és a p állandótól függ.

b. Ha az \mathbf{EE} egyenesen egy másik, \mathbf{A}' pontra nézve ψ' a tangenciális sík hajlása és $\mathbf{A}_0\mathbf{A}'$ a távolság, akkor (4) szerint:

$$\operatorname{tg} \psi' = \frac{\overline{\mathbf{A}_0\mathbf{A}'}}{p}.$$

és így:

$$\operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \psi' = \frac{1}{p^2} \overline{\mathbf{A}_0\mathbf{A}} \cdot \overline{\mathbf{A}_0\mathbf{A}'} \dots \dots \dots (5)$$

Ha az \mathbf{A}' érintő síkja merőleges az \mathbf{A} érintő síkjára, erre nézve a feltétel:

$$\overline{\mathbf{A}_0\mathbf{A}} \cdot \overline{\mathbf{A}_0\mathbf{A}'} = \pm p^2;$$

akkor az \mathbf{A}' érintő síkja az \mathbf{A} -ra nézve normális sík és az \mathbf{A} érintő síkja az \mathbf{A}' -ra nézve normális sík.

307. §. Az egyhéjú (egyköpenyű, egyágrú) hyperboloid egyenesvonalú felület. Kinematikai és geometriai sajátosságai.

Kiindulva az egyhéjú hyperboloid (250a. ábra) közös séges egyenletéből [Math. repertórium 102. §. (2)]:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (1)$$

keressük azokat a feltételeket, melyek mellett valamely, az

$$x = kz + u; \quad y = lz + v \quad (2)$$

egyenletek által képviselt egyenes vonal ezen hyperboloidon fekszik.

I. Az egyhéjú hyperboloidon az egyenesek két rendszere húzható.

Helyetteszve a (2)-ből az x -et és az y -t az (1)-be, némi rendezése után nyerjük:

$$\left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) z^2 + 2\left(\frac{ku}{a^2} + \frac{lv}{b^2}\right) z + \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1,$$

mely egyenlet az állandó k, l, u, v , de a tetszőlegesen változó z -re nézve csak úgy állhat fenn, ha külön-külön:

$$\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0; \quad \frac{ku}{a^2} + \frac{lv}{b^2} = 0; \quad \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1 \quad . (3)$$

Az első és a második feltételből elimináció útján:

$$\left. \begin{aligned} k &= \pm \frac{av}{bc} \left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}\right)^{-1} = \pm \frac{av}{bc} \\ l &= \mp \frac{bu}{ac} \left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}\right)^{-1} = \mp \frac{bu}{ac} \end{aligned} \right\}; \quad (4)$$

hol egyszerre mindkét felső vagy mindkét alsó előjel alkalmazandó.

A (4) kettős előjelei szerint a k és l paraméterek két rendszere felel meg a (3) feltételeknek és így a (2) vonalak két rendszere fekszik a hyperboloidon, melyek mozgásából a hyperboloidot származottnak tekinthetjük és melyeket *generatrix*-egyeneseknek is nevezhetünk.

Ezen egyenesek egyenletei a (2)- és (4)-ből, az utóbbiak kettős előjeleinek figyelembe vételével:

$$x = + \frac{av}{bc} z + u; \quad y = - \frac{bu}{ac} z + v; \quad (5a)$$

$$x = - \frac{av}{bc} z + u; \quad y = + \frac{bu}{ac} z + v. \quad (5b)$$

Az u és v mennyiségek helyébe az:

$$\frac{u}{a} = \cos \vartheta, \quad \frac{v}{b} = \sin \vartheta, \quad (6)$$

egyenletek segélyével 9-át vezetve be, (3)-ból:

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1 = \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta,$$

és az (5a) és (5b) két rendszer egyenletei:

$$\frac{x}{a} = \pm \frac{z}{c} \sin \vartheta + \cos \vartheta; \quad \frac{y}{b} = \mp \frac{z}{c} \cos \vartheta + \sin \vartheta \quad (5)$$

Az u és v mennyiségek a (3) harmadik egyenlete értelmében a hyperboloid *derékellipsisének* (*torokellipsisének*) koordinátái; ez az ellipsis keletkezik, ha a felületet a $z=0$ síkkal, az XY síkkal metszük (250a. ábra).

Az (5) egyenletekből azonnal következik, hogy az *egy* rendszerhez tartozó különböző ϑ paraméterű egyenesek egymást nem metszhetik, mert bármily két vonala vetületeinek metszéspontjai nem egyszermind vetületei egy térbeli pontnak (v. ö. a köv. II. pontot); e szerint ezen egyenesek nem fekszenek egy és ugyanazon síkban.

II. Az *egyik* rendszer minden egyenese metszi a második rendszer *valamennyi* egyenesét.

Legyenek u_1, v_1 a derékellipsisnek (torokellipsisnek) valamely tetszőlegesen választott pontjának koordinátái, ϑ_1 független változójuk [(6)]; a rajta keresztül írt, az (5b) rendszerhez tartozó egyenes egyenletei:

$$x = -\frac{av_1}{bc}z + u_1; \quad y = +\frac{bu_1}{ac}z + v_1 \quad (6b)$$

Az (5a) és a (6b) első egyenlete az egyik, illetve a másik rendszerhez tartozó valamely egyenesnek az XZ síkra való vetületét fejezik ki; ha a két vetület egymást az x, z koordinátákkal bíró pontban metszi, akkor a nevezett két egyenletben e pontra nézve az x és a z ugyanaz és a két egyenlet különbségéből:

$$z = \frac{bc}{a} \frac{u_1 - u}{v_1 + v} = c \frac{\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta}{\sin \vartheta_1 + \sin \vartheta} \quad (7a)$$

Ellenben, az (5a) és (6b) második egyenlete a két rendszerhez tartozó egyeneseknek vetületét fejezi ki az YZ síkra; ha a két vetület egymást az y, z összszerendezőű pontban metszi, akkor az említett két egyenletben e pontra nézve az y , és z , ugyanaz és a két egyenlet különbségéből

$$z = -\frac{ac}{b} \frac{v_1 - v}{u_1 + u} = -c \frac{\sin \vartheta_1 - \sin \vartheta}{\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta} \quad (7b)$$

Bebizonyítjuk, hogy a z és z , egymással egyenlők.

Ugyanis, az (u, v) és az (u_1, v_1) pontok a derékellipsisen (torokellipsisen) fekszenek, megfelelnek az

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1 = \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta; \quad \frac{u_1^2}{a^2} + \frac{v_1^2}{b^2} = 1 = \cos^2 \vartheta_1 + \sin^2 \vartheta_1 \quad (8)$$

egyenleteknek, melyeknek különbsége írható:

$$\frac{(u_1+u)(u_1-u)}{a^2} + \frac{(v_1+v)(v_1-v)}{b^2} = 0, \quad \text{miből:}$$

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{u_1-u}{v_1+v} = -\frac{a}{b} \cdot \frac{v_1-v}{u_1+u}, \quad \text{vagy:} \quad \frac{\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta}{\sin \vartheta_1 + \sin \vartheta} = -\frac{\sin \vartheta_1 - \sin \vartheta}{\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta} \quad (9)$$

Tekintettel a (7a) és (7b)-re:

$$z_1 = z_1; \quad \dots \quad (10)$$

mely egyenlet azt mondja, hogy az (5a) és a (6b) egyenes vonalak egymást a térben tényleg metszik.

Mivel pedig a (9) egyenlet a derék (torok-) ellipsisen fekvő bármily (u, v) és (u_1, v_1) két pontra érvényes, ez az eredmény akként fejezhető ki általánosságban: az egyik rendszer bármily egyenesese metszi a másik rendszer valamenynyi egyenesét.

A metszópontok helyzetét a (7a), (7b) és a (6b) egyenletek adják; ennek részletes taglalását itt mellőzzük, de az olvasónak ajánljuk.

308. §. *Három tetszőleges egyenes egyhéjú hyperboloidot határoz meg. Négy tetszőleges egyenest két egyenes mindig metsz.*

I. Valamely egyenes egyenletei legyenek [megelőző §. (2)]

$$x = kz + u, \quad y = lz + v; \quad \dots \quad (1)$$

hol k, l ; u, v ezen egyenesnek paraméterei, melyek adottak.

Ha azt akarjuk, hogy az egyenes egyhéjú, a, b, c féltengelyű hyperboloidon feküdjék, akkor a megelőző §.

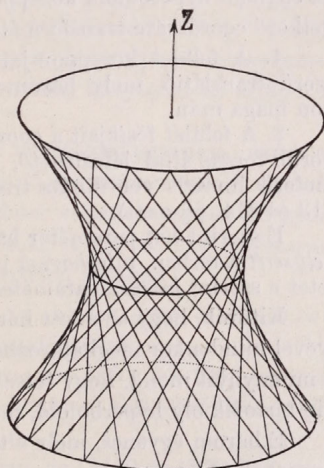
(3) és (4) egyenletei szerint állania kell:

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1; \quad \frac{v}{k} = \mp \frac{bc}{a}; \quad \frac{u}{l} = \pm \frac{ac}{b} \quad \dots \quad (2)$$

Az utóbbi két egyenletből és azután a (2) első egyenletéből:

$$\left. \begin{aligned} \frac{uv}{kl} &= -c^2; & \frac{u}{v} \cdot \frac{k}{l} &= -\frac{a^2}{b^2} \\ a^2 &= \frac{u}{l} (ul - vk); & b^2 &= \frac{v}{k} (vk - ul) \end{aligned} \right\} \dots \quad (3)$$

E szerint az (1) vonal paraméterei teljesen meghatározzák az egyhéjú hyperboloid jellemzőit, a -t, b -t, c -t; de itt hallgatag az a feltevés van bevezetve, hogy a coordináták kezdete e hyperboloid közép-



250a. Ábra.

pontjával, főkijjai (tengelysíkjai) pedig a koordináta-síkokkal esnek egybe.

II. Ha három egészen tetszőleges egyenes van adva, ezeknek összesen tizenkét paraméterük van; a három egyenes közül még kettő sem fekszik egy síkban.

Az egyhéjú hyperboloidot pedig tetszőleges fekvésű koordináta-rendszerre vonatkoztatjuk.

E felület jellemzői [Math. repertórium 101. és 102. §. (az utóbbi §. 6 sorába csúszott sajtóhiba kijavításával)]:

$$A \geq 0, \quad A_{11} < 0, \quad A_0 > 0;$$

arra nézve, hogy a másodrendű felületek általános egyenletét (i. h.) az egyhéjú hyperboloid középponti egyenlete alakjába hozzuk, a következő koordináta-transzformációkat kell végeznünk:

1. A felület középpontját a rendszer kezdetébe hozni; ez egyszerű transláció, mely három lineáris jellegű paraméter bevezetését von maga után.

2. A felület főkijait a koordináta-síkokba hozni; ez a kezdőpont körüli forgás által létesíthető, mely szintén három független paraméterű lineáris koordináta-transzformációt vesz igénybe (v. ö. pl. a 213 és 214. §§-okat).

E szerint *hat* paraméter határozza meg a hyperboloid *fekvését és helyzetét* a térben, míg *három* paraméter az *alakját* adja meg; a felületet e szerint *kilencz* paraméter határoz meg teljesen.

Kitűnik, hogy az adott három egyenes *tizenkét* paraméterei segítségével mindenkor meghatározható a hyperboloid *kilencz* paramétere, a mi annyit mond, hogy tetszőlegesen adott három egyeneshez mindig tartozik oly hyperboloid, melyen e három egyenes fekszik.

E három egyenes, mely általánosságban egymást nem metszi, a hyperboloid generatrix-egyeneseinek egyik (de nem mindkét) rendszeréhez tartozik (mert a megelőző §. II. pontja szerint e két rendszer egyenesei egymást kölcsönösen metszik.)

III. Vegyünk most egy tetszőleges *negyedik* egyenest; ez a hyperboloidot *két és csak két pontban* fogja metszeni (250a. ábra); e két ponton keresztül vonjunk a második generatrix-rendszerhez tartó két egyenest; ezek a megelőző §. II. tétele szerint metszik az adott első három egyenest és természetesen a negyediket is.

Röviden: Mindig van két és csak két egyenes (generatrix), mely adott négy tetszőleges egyenest metsz.

Ez igen fontos geometriai tétel.

I. *Jegyzet*: Ha e négy egyenes mindegyike saját pontjai sebességeire merőleges (ha önönmagukhoz conjugált vonalak), akkor a két metsző egyenes egy conjugált párt alkot [305. §. 1—4. tételei].

II. *Jegyzet*: Ha a negyedik adott egyenes szintén az első három egyenes meghatározta hyperboloidon fekszik, akkor a második generatrix-rendszer valamenynyi egyenese metszi az adott négy egyenest.

309. §. *A conjugált egyenesek két párja mindig egy egyhéjú hyperboloidon fekszik.*

Legyen E_1E_1 , E_1E_1 és E_2E_2 , E_2E_2 a conjugált egyenesek két párja (303. §.)

Az első három egyenes mindig egy egyhéjú hyperboloidon fekszik (308. §.) és e három egyenes e felület generatrix-rendszerei egyikéhez tartozik.

A másik generatrix-rendszer tetszőleges GG egyenes az első hármat metszi; mivel a GG az E_1E_1 -t és E_1E_1 -t metszi, ezért (305. §. 1. tétele) ez a GG egyenes merőleges valamenynyi saját pontjának sebességére; ezenkívül, mivel még az E_2E_2 -t is metszi, kénytelen az E_2E_2 -t is metszeni (305. §. 2. tétele).

Miután a GG a második rendszer tetszőleges egyenese, azért az E_2E_2 -t e generatrix-rendszer valamenynyi egyenese metszi és így kell, hogy az E_2E_2 az első generatrix-rendszer valamely egyenese legyen.

Evvel ki van mutatva, hogy az E_2E_2 a három első egyenessel ugyanazon egyhéjú hyperboloidon kénytelen feküdni.

310. §. *CHASLES és BOUR tételei az axoidok, azaz a szilárd és a mozgó egyenesvonalú felületek néhány sajátosságáról.*

A merev rendszer általános mozgása az (MN) és (MN) egyenesvonalú felületeknek (az axoidoknak) egymáson való gördülése és siklása segítségével is létesíthető (275. §.)

1. Ha az általános mozgás adva van, az (MN) és (MN) két axoid is meg van határozva; de megfordítva ez általánosságban áll ugyan, azonban vannak kivételes, *határozatlan* esetek, melyekben a két felület ismerete még nem elegendő a mozgás meghatározására, mivel a momentán csavarmozgás jellemzői, a forgásszög (forgás-amplitudó) és a közös transláció a felületekből magukból meg nem határozhatók.

Így pl. tetszőleges keresztmetszetű két henger egymáson való gördülése és siklása számtalan módon történhetik.

De, bármilyen is legyen e két felület, a 275 és 296. §§. taglalásai értelmében ezek minden pillanatban a közös momentán csavartengely mentén érintkeznek és így az egymásra következő két-két generatrix-egyeneseik közös, valamint az ezek között lévő két felületi szalag is közös.

Ezen utóbbi körülményből bizonyos következtetések vonhatók az (MN) és (MN) felületek lefejtettségére vagy le nem fejtettségére nézve.

ezekből:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{A_0 A}{p}, \\ \text{hol: } p &= \frac{A_0 B_0}{\operatorname{tg} d\varepsilon} = \frac{da}{d\varepsilon}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

az eloszlás parametere, mint a 306. §. (4). formulájában.

Evvél ugyanaz az összefüggés, mint a conjugált párnál, ki van mutatva, csak hogy itt az EE és FF nem conjugált egyenesek és hogy itt az érintő síkok lépnek az ott tárgyalt normális síkok helyébe.

Írva $A_0 A = \zeta$; $A_0 A' = \zeta'$, hol A' az EE tetszőleges pontja, az (1)-ből:

$$\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi' = \frac{\zeta \zeta'}{p^2} \dots \dots \dots (2)$$

Továbbá, az a feltétel, hogy az A és az A' érintő síkjai egymásra merőlegesek legyenek, itt:

$$\zeta \zeta' = \pm p^2 \dots \dots \dots (3)$$

Ebből azt következtetjük, hogy az egyenesvonalú felület minden pontjának érintősíkja egyszersmind ezen felületnek oly normális síkja, mely e felület ugyanazon generatrixén fekvő más, meghatározott pontjához tartozik és e generatrixen megyen keresztül.

3. Ha most azt kívánjuk, hogy az (MN) és az (\mathbf{MN}) egyenesvonalú felületek az EE generatrix mentén érintkezzenek, akkor kell, hogy az (MN) felületnek EE és FF egyenesei (251. ábra) az \mathbf{MN} felület \mathbf{EE} és \mathbf{FF} egyenesével essenek egybe [ha csak az EE közös, a két felület egymást csak metszi az EE -ben] és így a két felületszalag is essék egybe.

De akkor az EE valamenynyi A pontjának érintősíkjai is közősek lesznek a két felületre nézve, azaz a φ szögek (251. ábra) a két felület ezen EE és \mathbf{EE} menti közös pontjaira nézve ugyanazok.

Ha $\xi, \eta, \zeta, \Xi, H, Z$ a két felület koordinátái és a közös generatrix a Z -k tengelye, akkor a két felületnek ezen generatrix mentén t időpillanatban közös pontjaira nézve az (1) szerint áll:

$$\left. \begin{aligned} \xi = 0 = \Xi; \quad \eta = 0 = H; \quad \zeta = Z; \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{\zeta}{p} = \frac{Z}{P} = \operatorname{tg} \Phi; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

hol Φ és P az (\mathbf{MN}) felületre vonatkoznak.

Következik:

$$\zeta = Z, \quad p = P \dots \dots \dots (5)$$

E szerint az (MN) és (\mathbf{MN}) felületek akkor fognak érintkezni, ha a ζ és a Z kezdőpontjai, azaz a felületeknek a közös EE generatrixen fekvő centrális pontjai egybeesnek és eloszlásuk paraméterei egyenlők.

Ennek a feltételnek állania kell a két felület mindazon egyenespárjaira nézve, mely párok egyenesei mozgás közben egybeesnek; ekkor a két felületnek egymáson való egyidejű gördülése és siklása lehetséges; a gördülés az egymásra következő centrális síkok és generatrixek coincidentiáját létesíti, míg a siklás a generatrixek centrális pontjait hozza fedezésre.

4. Ha bármely egyenesvonalú felületen az egymásra következő generatrixek között lévő legrövidebb *da* távolság A_0 talppontjait (251. ábra), a centrális pontokat, egybekapcsoljuk, nyerjük az egyenesvonalú felületnek ú. n. *strictiósgörbét*, mely általánosságban ferde szög alatt metszi a generatrixek helyeit.

a. Ha a két felület strictiósgörbéi a közös generatrixet mindig egyenlő (de nem szükségképpen ugyanazon) szög alatt metszik, akkor a sikló mozgás megszűnik és csak a gördülő mozgás marad fenn; e gördülés közben az (MN) felület az álló (\mathbf{MN}) felületre lefejlík, a mint lefejlík minden lefejlíthető felület egy másik görbe felületre, ha az előbbi az utóbbin gördülhet.

[Ket egyenlő oly csavarfelület, melyek generatrixei felületük tengelyével állandó *ferde* szöget képeznek, s mely felületek geometriai csavartengelyei egy síkban fekszenek, egymásra (pl. gördülés segélyével) lefejlíthetők.

Hasonlóképen lefejlíthetők egymásra egy épen előbb említett ferdeszögű csavarfelület és egy hozzá alkalmasan válaszott egyágú forgási hyperboloid, ha e felületek geometriai tengelyei egymást metszik.

E lefejlíthetőségek bebizonyítását hely hiányában az olvasóra bízuk.]

b. Ha az egyenesvonalú felület *sík*-ban lefejlíthető, akkor az EE és az FF egyenesek *egy* és ugyanazon síkban tartoznak lenni, és akkor e két egyenes egymást tényleg metszi és e metszőpont az EE centrális pontjának legkisebb távolsága az FF -től, azaz *da* itt zérus és így az (1) szerint a p paraméter is. (*de* irányváltozás általában a zérustól különböző lévén).

A kúp- és a henger-felület síkban lefejlíthető ugyan, de az elsőnél a generatrixek centrális pontjai mind a csúcsba esnek, míg a másodiknál e pontok a végtelenben vannak.

E szerint ezen két felület centrális pontjait nem lehet fedezésre hozni és így az egyiknek a másikon való gördülése és sikló mozgása is lehetetlen.

6. Sugárcomplexusok és Sugárcongruentiák.

311. §. *A Sugárcomplexusok definitiója. Lineáris complexus egyenletei.*

Sugárcomplexus az egyenes vonalak azon összessége (rendszere), mely csak egyetlen egy feltételnek van alávetve.

Az egyenes egyenletei legyenek

$$x = az + p, \quad y = bz + q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

és a négy paraméter között fennálló kapcsolat legyen:

$$f(a, b, p, q) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Az (1) egyenleteknek és a (2) feltételnek megfelelő egyenesek összessége egy sugárcomplexust alkot, mely elsőfokú (lineáris), ha a paraméterek a (2) feltételben (a végeredményben) első hatványon lépnek fel; különben magasabb fokú.

1. Azok a vonalak, melyek a tér tetszőleges x_1, y_1, z_1 összszerendező pontján áthaladnak, eleget tesznek az

$$x_1 - x = a(z_1 - z), \quad y_1 - y = b(z_1 - z), \quad f(a, b, p, q) = 0$$

egyenleteknek, míg az (x_1, y_1, z_1) pontra nézve az (1)-ből még áll:

$$x_1 = az_1 + p; \quad y_1 = bz_1 + q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

Eliminálva a (2) egyenletből az a, b, p, q paramétereket az (1) és (1a) alapján x, y, z és az x_1, y_1, z_1 coordináták segítségével, e feltétel alakja:

$$f\left(\frac{x_1 - x}{z_1 - z}, \frac{y_1 - y}{z_1 - z}, \frac{yz_1 - zy_1}{z_1 - z}, \frac{yz_1 - zy_1}{z_1 - z}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Ez oly *kúp* egyenlete, melynek csúcspontja az (x_1, y_1, z_1) pont, és melynek összes egyenesei hozzátartoznak az (1) és (2) egyenletek által meghatározott sugárcomplexushoz.

Maga az x_1, y_1, z_1 pont tetszőleges lévén, az egész térben háromszorosán végtelen számú ily pontok léteznek, melyek mindegyikére nézve a (3) egyenlet és a belőle folyó eredmények érvényesek.

E szerint a (3) kúpokhoz tartozó egyes sugárrendszerek a geometria terminológiája szerint, *három méretű sokaságot* mutatnak; ezért gyakran úgy definiálják a *vonalcumplexust*, mint az *egyeneselek három méretű sokaságát*, mely a tért folytonosan kitölti.

De, a complexus vonalai oly feltételnek is lehetnek alávetve, hogy térbeli görbét metsző egyenesek öszszeségét képezzenek s i. t.

2. Ha a complexus *első fokú*, akkor a (2)-nek f functiója az x, y, z menynységeknek csak első fokú, *lineáris* függvénye lehet, mely a (3) értelmében következő alakú:

$$A(x_1 - x) + B(y_1 - y) + G(xz_1 - zx_1) + H(yz_1 - zy_1) + I(xy_1 - yx_1) + K(z_1 - z) = 0 \quad (4)$$

(hol a közös $z_1 - z$ különbséggel már megtörtént a szorzás).

De, ha a (4) egyenletet a $z_1 - z$ különbséggel osztjuk, és megjegyezzük, hogy:

$$\frac{x_1 - x}{z_1 - z} = a, \quad \frac{y_1 - y}{z_1 - z} = b, \quad \frac{xz_1 - zx_1}{z_1 - z} = p, \quad \frac{yz_1 - zy_1}{z_1 - z} = q;$$

$$-\frac{xy_1 - yx_1}{z_1 - z} = ay - bx = aq - bp,$$

a (4) írható:

$$Aa + Bb + Pp + Qq + R(aq - bp) + K = 0 \quad (5)$$

Itt az első fokú complexusok feltétele az egyenes egyenletének a, b, p, q parameterei által van kifejezve.

312. §. Az első fokú sugárcomplexus mindenkor önmagukhoz *conjugált* (úgynevezett kettős-) egyenesek öszszeségének tekinthető.

Adva legyen egy tetszőlegesen mozgó merev pontrendszer; keressük fel azt a feltételt, melynek az a, b, p, q paraméterek között fenn kell állania, ha az általuk meghatározott egyenes önmagához *conjugált* egyenes (azaz, hogy ezen egyenes egy pontjának és így valamenynyi pontjának sebességére merőleges legyen, 305. §. 3. tétele) és mutassuk ki, hogy az így talált feltétel megegyezik a megelőző §. (5) alatti azon feltétellel, mely az első fokú sugárcomplexusra nézve fennáll.

Jeleljék ω a momentán csavarmozgás szögsebességét, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ennek derékszögű öszszetevőit, x_1, y_1, z_1 a momentán tengelyen fekvő valamely pont coordinátáit, végre $c_0 = u_0$ az ezen tengelyhez párhuzamos transláció sebességét, [292. §. (3)] és α, β, γ ezen tengely iránycosinusait.

A tetszőleges, x, y, z öszszrendezőjű A pont sebességi componentjei (i. h.):

$$\left. \begin{aligned} v_x &= c_0 \alpha - [\omega_y(z_1 - z) - \omega_z(y_1 - y)] \\ v_y &= c_0 \beta - [\omega_z(x_1 - x) - \omega_x(z_1 - z)] \\ v_z &= c_0 \gamma - [\omega_x(y_1 - y) - \omega_y(x_1 - x)] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

A tetszőleges

$$x = az + p, \quad y = bz + q \quad (2)$$

egyenletű egyenesnek iránycosinusai rendre [Math. repertórium 67. §. (3b)].

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}, \quad \frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}} \quad (2a)$$

Az ezen egyenesen fekvő

$$x=p, \quad y=q, \quad z=0 \quad (3)$$

coordinátákkal bíró pontnak sebességi összetevői az (1)-ből:

$$\left. \begin{aligned} x=p, & \quad v_x = c_0 \alpha - [\omega_z q + \omega_y z_1 - \omega_x y_1] \\ y=q, & \quad v_y = c_0 \beta - [-\omega_z p + \omega_x z_1 - \omega_y x_1] \\ z=0, & \quad v_z = c_0 \gamma - [-\omega_x q + \omega_y p + \omega_x y_1 - \omega_y x_1] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

A feltétel, hogy az $x=p, y=q, z=0$ pont sebessége merőleges legyen a (2) egyenesre, abban áll, hogy a (4) sebességi componensek szorzatai a megfelelő (2a) iránycosinuszokkal összesen zérust adnak. Szorozva az így származó egyenletet $\sqrt{1+a^2+b^2}$ -vel, feltétel gyanánt nyerjük:

$$a(-c_0 \alpha + \omega_z q + \omega_y z_1 - \omega_x y_1) + b(-c_0 \beta - \omega_z p + \omega_x z_1 - \omega_y x_1) + (-c_0 \gamma - \omega_x q + \omega_y p + \omega_x y_1 - \omega_y x_1) = 0,$$

vagy, némi összevonás után:

$$\left. \begin{aligned} a(-c_0 \alpha + \omega_y z_1 - \omega_x y_1) + b(-c_0 \beta + \omega_x z_1 - \omega_y x_1) + p\omega_y - q\omega_x + \\ (aq - bp)\omega_z - c_0 \gamma + \omega_x y_1 - \omega_y x_1 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Ezen egyenlet alakja teljesen megegyezik a megelőző §. (5) egyenletével és a kettőnek összehasonlításából:

$$\left. \begin{aligned} A = -c_0 \alpha + \omega_y z_1 - \omega_x y_1; \quad B = -c_0 \beta + \omega_x z_1 - \omega_y x_1; \quad K = -c_0 \gamma + \omega_x y_1 - \omega_y x_1; \\ P = +\omega_y; \quad Q = -\omega_x; \quad R = +\omega_z. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

E (6) szerint a megelőző §. (5) egyenletének P, Q, R együtthatói meghatározzák a momentán csavartengely irányát és a *szögsebességet*; az A, B, K együtthatókból pedig kiszámíthatjuk a tengely menti transláció c_0 sebességét és a tengelyben fekvő A_1 pont x_1, y_1, z_1 coordinátáit.

Ugyanis, mivel $\omega_x = \alpha\omega, \omega_y = \beta\omega, \omega_z = \gamma\omega$, szorozzuk (6)-ban A, B, K -t rendre α, β, γ -val; összegyük:

$$A\alpha + B\beta + K\gamma = -c_0, \quad (7)$$

mely a transláció keresett sebessége.

A (6) első három egyenlete között a (7) összefüggés állván fenn, az előbbiekből csak kettő független, ez a kettő pedig a momentán csavartengely x_1, y_1, z_1 összrendezőjű pontjainak, azaz magának a tengelynek egyenletei.

Evvel az e §. elején kimondott állításunk be van bizonyítva.

313. §. Az elsőfokú complexusok néhány alaptulajdonságáról.

A megelőző §-ban kimutattuk, hogy az elsőfokú complexus egyes egyenesei merőlegesek valamenynyi pontjaik sebességére. Ebből következik:

1. Mivel valamely sík P pólusán (fócusán) keresztül, a síkban fekvő számtalan egyenes húzható, melyek mindegyike (301. §. 2. és 3. tételei) valamenynyi pontjának sebességére merőleges, azért ez egyenesek mind önmagukhoz conjugáltak és egy első fokú complexushoz tartoznak és *sík sugárnyaláb*ot (*sugársort*, *elsőfokú kúpfelületet*) alkotnak.

2. Megfordítva: A rendszer tetszőleges P pontján át mindenkor a hozzátartozó polársík fektethető és az ezen síkban húzott, P ponton átmenő egyenesek mind egy elsőfokú complexushoz tartoznak és a polársíkban szintén elsőfokú kúpfelületet (sík sugárnyaláb) alkotnak.

3. Az 1. és 2. pontokban említett *sík* nyalábok (sugársorok) mindegyik egyenesre egy első osztályú görbének, azaz egy pontnak (a pólusnak) érintői.

4. Az 1. és 2. szerint az első fokú sugárcomplexus három méretű sokasága (311. §.) abban áll, hogy a térnek minden pontja egy hozzátartozó sík-sugárnyaláb (sugársort) határozz meg.

5. Ha valamely egyenes az E , E conjugált egyeneseket metszi, ez az egyenes (mely a 305. §. 1. tétele szerint merőleges valamenynyi pontjának sebességére) az elsőfokú complexus egy sugara.

6. Ha az elsőfokú complexusnak valamely sugara metszi az E , E conjugált egyenesek (sugarak) egyikét, akkor (a 305. §. 2. tétele szerint) e sugarak másikat is kénytelen metszeni.

7. Valamely csavarmozgás a 284. §. értelmében számtalanféleképen helyettesíthető conjugált tengelyek (vonalak) körüli két forgás által; de ezen E , E conjugált egyenesek mindegyik párjára nézve áll az, hogy legrövidebb távolságuk a centrális tengelyt (a momentán csavarmozgás tengelyét) mindenkor derékszög alatt metszi.

8. A centrális tengelyre merőleges bármely egyenes a 7. pont szerint mindenkor egy conjugált egyenespár legrövidebb távolságának tekinthető és e szerint az első fokú complexusnak egy vonala.

9. A complexus sugarainak *eloszlási paramétere* egyszersmind a 306. §. (4) egyenletében, 524. l. talált eloszlás paramétere:

$$p = \frac{a+b}{\operatorname{tg}(\gamma+\delta)};$$

melvel pedig a 284. §. (6) egyenletei szerint, de a 306. §. 4. pontjának jelölésével:

$$\frac{c_0}{\omega} = -a \operatorname{tg} \delta = -b \operatorname{tg} \gamma = \frac{c_0}{\omega},$$

e paraméter kifejezhető a $\frac{c_0}{\omega}$ állandó (a csavarodás viszonya, 276. §.) és a tetszőlegesen választott egyik conjugált vonal a és γ jellemzői segítségével.

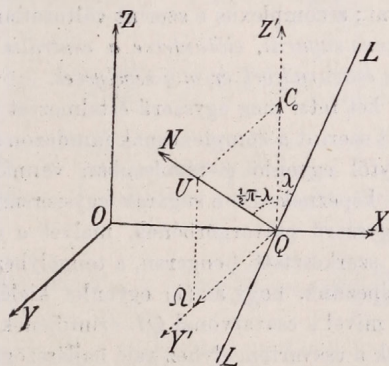
10. A complexus centrális tengelyét (a momentán csavartengelyt) sokszor *fővonalnak* is nevezik; továbbá mind azon egyeneseit, melyek ezen vonalhoz párhuzamosak, a complexus *átmérőinek*.

314. §. Az elsőfokú complexus sugarainak eloszlására vonatkozó tételek.

Szükségesnek látjuk, hogy az első fokú complexusok térbeli elrendezését illetőleg néhány fontos általános tételt származtassunk.

1. *Bármely complexus-sugárnak a centrális tengelytől való távolsága, szorozva e vonal és e tengely közötti szög tangensével a complexus állandó csavarodási viszonyával egyenlő.*

Legyen LL a complexus valamely egyenese, mely az 252. ábra szerint választott koordináta-rendszer YZ síkjához párhuzamos YZ síkban



252. ábra.

fekszik; legyen $OQ = q$ távolsága az OZ centrális tengelytől és λ az LL és az OZ -hez párhuzamos QZ' által képezett szög.

Az LL egyenes merőleges valamenynyi pontjának sebességére (312. §.); de az OQ egyenes, a megelőző §. 8. pontja szerint szintén a complexushoz tartozván, ugyancsak merőleges valamenynyi pontjának sebességére.

E szerint a két egyenes Q metszéspontja egyszersmind pólusa az LQO síknak és viszont, az LQO sík a Q pont polársíkja (300. §. 1. pontja), mely utóbbi a ZOQ síkkal λ szöget képez és melynek QN normális a ugyanezen ZOQ síkkal $\frac{1}{2}\pi - \lambda$ szöget képez (252. ábra).

Fejezzük most ki a Q pont momentán sebességének összetevőit és jegyezzük meg, hogy a sebesség maga, mivel Q az LQO sík pólusa, ezen LQO síkra merőleges, azaz a QN normális mentén fekszik.

Az OZ körüli forgás folytán a Q pont a ZOQ -ra merőlegesen (az OY -hoz párhuzamosan) $q\omega = Q\Omega$ sebességet nyer, mely az $Y'QZ$ síkban fekszik, míg az OZ -hez párhuzamos transláció $c_0 = QC_0$.

Nyerjük a C_0 -nál derékszögű C_0UQ háromszögből:

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{c_0}{q\omega}, \quad \text{vagy: } q \operatorname{tg} \lambda = \frac{c_0}{\omega}, \quad \dots \dots \dots (1)$$

miáltal állításunk be van bizonyítva.

2. *A complexus minden sugara complexus-sugar marad (a complexus önmagával coincidentiában marad), ha az egész complexus a centrális tengelyhez párhuzamosan el lesz tolvá, vagy e tengely körül forgatra lesz vagy ha mindkét nemű elmozdulás egyszerre történik.*

A kimondott tételek a megelőző §. tételeiből folynak, mert az E , E conjugált vonalpár sem az említett párhuzamos transláció sem a nevezett forgás által veszítheti el a conjugált párok tulajdonságát. De minden ily egyenespárhoz tartoznak az azokat metsző egyenesek, melyek a centrális tengely helyzete és a $\frac{c_0}{\omega}$ állandó által meghatározott complexus sugarai; a complexus e szerint változatlan marad.

3. *A complexus sugarai, előtüntetve a centrális tengellyel közös tengelyű hengeres csavargörbék érintői segítségével.*

A megelőző két tétel még egyszerű értelmezést is enged meg.

a. Az 1. pont szerint a complexusnak mindazon sugarai, melyek a centrális tengelytől egyenlő q távolságban vannak, e tengellyel egyenlő λ szöget képeznek. De e sugarak egyszersmind érintő egyenesei az olyan egyszerű csavargörbének, melyet a centrális tengely körül q sugárral szerkesztett hengeren, a tengelyhez állandó λ hajlásszöggel úgy képezünk, hogy az (1) egyenlet kielégítve legyen.

b. Továbbá, mivel e csavarvonal QL érintőjének és osculáló síkja QN normálisának a csavartengelyhez való hajlásszögei összesen $\frac{1}{2}\pi$ -t tesznek ki [a mi a Math. repertórium 75. §. (2) és (4) és a 76. §. 1. formulái segítségével igen könnyen igazolható], és e két egyenes egymásra merőleges, azért a csavargörbének Q pontjához tartozó osculáló sík az OQL sík és Q e sík pólusa. Ez az eredmény a következő 315. §. tételének speciális esete.

E szerint a csavargörbe valamenynyi Q pontja egyszersmind saját osculáló síkjának pólusa.

c. Az egy ily q sugarú hengeren fekvő csavargörbék száma végtelen nagy.

d. Ha a q távolság folytonosan fogy, akkor (1) szerint λ az $\frac{1}{2}\pi$ -felé közeledik; ezen esetben a complexushoz tartozó azon sugarakat nyerjük, melyek a centrális tengelyre merőlegesek.

e. Ha a q távolság folytonosan növekszik, a λ a zérus felé con-

vergál; ebből következik, hogy a complexusnak a végtelen távolban lévő sugarai a centrális tengelyhez párhuzamosak.

315. §. *Ha valamely térbeli görbe érintői egy és ugyanazon sugárcomplexushoz tartoznak, akkor e görbe minden pontjában az osculáló sík egyszersmind a pont palársíkja.*

1. Legyenek x, y, z a görbe valamely pontjának, x, y, z , az ezen pontjához húzott érintőnek folyó coordinátái; akkor az érintő egyenletei írhatók:

$$(x, -x): dx = (y, -y): dy = (z, -z): dz \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Az x, y, z , pont távolsága a Z tengelytől: $\sqrt{x^2 + y^2}$, melyet a z , változó segítségével akarjuk kifejezni.

Az (1)-ből:

$$x, -x = (z, -z) \frac{dx}{dz}, \quad y, -y = (z, -z) \frac{dy}{dz},$$

azaz:

$$x, = x + (z, -z) \frac{dx}{dz}, \quad y, = y + (z, -z) \frac{dy}{dz}.$$

E szerint:

$$x_i^2 + y_i^2 = x^2 + y^2 + 2(z, -z) \left(x \frac{dx}{dz} + y \frac{dy}{dz} \right) + (z, -z)^2 \left(\left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right) \quad . \quad . \quad (2)$$

Egy és ugyanazon (x, y, z) pont érintőjére nézve az x, y, z coordináták és a $dx:dz, dy:dz$ quotiensek állandók, de a z , változó.

Ezen érintőnek a Z tengelytől való legkisebb távolságára nézve a feltétel:

$$\frac{\partial (x_i^2 + y_i^2)}{\partial z_i} = 0, \quad \text{azaz a (2)-ből:} \quad \left(x \frac{dx}{dz} + y \frac{dy}{dz} \right) + (z, -z) \left(\left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right) = 0,$$

miből:

$$z, -z = - \frac{x \frac{dx}{dz} + y \frac{dy}{dz}}{\left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Ezt az értéket a (2)-be helyettesítve, e legkisebb távolság:

$$q^2 = (x_i^2 + y_i^2)_{\min} = (x^2 + y^2) - \frac{\left(x \frac{dx}{dz} + y \frac{dy}{dz} \right)^2}{\left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2};$$

vagy, némi rövidítések után:

$$q^2 \left(\left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right) = x^2 \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 + y^2 \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 - 2xy \frac{dx}{dz} \frac{dy}{dz} = \left(x \frac{dy}{dz} - y \frac{dx}{dz} \right)^2 \quad (4)$$

Továbbá, az érintő és a Z tengely között lévő λ szög cosinusának négyzete [Math. repertórium 67. §. (3)]:

$$\cos^2 \lambda = \left(\frac{dz}{ds} \right)^2; \text{ ebből: } \frac{1}{\cos^2 \lambda} = \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dz} \right)^2,$$

azaz:

$$\operatorname{tg}^2 \lambda = \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \dots \dots \dots (5)$$

E szerint a (4) írható:

$$q \operatorname{tg} \lambda = \pm \left(y \frac{dx}{dz} - x \frac{dy}{dz} \right) \dots \dots \dots (6)$$

E formulában q az érintő legkisebb távolsága a Z -től és λ a Z és az érintő között lévő szög.

2. Ha valamely lineáris (első fokú) complexus centrális tengelye a Z , jellemző paramétere $c_0: \omega = k$, akkor e complexushoz tartozó valamenynyi sugár megfelel a feltételnek (314. §. 1. pontja):

$$q \operatorname{tg} \lambda = k, \dots \dots \dots (7)$$

hol q a sugár legkisebb távolsága a Z -től és λ a sugár és a Z között lévő szög.

Ha az e §. 1. pontja alatt tárgyalt görbe érintői valamely első fokú complexus sugarai, akkor (6) és (7) szerint:

$$k dz = \pm (y dx - x dy), \dots \dots \dots (8)$$

hol a kettős előjel csak az érintő positiv vagy negativ irányára vonatkozik és ezért itt elhagyható, úgy hogy a (8) és differentiálja:

$$k dz = y dx - x dy; \quad k d^2 z = y d^2 x - x d^2 y \dots \dots \dots (9)$$

3. A görbe (x, y, z) pontján átmenő osculáló sík iránycosinusai értékeit [Math. repertórium 70. §-ának (2), (8) és (9), vagy 75. §-ának (2) és (4) formulái] tartva szem előtt, e sík egyenlete írható:

$$\left. \begin{aligned} (x, -x) (y d^2 z - z d^2 y) + (y, -y) (z d^2 x - x d^2 z) + \\ + (z, -z) (x d^2 y - y d^2 x) = 0 \end{aligned} \right\}, \dots \dots (10)$$

hol x, y, z , e sík folyó coordinátái.

Helyetteszve ide a (9)-ből a dz és $d^2 z$ értékét, nyerjük:

$$\begin{aligned} k (y d^2 z - z d^2 y) &= + y (y d^2 x - x d^2 y); \\ k (z d^2 x - x d^2 z) &= - x (y d^2 x - x d^2 y); \end{aligned}$$

e szerint, a (10) egyenletet k -val szorozva és a közös $(y d^2 x - x d^2 y)$ -al rövidítve, marad:

$$(x, -x) y - (y, -y) x - (z, -z) k = 0,$$

azaz:

$$x, y - y, x - k (z, -z) = 0, \dots \dots \dots (11)$$

mely egyenlet a 300. §. (2) egyenletével teljesen megegyezik, mivel $k=c_0:\omega$. Evvel állításunk be van bizonyítva.

316. §. *Tétel oly térbeli görbékre nézve, melyek érintői egy lindrís sugárcomplexushoz tartoznak.*

A megelőző §. tétele szerint az ily görbe osculáló síkja a görbe érintkező (osculáló) A pontjának poláris síkja és A a pólusa; e szerint, ha e síkban valahol egy B pont létezik, akkor a BA egyenes (a 301. §. 2. tétele szerint) merőleges valamenynyi pontjának sebességére.

Ha a görbe más, pl. A_1 pontjának osculáló síkja szintén átme-gyen a B ponton, akkor a BA_1 egyenes szintén merőleges valamenynyi pontjának sebességére és így (301. §. 3. tétele) a BA és a BA_1 egye-nesek a B poláris síkjában fekszenek.

Ennek értelmében, ha valamely tetszőleges B pontból egy tér-beli görbéhez több osculáló sík húzható, akkor ezek érintési (osculálási) pontjait a B -vel egybekapcsoló egyenesek mind a B pont polársíkjá-ban, azaz egy és ugyanabban a síkban fekszenek.

Az eredményt megfordított sorrendben is mondhatjuk ki: Fek-tessük a B -ponton keresztül a poláris síkját, akkor e sík a térbeli görbét rendre az $A, A_1 \dots$ pontokban fogja metszeni; mivel pedig a poláris sík sajátága szerint a BA, BA_1, \dots egyenesek egyenként me-rőlegesek valamenynyi pontjaik sebességére, ezért a BA merőleges az A sebességére is és az A pont poláris síkjában fekszik, épen így a BA_1 az A_1 poláris síkjában s í. t. Ezért a megelőző § tétele alapján a BA az A pont-, BA_1 az A_1 pont-, \dots s í. t. osculáló síkjában fekszik.

317. §. *Tételek oly egyenesvonalú felületekre nézve, melyek gene-ratrixei egy elsőfokú sugárcomplexushoz tartoznak. Az egybeeső érint-ési pontok és pólusok görbéi.*

Az ily felületek minden generatrixe első fokú complexushoz tar-tozván, önmagához conjugált egyenes (312. §.) és így (a 305. §. 3. tétele értelmében) merőleges a rajta fekvő valamenynyi pontjának sebességére.

1. *Az egy generatrixen fekvő, egymáshoz tartozó érintési pontok és pólusok sorainak projectivitása (e pontok és pólusok homographi serege).*

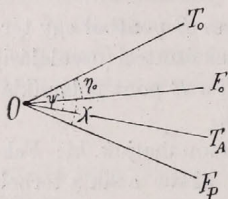
A felület tetszőleges A pontjához húzott érintő sík (251. ábra) az A ponton átmenő AE generatrixet is tartalmazza; ez utóbbi önmagá-hoz conjugált lévén, pontjainak sebességei merőlegesek az AE -re és így (a 301. §. 2. tétele szerint) ez érintő sík pólusa ezen generatrix mentén fekvő valamely P pontban fog lenni és ezért ezen P pont polársíkja egyszersmind az A -hoz tartozó érintő sík. Megfordítva (v. ö. az idézett §-ot), valamely P_1 pont polársíkja mindenesetre tar-

talmazza az AE generatrixet és e vonalnak valamely meghatározott egy A_1 pontjához tartozó érintő síkját a felületnek.

Az egymáshoz tartozó egy és ugyanazon generatrixen fekvő $A, P; A_1, P_1; \dots$ homolog pontpárok bizonyos *projectivitást* (homographi rendszert) képeznek, melynek minden párjára nézve jellemző az, hogy az egyik (A) pont érintősíkja a másik (P) pont polársíkjával esik egybe.

Hogy az egy párhoz tartozó ily két pont helyzetét az AE generatrixen meg lehessen határozni, a 306. §. 4. pontjának és a 302. §. 2. pontjának eredményeit tartjuk szem előtt.

A 253. ábrában az AE generatrix merőleges a rajz síkjára és e síkkal való metsző pontja az O ; továbbá az alább következő a, b, c pontokban említett síkok mind az AE -t tartalmazzák és így a rajz síkjára merőlegesek.



253. ábra.

a. Az AE egyenes A_0 és A pontjaiban (251. ábra) a felülethez húzott érintő síkok az AE generatrixet tartalmazzák és egymással (T_0OT_A) $\sphericalangle = \psi$ szöveget képeznek (mely az idézett ábra φ szögének felel meg), melyre nézve (306. §. 4. pontja):

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{A_0A}{p}; \quad p = \frac{a+b}{\operatorname{tg}(\gamma+\delta)} = \frac{d}{\operatorname{tg} \varepsilon} = \text{az eloszlás paramétere,} \dots (1)$$

hol $a+b=d$, $\gamma+\delta=\varepsilon$.

b. Az AE egyenes A_0 és P pontjaiban vont polársíkok az AE -t is tartalmazzák és egymással (F_0OF_P) $\sphericalangle = \chi$ szöveget képeznek, melyre nézve (302. §. 2. pontja):

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{g_1 A_0 P}{g_0 + g_2 A_0 F}; \quad \text{hol } g_0, g_1, g_2 \text{ paraméterek,} \dots (2)$$

c. Az AE egyenes A_0 pontjához húzott érintő sík és ugyane pont-hoz húzott polársík szintén az AE -t tartalmazzák és egymással egy meghatározott (T_0OF_0) $\sphericalangle = \eta_0$ szöveget képeznek.

Az A -ban a felülethez húzott érintő sík és a P -hez tartozó focális (polár)-sík között lévő szög

$$(T_AOF_P) \sphericalangle = \chi + \eta_0 - \psi \dots (3)$$

d. Ha most azt kívánjuk, hogy A és P pontok olyanok legyenek, miszerint az elsőnek érintő síkja a másodiknak focálisíkjával essék egybe, akkor a (T_AOF_P) szögnek zérusnak kell lennie; ennek feltétele a (3)-ból

$$\psi - \chi = \eta_0; \quad \text{vagy:} \\ \operatorname{tg}(\psi - \chi) = \operatorname{constans},$$

valamenynyi egymáshoz tartozó (homolog) A és P pontokra nézve.

E feltétel az (1) és (2) segélyével írható:

$$\operatorname{tg}(\psi - \chi) = \frac{\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \chi}{1 + \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \chi} = \frac{(g_0 + g_2 \overline{A_0 P}) \overline{A_0 A} - g_1 p \overline{A_0 P}}{p(g_0 + g_2 \overline{A_0 P}) + g_1 \overline{A_0 A} \cdot \overline{A_0 P}} = \text{constans.}$$

Mintán itt a g_0, g_1, g_2, p paraméterek, az egyenlet, nevezőjével való szorzás után következő alakban írható:

$$h_0 + h_1 \overline{A_0 A} + h_2 \overline{A_0 P} + h_3 \overline{A_0 A} \cdot \overline{A_0 P} = 0 \quad (4)$$

Ez az egyenlet, melyben h_0, h_1, h_2, h_3 a g_0, g_1, g_2, p segélyével képezett új paraméterek, kifejezi az $A, P, A_1, P_1 \dots$ homolog pontpárok által képezett projectivitást (e pontpárok homographi rendszerét) és egyszersmind kimondja, hogy egy adott A -hoz (azaz az $A_0 A$ távolsághoz) csak egy, meghatározott P pont (azaz az $A_0 P$ távolság) tartozik, miként azt már a geometriai megfontolás is adta.

2. Az egybeeső érintési pontok és pólusok görbéi a felületen. *E görbék érintői egy lineáris sugárcomplexushoz tartoznak, maguk e görbék a felülethez asymptotás görbék.*

a. A (4) egyenlet arra nézve is ad felvilágosítást, vajjon léteznek-e az AE generatrixen oly helyek, hol az egymáshoz tartozó A és P pontok egybeesnek, azaz, hol a tangentiális sík érintési pontja egyszersmind ugyanezen sík pólusa is?

Jeleljen A' ily helyet; ennek feltétele: $A_0 A = A_0 A' = AP$; e szerint (4)-ből:

$$h_0 + (h_1 + h_2) \overline{A_0 A'} + h_3 \overline{A_0 A'}^2 = 0 \quad (5)$$

Az egyenlet $\overline{A_0 A'}$ számára két gyökértéket ad, e szerint két ily pont létezik minden generatrixen.

E pontok a felületen egy két részből álló görbét, az egybeeső érintési pontok és pólusok görbét képezik; ezen görbéknek s' görbéknek is fogjuk nevezni.

b. Húzzunk e görbe tetszőleges A' pontjában a görbéhez érintő egyeneset, $A'T'$ -t. Ez az érintő mindenestre az ugyanezen A' pontban az egyenesvonalú felülethez húzott érintősíkban fekszik, mely sík itt (az egybeeső A és P esetében) egybeesik itt a $P = A'$ pont polársíkjával; ezért az $A'T'$ érintő vonal egyszersmind az A' polársíkjába is esik, és ezen sík A' pólusán megyen keresztül.

Ámde, (a 301. §. 2. tétele szerint) minden egyenes, mely a polársíkban fekszik és a póluson megyen keresztül, merőleges valamenynyi pontjának sebességére, és így az s' görbének érintői egy lineáris sugárcomplexushoz tartoznak.

Hogy ez a complexus ugyanaz, a melyhez az AE generatrixek is tartoznak, az abból következik, hogy mind az AE , mind az $A'T'$ az A' pont érintő- és polársíkjában fekszik és hogy mind a kettő ezen

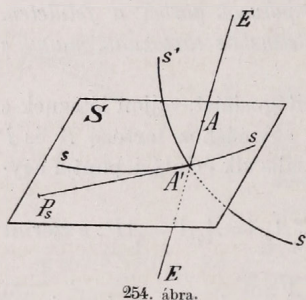
sík A' pólusán megyen keresztül és így mindig egy sík sugárnyalábhoz (sugársorhoz) tartoznak (313. §. 1. tétele).

c. Tekintettel ezen eredményre és a 315. §. tételére, az s' görbének osculáló síkja az A' -ban egyszersmind ezen A' pontnak poláris síkja, de egyszersmind az egyenesvonalú felület érintő síkja az A' -ban.

Az oly görbe, melynek osculáló síkja mindenütt érintő síkja annak a felületnek, melyen e görbe fekszik, ezen *felület asymptotagörbéjé-nek* mondatik.

318. *Első fokú complexus vonalaiból alkotott egyenesvonalú felületek sík metszőgörbéinek osztálya ugyanaz, mint az s' görbék rendje.*

1. Messük e felületet valamely P_s pólusú S síkkal és legyen s az így származó metszőgörbe (254. ábra); legyen továbbá A' ezen görbé-



254. ábra.

nek azon pontja, melyre nézve a felülethez húzott érintő sík pólusa és érintési pontja egybeesik (megelőző §.)

Az A' pont az S sík és az A' érintő síkja metsző egyenesének egy pontja; de ekkor (a 301. §. 4. tétele szerint) e metsző egyenesének az S sík pólusán, P_s -en is kell átmennie.

Miután pedig az s görbe érintője egyszerre mind a metsző síkban S -ben, mind pedig az A' tangenciális síkjá-

ban fekszik: ez az érintő nem lehet más, mint a $P_s A'$ egyenes.

2. Jelelve az egybeeső érintési pontok és pólusok görbéit ismét s' -el, az 1. pont szerint áll:

Ha az S sík P_s pólusából az s metszőgörbéhez érintőt húzunk, akkor az érintés A' pontja az s' görbe egyik pontjának kell lennie.

[Még így is fogalmazhatjuk e következtetést: Rajzunkban (254. ábra) az $EAA'E$ egyenes a felület valamely generatrixe, mely A' -en halad át, $EA'P_s$ e felület érintő síkja az A' -ban, mely az $A'E$ és az $A'P_s$ egyeneseket tartalmazza, mindegyikük merőleges lévén pontjaik sebességére, közös metszőpontjuk, A' az érintő sík pólusa, azaz az s' görbe egy pontja].

3. Mivel az A' pont az S síknak és az s' görbének is a metszőpontja és miután abban az esetben, ha több helyen metszené az S az s' görbét, akkor minden ilyen A' metszőpontra nézve fogna állani, hogy a hozzá a P_s pólusból húzott $P_s A'$ egyenes egyszersmind az s metszőgörbének érintője az A' pontokban, azért következik:

Az S sík ugyanynyi pontban fogja metszeni az s' görbét, a hány érintőt húzhatni az S -nek P_s pólusából az s metszőgörbéhez; más szóval, a görbék osztályozását, mint rendszeren e metszőpontokra, illetve érintőkre alapítva: az egybeeső érintési pontok és pólusok s' térbeli görbéjének rendje egyenlő a felület bármely sík metszőgörbéjének osztályával. (V. ö. a 369. §. 22. feladatát).

319. §. *A congruentiákról és directrixekről. A congruentia tengelye és centrális síkja. A congruentiát első fokú két complexus határozza meg.*

PLÜCKER kezdeményezésére *congruentia*-nak nevezik azt a sugáralakzatot, azon egyenesek összességét, melyet két első fokú complexus közös vonalai alkotnak. A congruentia könnyebb tanulmányozása céljából a következő megállapodásokból indulunk ki:

1. Azon egyenesek összességét, melyek adott két egyenest metszenek, *sugár-congruentiának* nevezik; az adott két egyenest pedig a *congruentia directrixek*nek.

Továbbá, a directrixek legrövidebb távolsága, d , a *congruentia tengelye* és az e tengelyt derékszög alatt felező sík a *congruentia síkja*.

A következőkben bebizonyítjuk, hogy e §. első mondatának és 1. pontjának definitiói egymást teljesen fedik.

2. Itt csak a két directrix egymáshoz viszonyított helyzetét tételezzük fel adottnak (250. ábra, 523. l.), azaz legrövidebb távoluknak, $d=a+b$ -nek nagyságát és irányát és az általuk (illetve párhuzamosaik által) képezett szöget, $\epsilon=\gamma+\delta$ -át, melynek síkja az $a+b$ -re merőleges.

Ha azt keressük, vajjon e két directrix egy conjugált egyenespár (tengelypár), akkor, miként a 306. §-ban és az 250. ábrával kimutattuk, a conjugált egyenespár centrális tengelye merőleges e két vonal legrövidebb távolára, $d=a+b$ -re és megfelel az egyenletnek [284. §. (6), de a 306. §. 4. pontjának jelölésével]:

$$-c_o: \omega = a \operatorname{tg} \delta = b \operatorname{tg} \gamma, \quad \dots \quad (1)$$

hol γ és δ a két conjugált egyenesnek (itt a két directrixnek) hajlásszöge a centrális tengelyhez, míg a , b e directrixek távolsága a centrális tengelytől.

Ámde a centrális tengelynek e két directrixhez viszonyított helyzetét legalább két adat, az a és γ , vagy a b és δ határozza meg; mivel pedig az (1) egyenlet csak egy összefüggést szolgáltat, ezért két directrixnek végtelen sok oly centrális tengelye van, mely a d -re merőleges és az (1)-nek is megfelel, s mely tengelyek mindegyikére nézve e két directrix conjugált egyenespár.

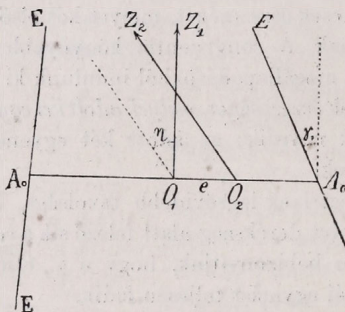
De, minden ily centrális tengelyhez egy első fokú complexus tar-

tozik (314. §. 3. pontja) melynek conjugált egyenespárjainak egyike mindenkor maga a két directrix és így a directrixeket metsző egyenesek valamenynyien ugyanezen complexushoz tartoznak (313. §. 5. tétele).

Evvel ki van mutatva, hogy végtelen számú oly első fokú complexus létezik, melyhez az adott congruenciának valamenynyi sugara tartozik.

3. Ellenben könnyű kimutatni, hogy egy congruenciát első fokú két complexus teljesen határoz meg.

Ugyanis, legyen O_1Z_1 és O_2Z_2 első fokú két complexus két centrális tengelye (255. ábra) és $(c_0:\omega)_1=k_1$, $(c_0:\omega)_2=k_2$ a hozzájuk tartozó két



255. ábra.

állandó csavarodási viszony, e a tengelyek egymástól való legrövidebb távolsága és η a kettő között lévő szög.

Jeleljék a_1 , b_1 ; γ_1 , δ_1 az O_1Z_1 -hez, a_2 , b_2 ; γ_2 , δ_2 az O_2Z_2 -hez tartozó conjugált két egyenespár adatait, akkor ezekre nézve az (1) szerint:

$$\left. \begin{aligned} a_1 \operatorname{tg} \delta_1 &= b_1 \operatorname{tg} \gamma_1 = -(c_0:\omega)_1 = -k_1; \\ a_2 \operatorname{tg} \delta_2 &= b_2 \operatorname{tg} \gamma_2 = -(c_0:\omega)_2 = -k_2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Ha azt kívánjuk, hogy e két conjugált pár egybe essék, azaz, ha azt az E , E' conjugált egyenespárt keressük, mely egyszerre mindkét centrális tengelyhez tartozik, akkor ezen egyenespár legrövidebb távolsága, d , egyszerre merőlegesnek tartozik lenni mindkét centrális tengelyre; azaz a d az e mentén fekszik; továbbá, kell hogy álljon:

$$\left. \begin{aligned} d &\pm a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = d \\ e &= -(a_2 - a_1) = b_2 - b_1 = e \\ \varepsilon &= \gamma_1 + \delta_1 = \gamma_2 + \delta_2 = \varepsilon \\ \eta &= -(\gamma_2 - \gamma_1) = \delta_2 - \delta_1 = \eta \end{aligned} \right\}; \quad (3)$$

és így a (2) egyenletekből.

$$\left. \begin{aligned} a_1 \operatorname{tg} \delta_1 &= -k_1; \\ b_1 \operatorname{tg} \gamma_1 &= -k_1; \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} (a_1 - e) \operatorname{tg} (\delta_1 + \eta) &= -k_2 \\ (b_1 + e) \operatorname{tg} (\gamma_1 - \eta) &= -k_2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Légyen $O'Z$ a congruentia tetszőleges complexusához tartozó centrális tengely, melynek tetszőleges A' pontjának coordinátái x, y, z ; e tengely jellemzői (256. ábra):

$$\begin{aligned}(E, E) \angle \varepsilon, \quad (E, Z) \angle \frac{1}{2} \varepsilon = (E, Z) \angle; \quad (Z, Z') \angle = \frac{1}{2} \vartheta; \\(E, Z) \angle = \gamma; \quad (E, Z') \angle = \delta; \\ \varepsilon = \gamma + \delta; \quad \vartheta = \delta - \gamma; \quad \gamma = \frac{1}{2}(\varepsilon - \vartheta); \quad \delta = \frac{1}{2}(\varepsilon + \vartheta) \\ A_0 A_0 = d; \quad OO' = x, \quad A_0 O' = a = \frac{1}{2}d - x; \quad A_0 O' = b = \frac{1}{2}d + x.\end{aligned}$$

Ámde az $O'Z$ centrális tengelyre nézve a 319. §. (1) egyenlete szerint:

$$a \operatorname{tg} \delta = b \operatorname{tg} \gamma, \quad \dots \quad (1)$$

azaz itt:

$$\frac{\frac{1}{2}d - x}{\frac{1}{2}d + x} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varepsilon - \vartheta)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varepsilon + \vartheta)} = \frac{\sin \varepsilon - \sin \vartheta}{\sin \varepsilon + \sin \vartheta} = \Theta;$$

hol Θ e tört rövidebb jelölése. Ebből:

$$x = \frac{1}{2}d \frac{1 - \Theta}{1 + \Theta} = + \frac{1}{2}d \frac{2 \sin \vartheta}{2 \sin \varepsilon},$$

vagy d és ε állandó lévén:

$$x = \frac{1}{2} \frac{d}{\sin \varepsilon} \cdot \sin \vartheta \quad \dots \quad (2)$$

Amde az A' pont y, z coordinátái és az $\frac{1}{2} \vartheta$ között fennálló kapcsolat az ábra szerint:

$$O'A' = \sqrt{y^2 + z^2}; \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta = \frac{y}{z};$$

továbbá:

$$\frac{1}{2} \sin \vartheta = \sin \frac{1}{2} \vartheta \cos \frac{1}{2} \vartheta = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \vartheta} = \frac{y}{z} \cdot \frac{z^2}{y^2 + z^2}$$

és így végre a (2)-ből:

$$x(y^2 + z^2) = \frac{d}{\sin \varepsilon} \cdot yz \quad \dots \quad (3)$$

Ez a keresett tengelyfelület egyenlete; ezt PLÜCKER találta legelőször (1865); kinematikai jelentését BALL vette észre (1871) ki azt CAYLEY javaslatára *cylindroid*-nak nevezte.

E felület a merev rendszer azon kényszermozgásainál, melyek négy adott feltétel mellett következnek be, fontos alkalmazást nyer [360. és 361. §§.]

A felület paramétere, $d : \sin \varepsilon$ kizárólagosan a congruentia directrixinek legrövidebb távolságától d -től és egymással képezett ε szögtől függ.

A felület további megvizsgálását az olvasóra bízuk.

321. §. *Lineáris sugárcomplexusok háromtagú csoportja. A közös egyenesronalú felület egyhéjú hyperboloid (a regulus).*

1. Önmagukhoz conjugált három egyeneset metsző conjugált egyenespárok helye az adott három egyenesen átmenő egyhéjú hyperboloid.

A 308. §. II. tétele szerint bármily irányú és helyzetű három egyenes, N_1, N_2, N_3 egy meghatározott egyhéjú hyperboloidon fekszik és e felület generatrixeinek egyik rendszeréhez tartozik; továbbá ha ez egyenesek pontjaik sebességére merőlegesek, akkor mindig léteznek az ezeket metsző oly conjugált E, E egyenesek (directrixek), melyek e generatrixek másik rendszeréhez tartoznak (309. §.).

Mintán pedig a 307. §. II. tétele szerint az egyik rendszer minden egyes egyenese metszi a másik rendszer valamenynyi egyenesét, azért az ily E, E egyenespárok mindegyike azon generatrix-rendszer valamenynyi egyenesét metszi, mely rendszerhez a szintén metszett N_1, N_2, N_3 adott egyenesek tartoznak.

[E szerint ez utóbbi generatrix-rendszer valamenynyi egyenese, azaz maga a hyperboloid is, mind azon complexusokhoz tartoznak, melyek a három feltétel mellett valamenynyi mozgásnál lehetségesek (363. §.).]

2. *Három complexus határozza meg a hyperboloidot.* Könnyű bebizonyítani, hogy három elsőfokú complexus, C_1, C_2, C_3 , a hyperboloidot meghatározza.

Ugyanis a C_2, C_3 ; a C_3, C_1 ; a C_1, C_2 három complexuspár meghatároz (319. §. 1. pontja) három congruenciát, K_1 -t, K_2 -t, K_3 -t és velük a hozzátartozó directrixek három párját, E_1, E_1 -t; E_2, E_2 -t; E_3, E_3 -t. A három complexus közös egyenesei azok, melyek e hat directrix mindegyikét metszik; ebből következik, hogy ezeknek a közös egyeneseknek egyhéjú hyperboloidon kell feküdniök, azaz ezek e felület egyik generatrix-rendszerének egyenesei, míg másik generatrix-rendszeréhez a nevezett directrix-párok tartoznak.

Ezen oknál fogva PLÜCKER azon complexusok összesességét, melyek közös egyenesei egy egyhéjú hyperboloid generatrix-rendszerei egyikét képezik, a *complexusok háromtagú csoportjának* nevezte, míg közös egyenesvonalú felületüket, a hyperboloidot, sokszor e csoport *regulusának* nevezik.

Ezek az eredmények alkalmazást nyernek a három feltételnek alávetett merev rendszer mozgásánál (363. §.).

322. §. *Adott két egyenes mellett a conjugált tengelypárok congruenciát alkotnak.*

Ha csak két önmagához conjugált egyenes, N_1 és N_2 van adva, akkor egy harmadik, tetszőlegesen választható ugyanily N egyenes hozzákapcsolása által nyerjük a megelőző §. minden eredményét.

A hyperboloid, melyen N_1, N_2, N fekszik oly tulajdonságú, hogy e három egyenes a felület generatrix-egyenesei egyik rendszeréhez tartoznak, míg az N_1 -t és N_2 -t metsző egyenesek mind a másik generatrix

rendszerhez tartoznak és ezek közül az E , E conjugált párok a directrixek.

Miután az N harmadik önmagához conjugált egyenes helye tetszőlegesen választható, a hyperboloid is tetszőleges lesz és így az N -nek alkalmas és mindig változtatott választása folytán bármily tetszőleges két egyenes is, mely az adott N_1 -t és N_2 -t metszi, egy conjugált egyenespárt képez.

E szerint a conjugált egyenespárok összessége itt oly congruentiát alkot, melynek directrixei az adott N_1 és N_2 egyenesek.

323. §. *Adott egy egyenes mellett a conjugált egyenespárok összessége ezen egyenesen átmenő valamenynyi egyenes.*

Ha csak *egy* önmagához conjugált egyenes N_1 van adva, akkor az előbbi §. esetét nyerjük, ha ehhez egy tetszőleges ily N egyenest választunk (megjegyezve, hogy N_1 és N külön-külön valamenynyi pontjaik sebességére merőlegesek).

E szerint az N egészen tetszőleges lévén, bármily két egyenes is, mely az adott N_1 -t metszi, oly conjugált egyenespárnak választható, mely pár egyenesei, mint tengelyek körüli forgások a rendszer momentán forgását teljesen helyettesíthetik.

Mindezek az N_1 -t metsző egyenesek önmagukban is sugárcomplexust alkotnak, mely azonban nem oly sajátos, mint a lineáris sugárcomplexus, mert a jelenlegi complexus azon egyenesek összességét tartalmazza, melyek egy adott egyenest metszik. E complexus azon egyenesei, melyek metsző pontjai a végesben fekszenek, a zérustól különböző szöget képeznek az adott egyenessel; de ha a metsző pont a végtelenben fekszik, párhuzamosakká válnak az adott egyeneshez.

7. Merev pontrendszer általános mozgásának (elsőrendű) gyorsulása.

324. §. *A rendszer gyorsulási összetevői szilárd koordináta-rendszerben.*

1. Ha X, Y, Z , a pontrendszerrel merev kapcsolatban lévő (elszálító) tengelyrendszer, XYZ a térben nyugvó koordináta-rendszer és x, y, z ; illetve x, y, z valamely A rendszerbeli pont koordinátái a két tengelyrendszerben (241. ábra, 499. l.), akkor a 292. §. (1) egyenleteit az idő szerint differentiálva, nyerjük az A pont gyorsulási összetevőit az XYZ szilárd rendszerben:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_x &= x'' = a'' + x_1 \alpha_1'' + y_1 \beta_1'' + z_1 \gamma_1'' \\ \varphi_y &= y'' = b'' + x_2 \alpha_2'' + y_2 \beta_2'' + z_2 \gamma_2'' \\ \varphi_z &= z'' = c'' + x_3 \alpha_3'' + y_3 \beta_3'' + z_3 \gamma_3'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Itt az a'' , b'' , c'' jelentik a mozgó rendszer O , kezdőpontjának gyorsulási összetevőit; e szerint a $\varphi_x - a''$, $\varphi_y - b''$, $\varphi_z - c''$ különbségek az x , y , z helyzetű pontnak az O , kezdethez viszonyított relativ gyorsulási összetevői.

2. Ellenben, ha az idézett §. (3) egyenleteit differentiáljuk az idő szerint és ugyanazt a transzformációt végezzük, mint a gömbi mozgás megfelelő tárgyalásában (248. §.), nyerjük:

$$\varphi_x = x'' = u'_x + \omega'_y z - \omega'_z y + \omega_x (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 x, \text{ s i. t. } \quad (2)$$

Amde, mivel a tekintetbe vett A pont távolsága a szilárd O -tól:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

és az ω -nak vetületét az r mentén ω_r -rel jelezve:

$$r\omega_r = x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z,$$

a (2) írható:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_x &= u'_x + \omega'_y z - \omega'_z y + r\omega_r \omega_x - \omega^2 x \\ \varphi_y &= u'_y + \omega'_x z - \omega'_z x + r\omega_r \omega_y - \omega^2 y \\ \varphi_z &= u'_z + \omega'_x y - \omega'_y x + r\omega_r \omega_z - \omega^2 z \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (3)$$

Itt az u'_x , u'_y , u'_z jelentik a mozgó pontrendszer azon pontjának gyorsulását, mely a t időpillanatban az XYZ rendszer O kezdetében van; a gyorsulás többi részei az O kezdet körüli forgásból származnak.

Ebből következik, hogy a csavarmozgás gyorsulása csak anynyiban különbözik a pont körül mozgó rendszerétől (248—256. §§.), a menyenyiben az utóbbihoz még az u'_x , u'_y , u'_z componensek is járulnak.

325. §. *A rendszer gyorsulásának szétbontása translatórius, szöggyorsulási és centripetális gyorsulásra.*

A megelőző §. végén kifejezett gyorsulási componensek három részből állóknak tekinthetők.

1. Az első rész összetevői az u'_x , u'_y , u'_z ; e szerint ez az első rész a merev pontrendszer azon pontjának gyorsulása, mely t időpillanatban az XYZ rendszer O kezdetében van; a gyorsulás ezen része közös valamenynyi mozgó rendszerbeli pontra nézve.

2. Ha megegyezőleg a gömbi mozgás jelölésével φ_ω -val (vagy ω_1 -el) jelöljük a szöggyorsulást, úgy, hogy

$$\varphi_\omega^2 = \omega_x'^2 + \omega_y'^2 + \omega_z'^2,$$

akkor a 249. §. értelmezése szerint a gyorsulás második részének

$$\omega'_y z - \omega'_z y, \quad \omega'_x z - \omega'_z x, \quad \omega'_x y - \omega'_y x,$$

összetevőiből oly eredő gyorsulás adódik, melynek értéke egyenlő φ_ω -nak és az (xyz) pontnak a szöggyorsulás tengelyétől való távolsága szorzatával; e gyorsulás az (xyz) ponton átmenő, a szöggyorsulás tengelyére merőleges síkban fekszik (i. h. 210. ábra).

3. A gyorsulás harmadik, az ω szögsebességtől függő része az idézett 249. §. 1. b. pontja szerint a mozgás *centripetális* gyorsulása, melynek értéke a szögsebesség négyzetének és az (xyz) pontnak a momentán forgás tengelyétől való távolságnak szorzatával egyenlő, míg iránya e tengelyre merőleges és e távolságnak a tengelyen fekvő talppontja felé van fordítva.

326. §. Az általános mozgás gyorsulásai kifejezéseinek egyszerűsítése a koordináta-rendszer alkalmas választása folytán.

1. Válaszszuk a t -kor érvényes momentán csavartengelyt a Z tengely gyanánt; ekkor a megelőző §. 2. pontjában:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x = 0; \quad \omega_y = 0; \quad \omega_z = \omega; \\ r\omega_r = \omega z; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

legyen $A_0 I = \omega$ e szögsebességet képviselő vector. Továbbá, mivel e csavartengely az O kezdeten megyen keresztül, ezen kezdetben levő A_0 rendszerbeli pontnak sebessége is csak e tengely mentén lehet, azaz a translatórius sebesség összetevői itt:

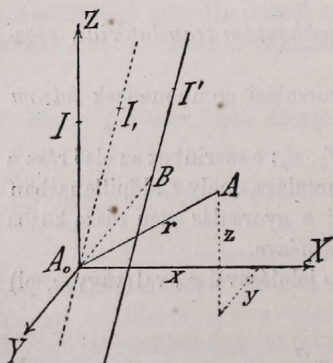
$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_z = u \dots \dots \dots (1a)$$

2. A $t + \Delta t$ -kor érvényes BI' csavartengely (257. ábra) a Z tengelyhez végtelen közel fekszik ugyan, de ezt általánosságban véve nem metszi.

De, ha ezt a $t + \Delta t$ -időpontban érvényes momentán tengelyt önmagához párhuzamosan, addig eltoljuk, míg ez a Z tengelyt A_0 -ban metszi, akkor helyzete $A_0 I$, és ez a két vonal síkot határoz meg, melynek normálisába fektetjük az Y tengelyt.

Az Y tengely egyszersmind merőleges a $t + \Delta t$ időponti tényleges csavartengelyre is, mert a mondottak szerint az Y tengely iránya a két momentán tengelyt egybekapcsoló legközelebb távolú $A_0 B$ vonal irányával esik egybe.

Az A_0 -nak sebessége $t + \Delta t$ időpillanatban két componensből áll. Az egyik a transláció, mely a $t + \Delta t$ idő-



257. ábra.

ponti BI' csavartengely mentén van; ez az imént tett megállapodás szerint az Y tengelyre merőleges, azaz a ZX síkhoz párhuzamos. A másik összetevő ugyanezen csavartengely körüli forgásból származik; mivel pedig az

§§-okban, a t időpillanatban egybeesik a térben szilárd és nyugvó XYZ koordináta-rendszerrel.

A mozgó pontrendszer valamely A pontjának az XYZ koordináta-rendszerre vonatkozó absolut koordinátái, sebességi és szögsebességi, gyorsulási és szöggyorsulásai componensei legyenek rendre $x, y, z; v_x, v_y, v_z; \omega_x, \omega_y, \omega_z; \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z; \omega'_x, \omega'_y, \omega'_z$, végre a pontrendszer azon pontja, mely t -kor az XYZ tengelyek O kezdőpontjával esik egybe, u sebességgel bírjon, melynek u_x, u_y, u_z a componensei. Ugyanezen A pontnak koordinátái az X, Y, Z , rendszerben legyenek x, y, z ; ezek állandók és ezért az A pontnak nincs is semmiféle sebessége és gyorsulása e rendszerben. De ezen pont absolut sebességét és gyorsulását szabad *vetíteni* oly irányokra (egyenesekre), melyek egybeesnek az X, Y, Z , elszállító tengelyek mindenkori irányjaival.

Ezeket a vetületeket rendre következőleg jeleljük: $v_x, v_y, v_z; \omega_x, \omega_y, \omega_z; \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z; \omega'_x, \omega'_y, \omega'_z$; legyen végre az X, Y, Z , rendszer O , kezdő pontjának (mely most, t -kor az O -val egybeesik) a sebessége u ; összetevői u_x, u_y, u_z , hol $u = u$.

1. Az ezen §. elején tett megjegyzés szerint, mivel az X, Y, Z , momentán mozgása mindenkor ugyanaz, mint a merev pontrendszeré, t időpontra nézve áll:

$$\left. \begin{array}{l} x=x, \\ y=y, \\ z=z, \end{array} \right\}; \left. \begin{array}{l} v_x=v_x, \\ v_y=v_y, \\ v_z=v_z, \end{array} \right\}; \left. \begin{array}{l} \omega_x=\omega_x, \\ \omega_y=\omega_y, \\ \omega_z=\omega_z, \end{array} \right\}; \left. \begin{array}{l} \varphi_x=\varphi_x, \\ \varphi_y=\varphi_y, \\ \varphi_z=\varphi_z, \end{array} \right\}; \left. \begin{array}{l} \omega'_x=\omega'_x, \\ \omega'_y=\omega'_y, \\ \omega'_z=\omega'_z, \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad (1)$$

Végre még megjegyezzük, hogy $\overline{OA}=r$ és $\overline{OA}=r$, távolságok és így az ω_r és ω_r , menynyiségek továbbá az u és u , sebességek is meg-egyeznek egymással, azaz, hogy:

$$r\omega_r = x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z = x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z = r\omega_r, \quad . \quad . \quad (2) \\ u_x = u_x; \quad u_y = u_y; \quad u_z = u_z.$$

2. Felcserélve a 324. §. (3) egyenleteiben az (1) és (2) szerint az u , veszzszóval ellátott menynyiségekkel az ezen jelölés nélkülieket, nyerjük:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_x = u'_x + \omega'_y z - \omega'_z y + r\omega_r \omega_x - \omega_x^2 x, \\ \varphi_y = u'_y + \omega'_z x - \omega'_x z + r\omega_r \omega_y - \omega_y^2 y, \\ \varphi_z = u'_z + \omega'_x y - \omega'_y x + r\omega_r \omega_z - \omega_z^2 z, \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

E formulák szerkezete teljesen megegyezik az álló tengelyekre vonatkozó gyorsulási componensek idézett kifejezéseivel; de itt is szemmel tartandó az, hogy a $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$, nem jelentik az A pont gyorsulási összetevőit az X, Y, Z , rendszerben (mert ebben nem létezhetik semmiféle sebesség és gyorsulás), hanem e gyorsulás vetületeit

azokra az egyenesekre, melyek minden időpillanatban az X , Y , Z , elszállító tengelyekkel egybeesnek.

A (3) formulákban az XYZ rendszernek már nyoma sincs; e formulák minden időpillanatra nézve érvényesek és az X, Y, Z , rendszerre vonatkozó jellemzők segítségével vannak kifejezve (v. ö. a 339. §. 3. pontját).

328. §. Az általános mozgás gyorsulásának középpontja; ennek helyzete. E gyorsulásnak ezen középpontra vonatkoztatott kifejezései.

A rendszer általános mozgása vizsgálatánál kiderült, hogy nem létezik pont, melynek sebessége zérus (274. §. 5. pontja); itt bebizonyítjuk, hogy mindig létezik oly pont, melynek gyorsulása zérus.

1. Jeleljék x_0 , y_0 , z_0 e pont coordinátáit, ezek, a 326. §. (4) egyenletei szerint megfelelnek az

$$\left. \begin{aligned} u'_x &= \omega'_z y_0 + \omega^2 x_0 \\ 0 &= \omega'_z x_0 + \omega'_x z_0 - \omega^2 y_0 \\ u'_z &= -\omega'_x y_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Ezen egyenletekből rendre:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= + \frac{u'_x \omega'_x + u'_z \omega'_z}{\omega^2 \omega'_x} \\ y_0 &= - \frac{u'_z}{\omega'_x} \\ z_0 &= + \frac{u'_x \omega'_x \omega'_z + u'_z \omega'^2_z + u'_z \omega^4}{\omega^2 \omega'^2_x} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Evvel a gyorsulás középpontjának helye ki van fejezve az ω_x , ω_y , ω_z szögsebességi componensek és az XYZ rendszer kezdetének u'_x , u'_y , u'_z gyorsulási összetevői által.

2. Vonjuk le az (1) egyenleteket a 326. §. (4) egyenleteiből; akkor ha a gyorsulás középpontjához viszonyított coordináták

$$\left. \begin{aligned} x - x_0 &= \xi; & y - y_0 &= \eta; & z - z_0 &= \zeta; \\ \varphi_x &= -\omega'_z \eta - \omega^2 \xi; & \varphi_y &= \omega'_z \xi - \omega'_x \zeta - \omega^2 \eta; & \varphi_z &= \omega'_x \eta. \end{aligned} \right\} \dots \dots (3)$$

Ezen kifejezésekből az u'_x és az u'_z eltűnt; helyükbe a gyorsulás középpontjának coordinátái léptek; maguk az egyenletek az idézett §. értelmében következőleg interpretálhatók:

a. A szöggyorsulási gyorsulás componensei itt:

$$\left. \begin{aligned} -\omega'_z \eta, & \quad \omega'_z \xi - \omega'_x \zeta, & +\omega'_x \eta; \\ -\omega^2 \xi, & \quad -\omega^2 \eta, & 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots (4)$$

b. A centripetális gyorsulás összetevői:

Szemmel tartva ugyane 326.§. értelmezését és koordináta-rendszere fekvését, az a . alatt írt (szöggyorsulási) gyorsulás componensei oly eredő gyorsulást adnak, melynek értékét nyerjük, ha a ξ, η, ζ koordináták kezdetén (a gyorsulás középpontján) keresztül a φ_ω szöggyorsulás irányához párhuzamos tengelyt húzunk és az (x, y, z) pontnak [avagy a vele identikus (ξ, η, ζ) pontnak] e tengelytől való k távolságával szorozzuk a φ_ω -t; maga a $k\varphi_\omega$ szöggyorsulási gyorsulás a (ξ, η, ζ) ponton átmenő, a szöggyorsulás tengelyére merőleges síkban fekszik.

A b . alatt írt centripetális gyorsulás értéke az idézett §. szerint egyenlő a ω szögsebesség négyzetének szorzatával a (ξ, η, ζ) pontnak azon tengelytől való távolságával, mely tengely a momentán forgás tengelyéhez párhuzamosan, a ξ, η, ζ koordináták kezdetén (a gyorsulás középpontján) át lett húzva.

További részletek felkeresését az olvasóra bizzuk.

329. §. Az általános mozgás gyorsulásának normális és tangenciális componensei derékszögű és polárkoordinátákban.

Alkalmazzuk a 276. és 326. §§-ban behozott koordináta rendszert, Z legyen a momentán forgás tengelye, az Y tengely a következő momentán tengely és a Z közötti legrövidebb távolságot tartalmazza, az X tengely merőleges mindkettőre. Az A távolsága a Z tengelytől q , hol $q^2 = x^2 + y^2$.

A merev rendszer tetszőleges xyz összszerendezőjű A pontja φ gyorsulásának a v sebesség mentén fekvő componensét *tangenciális*, a sebességre merőleges összetevőjét pedig *normális* componensnek nevezzük és ezeket φ_t és φ_n -nel jeleljük.

Az A pont sebességének iránya megegyezik a momentán csavarvonal érintőjének irányával; a v sebesség, ennek derékszögű összetevői valamint iránycosinusai:

$$\left. \begin{aligned} v &= \sqrt{c_0^2 + \omega^2 q^2}; \\ v_x &= -\omega y; \quad v_y = +\omega x; \quad v_z = c_0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\omega y}{v}; \quad +\frac{\omega x}{v}; \quad +\frac{c_0}{v} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Magukat a φ_t és φ_n componenseket a gömbi mozgás gyorsulása ugyanily elbontásához hasonlóan képezzük (253. §.), és itt is egybeesik az XYZ koordináta-rendszer az ott használttal.

1. A gyorsulás *tangenciális* componensét nyerjük, ha a $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ összetevőket [326. §. (4)] a v irányára vetítjük.

Nyerjük:

$$\varphi_t = -\frac{\omega y}{v} (u'_x - \omega'_z y - \omega^2 x) + \frac{\omega x}{v} (\omega'_z x - \omega'_x z - \omega^2 y) + \frac{c_0}{v} (u'_z + \omega'_x y),$$

avagy, némi rövidítéssel:

$$\varphi_t \sqrt{c_0^2 + q^2 \omega^2} = \omega (q^2 \omega'_z - x z \omega'_x - y u'_x) + c_0 (u'_z + y \omega'_x) \quad . . . \quad (3)$$

2. A gyorsulás *normális* componense φ_n , a v normális síkjában fekszik; ezt a φ_n -et a φ_{n_1} és φ_{n_2} két componensből tekintjük összetettnek, melyek közül a φ_{n_1} a q mentén, a φ_{n_2} a q -re merőlegesen, de mindkettő a v normális síkjában fekszik.

a. A q iránycosinusai

$$x : q, \quad y : q, \quad 0; \quad . . . \quad (4)$$

ezzért a 326. §. (4) formulái alapján

$$\varphi_{n_1} = x (u'_x - \omega'_z y - \omega^2 x) : q + y (\omega'_z x - \omega'_x z - \omega^2 y) : q,$$

vagy:

$$\varphi_{n_1} q = -y z \omega'_x - \omega^2 q^2 + x u'_x \quad . . . \quad (5)$$

b. A q -ra merőleges irány, mely a v normális síkjában fekszik, egy-szerre merőleges a q -ra és a v -re; ezeknek iránycosinusait a (2) és (4) adják meg és így a φ_{n_2} iránycosinusai rendre [Math. repertórium 46. §. (2)]:

$$-\frac{\omega x}{v} \cdot 0 + \frac{c_0}{v} \cdot \frac{y}{q}; \quad -\frac{c_0}{v} \cdot \frac{x}{q} - \frac{\omega y}{v} \cdot 0; \quad + \frac{\omega y}{v} \cdot \frac{y}{q} + \frac{\omega x}{v} \cdot \frac{x}{q},$$

avagy:

$$+ \frac{c_0 y}{v q}; \quad -\frac{c_0 x}{v q}; \quad + \frac{\omega q}{v} \quad . . \quad (6)$$

Szorozva ezen iránycosinusokkal rendre a φ_x -t, φ_y -t, φ_z -t [326. §. (4)], nyerjük a φ_{n_2} -t:

$$\varphi_{n_2} = + \frac{c_0 y}{v q} (u'_x - \omega'_z y - \omega^2 x) - \frac{c_0 x}{v q} (\omega'_z x - \omega'_x z - \omega^2 y) + \frac{\omega q}{v} (u'_z + \omega'_x y),$$

vagy:

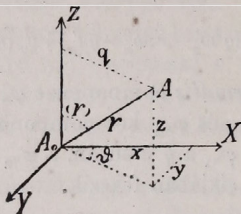
$$\varphi_{n_2} q \sqrt{c_0^2 + q^2 \omega^2} = -c_0 (q^2 \omega'_z - x z \omega'_x - y u'_x) + \omega q^2 (u'_z + y \omega'_x) \quad . . . \quad (7)$$

c. A normális gyorsulás négyzete e szerint:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n^2 &= \varphi_{n_1}^2 + \varphi_{n_2}^2; \\ \text{míg az összes gyorsulás négyzete:} \\ \varphi^2 &= \varphi_t^2 + \varphi_{n_1}^2 + \varphi_{n_2}^2. \end{aligned} \right\} \quad . . . \quad (8)$$

3. A (3), (5), (7) kifejezéseket sokszor polárkoordinátákban szokás kifejezni.

Jeleljék itt, mint a 253. §-s a 211. ábrában, $A_0A=r$ az A pont távolságát a BA_0 legrövidebb távolság A_0 talppontjától (257. és 258.



258. ábra.

ábrák), (r) a momentán forgás tengelye és az r közötti szöveget, ϑ a q és az X tengely közötti szöveget

Ekkor:

$$x=q \cos \vartheta, \quad y=q \sin \vartheta, \quad z=r \cos (r), \quad q=r \sin (r),$$

melyek segítségével a (3), (5), (7) rendre:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_t \sqrt{c_0^2 + q^2 \omega^2} &= q\omega [q\omega'_z - r\omega'_x \cos (r) \cos \vartheta - u'_x \sin \vartheta] + c_0 u'_z + qc_0 \omega'_x \sin \vartheta; \\ \varphi_{n_1} q &= -q [r\omega'_x \cos (r) \sin \vartheta + q\omega^2 - u'_x \cos \vartheta]; \\ \varphi_{n_2} q \sqrt{c_0^2 + q^2 \omega^2} &= -c_0 q [q\omega'_z - r\omega'_x \cos (r) \cos \vartheta - u'_x \sin \vartheta] + \omega q^2 (u'_z + q\omega'_x \sin \vartheta). \end{aligned} \right\} (9)$$

4. *Jegyzet.* Hátra van még annak a bebizonyítása, hogy ezen (9) formulák átmennek a gömbi mozgás gyorsulásának megfelelő componenseibe, ha c_0 , u'_x , u'_z menynyiségek helyébe zérust teszünk. Ekkor a (9)-ből, némi rövidítések után:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_t &= +r [\omega'_z \sin (r) - \omega'_x \cos (r) \cos \vartheta] \\ \varphi_{n_1} &= -r [\omega'_x \cos (r) \sin \vartheta + \omega^2 \sin (r)] \\ \varphi_{n_2} &= +r \omega'_x \sin (r) \sin \vartheta \end{aligned} \right\} (10)$$

Amde ott (251. §.) mint itt a 326. §-ban: $\omega_x=0$, $\omega_y=0$, $\omega_z=\omega$; továbbá ott írtunk ω'_z helyébe ω' -t és c -vel jelezve mint ott a sugáregységi gömbön a görbülés sebességét, írtuk volt $\omega'_x=c\omega$. (A két kúp közös érintkező síkja a ZX -sík).

E szerint a megegyezés teljes.

330. §. *Speciális esetek, melyekben az általános gyorsulás egyes componensei zérusok.*

1. *A rendszer azon pontjai, melyek gyorsulásainak normális componensei a q távolságra merőlegesek, melyekre nézve e szerint $\varphi_{n_1}=0$, megfelelnek a megelőző §. (5) formulája szerint az*

$$(x^2 + y^2) \omega^2 + yz\omega'_x - xu'_x = 0 (1)$$

egyenletnek, mely másodrendű felületet képvisel, melyet, mint azonnal kitűnik, a momentán (a Z)-tengelyre merőleges $z=\text{const.}$ síkok körökben metszenek.

A másodrendű felületek általános tulajdonságait tekintve [Math. repertorium 101. és 102. §§. (hol azonban, a sajtóhibák kijavításával, az egyhéjú hyperboloidnál $A_{11} < 0$ és $A_0 > 0$, a kéthéjúnál pedig $A_{11} < 0$ és $A_0 < 0$ feltételeknek kell állaniok)] itt:

$a_{11} = \omega^2$; $a_{22} = \omega_x'^2$; $2a_{23} = \omega_x'$; $2a_{14} = -u_x'$; a többi együtthatók zérusok.

Továbbá:

$$A = \begin{vmatrix} \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & \frac{1}{2}\omega_x' \\ 0 & \frac{1}{2}\omega_x' & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2 \frac{1}{4}\omega_x'^2; \quad A_{11} = \begin{vmatrix} \omega^2 & \frac{1}{2}\omega_x' \\ \frac{1}{2}\omega_x' & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}\omega_x'^2,$$

vége, miként [az idézett hely 101. §. (2) kifejezéséből közvetlenül] adódik: $A_0 = +\frac{1}{4}u_x'^2 - \frac{1}{4}\omega_x'^2$; ezekből következik, hogy az (1) egyhéjú hyperboloid.

Helyzete és alakja könnyen adódik. Írjunk

$$x = x_0 + a, \quad y = y_0 \cos \alpha + z_0 \sin \alpha; \quad z = -y_0 \sin \alpha + z_0 \cos \alpha;$$

melyek helyettesítésével az (1)-ből:

$$x_0^2 \omega^2 + y_0^2 (\omega^2 \cos^2 \alpha - \omega_x' \sin \alpha \cos \alpha) + z_0^2 (\omega^2 \sin^2 \alpha + \omega_x' \sin \alpha \cos \alpha) + \left. \begin{aligned} &+ y_0 z_0 (\omega^2 \sin 2\alpha + \omega_x' \cos 2\alpha) + x_0 (2a\omega^2 - u_x') - a u_x' + a^2 \omega^2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Hogy ezt az egyenletet a egyhéjú hyperboloid közöséges alakjába hozzuk, az x , és az y, z , együtthatóit el kell tüntetni, azaz tennünk kell:

$$\omega^2 \sin 2\alpha + \omega_x' \cos 2\alpha = 0, \quad 2a\omega^2 - u_x' = 0,$$

miáltal:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{\omega_x'}{\omega^2}; \quad a = +\frac{u_x'}{2\omega^2};$$

Ebből:

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^4 + \omega_x'^2}}; & \sin 2\alpha &= -\frac{\omega_x'}{\sqrt{\omega^4 + \omega_x'^2}}; \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^4 + \omega_x'^2}}; & \sin^2 \alpha &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^4 + \omega_x'^2}} \end{aligned}$$

Ezeknek helyettesítésével a (2)-ből lesz:

$$x_0^2 \omega^2 + y_0^2 \frac{1}{2} (\sqrt{\omega^4 + \omega_x'^2} + \omega^2) - z_0^2 \frac{1}{2} (\sqrt{\omega^4 + \omega_x'^2} - \omega^2) = + \frac{u_x'^2}{4\omega^2}. \quad (3)$$

az egyhéjú hyperboloid közönséges centrális egyenlete [Math. repertórium 102. §. (3)], melynek további, különösen az $\omega=0$, az $\omega'_x=0$ és az $u'_x=0$ esetekre vonatkozó értelmezését az olvasóra bizzuk.

2. A rendszer azon pontjai, melyek gyorsulásainak normális componensei csak a q mentén fekszenek, azaz, melyekre nézve $\varphi_{n_2}=0$, a megelőző §. (7) formulája szerint megfelelnek az

$$-c_0 [(x^2+y^2) \omega'_z - x\omega'_x - yu'_x] + \omega (x^2+y^2) (u'_x + y\omega'_x) = 0 \quad (4)$$

egyenletnek, mely harmadrendű és meglehetősen bonyolódott szerkezetű.

Az általa képviselt felületnek megvizsgálását az olvasónak ajánljuk.

3. A rendszer azon pontjai, melyeknek egész normális gyorsulása zérus, a $\varphi_n^2 = \varphi_{n_1}^2 + \varphi_{n_2}^2$ összefüggés folytán egyszerre megfelelnek a $\varphi_{n_1}=0$ és a $\varphi_{n_2}=0$ feltételeknek, azaz, ily pontok coordinátái eleget tesznek az (1) és a (4) egyenleteknek. E szerint ezek a pontok az (1) és a (4) által képviselt két felület közös metszögörbéjén fekszenek, mely görbének foka a nevezett két felület rendjének fokai szorzatával, itt tehát hat-tal egyenlő.

4. Oly pontok, melyek gyorsulásainak tangenciális componense zérus, (melyekre nézve a sebesség maximális vagy minimális értékű), a megelőző §. (3) formulája szerint eleget tesznek az

$$\omega [(x^2+y^2) \omega'_z - x\omega'_x - yu'_x] + c_0 (u'_z + y\omega'_x) = 0 \quad (5)$$

másodfokú egyenletnek, melyet, mint szintén azonnal észreveszszük, a momentán tengelyre merőleges $z=\text{constans}$ síkok körökben metszik.

A másodrendű felületek sémáit tartva szemmel [Math. repertórium 101. és 102. §§. (de ezen §. 1. pontjának észrevételével)], itt:

$$a_{11} = \omega\omega'_z; \quad a_{22} = \omega\omega'_z; \quad 2a_{31} = -\omega\omega'_x; \quad 2a_{24} = -\omega u'_x + c_0\omega'_x; \quad a_{44} = c_0 u'_z$$

a többi coefficiensek zérusok. Ezekből:

$$A = \begin{vmatrix} \omega\omega'_z & 0 & -\frac{1}{2}\omega\omega'_x \\ 0 & \omega\omega'_z & 0 \\ -\frac{1}{2}\omega\omega'_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}\omega^2\omega'^2_x \cdot \omega\omega'_z; \quad A_{11} = \begin{vmatrix} \omega\omega'_z & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

míg a $A_0 = -cu'_z \cdot \omega\omega'_z \frac{1}{4}\omega^2\omega'^2_x$, melynek előjele több tényezőtől függ.

Ezekből csak annyit következtethetünk, hogy e felületnek közép-pontja van.

Írjunk:

$$x = x, \cos \beta + z, \sin \beta, \quad y = y, + b, \quad z = -x, \sin \beta + z, \cos \beta.$$

Ezeket helyetteszve az (5) egyenletbe, belőle

$$\left. \begin{aligned} & x^2\omega (\omega'_z \cos^2 \beta + \omega'_x \sin \beta \cos \beta) + y^2\omega\omega'_z + z^2\omega (\omega'_z \sin^2 \beta - \omega'_x \sin \beta \cos \beta) \\ & + x,z,\omega (\omega'_z \sin 2\beta - \omega'_x \cos 2\beta) + y, (2\omega\omega'_z b - \omega u'_x + c_0\omega'_x) + \\ & + b^2\omega\omega'_z - b\omega u'_x + bc_0\omega'_x + c_0 u'_z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Az x, z , és az y , együtthatóit zérusnak téve, a β - és a b -re nve: éz

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{\omega'_x}{\omega'_z}; \quad b = \frac{\omega u'_x - c_0 \omega'_x}{2\omega \omega'_z}.$$

Ezekből:

$$\begin{aligned} \cos 2\beta &= \frac{\omega'_z}{\sqrt{\omega_x'^2 + \omega_z'^2}}; & \sin 2\beta &= \frac{\omega'_x}{\sqrt{\omega_x'^2 + \omega_z'^2}}; \\ \cos^2 \beta &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\omega'_z}{\sqrt{\omega_x'^2 + \omega_z'^2}}; & \sin^2 \beta &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\omega'_z}{\sqrt{\omega_x'^2 + \omega_z'^2}}; \\ b^2 \omega \omega'_z &= \frac{1}{4\omega \omega'_z} (\omega^2 u_x'^2 - 2c_0 u'_x \omega \omega'_x + c_0^2 \omega_x'^2); \\ -b \omega u'_x &= \frac{1}{4\omega \omega'_z} (-2\omega^2 u_x'^2 + 2c_0 u'_x \omega \omega'_x); \\ +b c_0 \omega'_x &= \frac{1}{4\omega \omega'_z} (2c_0 u'_x \omega \omega'_x - 2c_0^2 \omega_x'^2). \end{aligned}$$

E szerint a (6) egyenlet:

$$x^2 \frac{1}{2} (\sqrt{\omega_x'^2 + \omega_z'^2} + \omega'_z) + y^2 \omega'_z - z^2 \frac{1}{2} (\sqrt{\omega_x'^2 + \omega_z'^2} - \omega'_z) = \frac{(c_0 \omega'_x - u'_x \omega)^2}{4\omega^2 \omega'_z} - \frac{c_0 u'_z}{\omega} \quad (7)$$

A felület ennél fogva *egyhéjú* vagy *kéthéjú hyperboloid* a szerint, a mint a (7) jobb oldala *positiv* vagy *negativ*; ha $c_0 \omega'_x = u'_x \omega$, és $u'_z = 0$, akkor a felület *ellipszises kúppá* fajul.

Ha az $\omega'_z = 0$ volna, akkor az (5)-ből kiindulólág, $A = 0$ és a felület középpont nélküli felületbe megyen át és mivel itt mindig (i. h.):

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 0, & -\frac{1}{2} \omega \omega'_x \\ -\frac{1}{2} \omega \omega'_x, & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \omega^2 \omega_x'^2;$$

ez *hyperbolás paraboloidot* indikál.

5. A gömbi mozgás gyorsulásával megejtett vizsgálatokhoz hasonló kutatásokat végezhetnénk még (254. §.), melyeket az olvasónak ajánljuk.

330a. §. *A merev rendszer egyes pontjai pályáinak geometriai tulajdonságai. A görbületi tengelyek és az osculáló gömb szerepe.*

E helyen az 58. §. eredményeit kiegészíteni kívánjuk, különösen az irányban, mely egész rendszerek mozgásánál érvényre jut.

Az ott behozott jelölést megtartva, csak a t helyébe az s ívet független változó gyanánt választva (mi kinematilag a pontnak a görbén egyenletes sebességgel való mozgását jelenti) s az $''''$ jelekkel az s szerinti differenciálquotieneket jelezve, az idézett §. (1)–(6) egyenletei s velük kapcsolatos néhány mértani tétel [Math. repertórium 74. és 75. §§.]:

$$a=x'; \quad b=y'; \quad c=z'; \quad \dots \quad (1)$$

$$\lambda=\rho a'=\rho x''; \quad \mu=\rho b'=\rho y''; \quad v=\rho c'=\rho z'' \quad \dots \quad (2)$$

$$f=\rho(y'z''-z'y''); \quad g=\rho(z'x''-x'z''); \quad h=\rho(x'y''-y'x'') \quad \dots \quad (3)$$

$$X=y'z''-z'y''; \quad Y=z'x''-x'z''; \quad Z=x'y''-y'x'' \quad \dots \quad (3a)$$

$$\left. \begin{aligned} x'^2+y'^2+z'^2=1; \quad x'x''+y'y''+z'z''=0; \\ x''^2+y''^2+z''^2+x'x'''+y'y'''+z'z'''=0. \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (3b)$$

$$\rho=[x'^2+y'^2+z'^2]^{-\frac{1}{2}}=R^{-1}=[X^2+Y^2+Z^2]^{-\frac{1}{2}} \quad \dots \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau=\rho^{-1}[fx'''+gy'''+hz''']^{-1}=\rho^{-2}[x'''X+y'''Y+z'''Z]^{-1}; \\ \tau=R^2A^{-1}=\rho^{-2}A^{-1}=\rho^{-1}[X'^2+Y'^2+Z'^2-R^2]^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} df &= -\lambda\tau^{-1}ds; & dg &= -\mu\tau^{-1}ds; & dh &= -v\tau^{-1}ds; \\ \rho da &= -\tau df; & \rho db &= -\tau dg; & \rho dc &= -\tau dh; \\ d\lambda &= (f\tau^{-1}-a\rho^{-1})ds; & d\mu &= (g\tau^{-1}-b\rho^{-1})ds; & dv &= (h\tau^{-1}-c\tau^{-1})ds. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Ezek alapján állapítsuk meg valamely görbe vonal osculáló felületének feltételeit, azután pedig az osculáló gömb sajátosságait.

1. *Görbe vonal osculáló felülete.* Az osculáló gömb sugarának értéke és középpontjának helyzete.

Valamely görbének egymásra következő, egymástól elsőrendű távolságokban lévő négy pontján átfektetett gömb e görbe osculáló gömbje a görbe ezen elemi ívrészére (pontjára) vonatkozólag.

a. Ha valamely felület egyenlete

$$F(x, y, z, a, b, p, q)=0, \quad \dots \quad (7)$$

hol x, y, z folyó koordinátái, a, b, p, q a helyzetét és alakját meghatározó paraméterei és $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; x_4, y_4, z_4$ az A_1, A_2, A_3, A_4 négy pont adott koordinátái, mely pontokon át a (7) felületet fektetni kívánjuk, akkor e koordináták kielégítik az (7)-et:

$$\left. \begin{aligned} F(x_1, y_1, z_1, a, b, p, q)=0; & \quad F(x_2, y_2, z_2, a, b, p, q)=0; \\ F(x_3, y_3, z_3, a, b, p, q)=0; & \quad F(x_4, y_4, z_4, a, b, p, q)=0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

E négy feltételi egyenlet meghatározza a felület keresett négy paraméterét, a, b, p, q -t.

(A meghatározható paraméterek száma az adott pontokéval egyenlő).

Ha a négy szomszédos pont, melyen e felület átfektetendő, egymáshoz végtelen közel fekszik, akkor (a Math. repertórium 70. §-ának (1) rendszere szerint) összszerendezők a következők:

$$\left. \begin{aligned} x, & \quad y, & \quad z \\ x+dx, & \quad y+dy, & \quad z+dz \\ x+dx+d(x+dx), & \quad y+dy+d(y+dy); & \quad z+dz+d(z+dz) \\ x+dx+d(x+dx)+d[x+dx+d(x+dx)]; & \quad \dots & \quad \dots \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Ezen esetben a (2) egyenletek következőleg írhatók:

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, z, a, b, p, q) &= F=0; \\ F(x+dx, y+dy, z+dz, a, b, p, q) &= (F+dF)=0; \\ F([x+dx+d(x+dx)], \dots, q) &= [F+dF+d(F+dF)]=0; \\ F([x+dx+d(x+dx)]+d[\dots], \dots, q) &= [F+dF+d(F+dF)]+d[F+\dots]=0; \end{aligned} \right\} (10)$$

melyek jobb oldalainak szerkezete eléggé világos.

E négy egyenletben a megelőzőket a következőknél felhasználva, közvetlenül nyerjük:

$$F=0; \quad dF=0; \quad d^2F=0; \quad d^3F=0 \dots \dots (11)$$

Az $F=0$ felületen lévő A pontok x, y, z koordinátái közül általánosságban véve kettő független.

Ha e koordináták csak *egy* független változót tartalmaznak, akkor az A pontok egy térbeli görbén fekszenek, melynek négy pontja $F=0$ felülettel esik egybe.

Ekkor az (5) differentiáljai helyébe az F -nek a független változó szerinti differentia quotientsei lépnek és így (11)-ből:

$$F=0; \quad F'=0; \quad F''=0; \quad F'''=0; \dots \dots (12)$$

a feltételi egyenletei annak, hogy az $F=0$ felület a görbe vonal négy szomszédos pontján haladjon át.

b. Legyenek x, y, z a görbe folyó coordinátái, ξ_0, η_0, ζ_0 az osculáló gömb középpontjának összszerendezői és ϱ_0 ennek sugara; legyen továbbá a görbe s íve a független változó; ekkor a görbe görbületi és csavarodási viszonyaira nézve §. (1)–(6) kifejezései érvényesek és az osculáló gömbfelület egyenlete:

$$F=(\xi_0-x)^2+(\eta_0-y)^2+(\zeta_0-z)^2-\varrho_0^2=0, \dots \dots (13)$$

melyben $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \varrho_0$ az ismeretlen, meghatározandó paraméterek.

A (13)-ból a (12) quotienteket képezve, a (6b) egyenletek tekintetbe vételével közvetlenül nyerjük:

$$\left. \begin{aligned} (\xi_0-x)^2 + (\eta_0-y)^2 + (\zeta_0-z)^2 &= \varrho_0^2; \\ (\xi_0-x)x' + (\eta_0-y)y' + (\zeta_0-z)z' &= 0; \\ (\xi_0-x)x'' + (\eta_0-y)y'' + (\zeta_0-z)z'' &= 1; \\ (\xi_0-x)x''' + (\eta_0-y)y''' + (\zeta_0-z)z''' &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots (14)$$

E négy egyenletből a keresett négy paraméter azonnal meghatározható.

Jeleljék λ_0, μ_0, ν_0 a ϱ_0 sugár [az (x, y, z) ponttól az osculáló gömb középpontjához húzott egyenes] iránycosinusait, úgy, hogy $\xi_0-x=\lambda_0\varrho_0$ s i. t.; ekkor a (14) második és negyedik egyenlete

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 x' + \mu_0 y' + \nu_0 z' &= 0; \\ \lambda_0 x''' + \mu_0 y''' + \nu_0 z''' &= 0; \\ \lambda_0^2 + \mu_0^2 + \nu_0^2 &= 1. \end{aligned} \right\} \text{hol még}$$

Ezekből [a Math. repertórium 70. §. (5), (6), (7) sémái szerint]:

$$\lambda_0^2 = \frac{(y'z''' - z'y''')^2}{(y'z''' - z'y''')^2 + (z'x''' - x'z''')^2 + (x'y''' - y'x''')^2}; \quad \text{s i. t.};$$

avagy, tekintettel a (3a) egyenleteire:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{\xi_0 - x}{\varrho_0} = \frac{-X'}{(X'^2 + Y'^2 + Z'^2)^{\frac{1}{2}}}; \\ \mu_0 &= \frac{\eta_0 - y}{\varrho_0} = \frac{-Y'}{(\dots)^{\frac{1}{2}}}; \\ \nu_0 &= \frac{\zeta_0 - z}{\varrho_0} = \frac{-Z'}{(\dots)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

Ezeket a (14) harmadik egyenletébe helyettesítve, ebből

$$\varrho_0 (x''X' + y''Y' + z''Z') = -(X'^2 + Y'^2 + Z'^2)^{\frac{1}{2}} \dots \dots \dots (16)$$

Ámde:

$$\begin{aligned} x''X' + y''Y' + z''Z' &= x''(y'z''' - z'y''') + y''(z'x''' - x'z''') + z''(x'y''' - y'x''') = \\ &= - \begin{vmatrix} x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \\ z' & z'' & z''' \end{vmatrix} = -\Delta, \dots \dots \dots (17) \end{aligned}$$

[Math. repertórium 74. §. (8.)].

Hasonlóképen nyerjük [Math. repertórium 74. §. (7) s az azt megelőző egyenletei mintájára]:

$$\begin{aligned} X'^2 + Y'^2 + Z'^2 &= (y'z''' - z'y''')^2 + (z'x''' - x'z''')^2 + (x'y''' - y'x''')^2 = \\ &= (x'^2 + y'^2 + z'^2)(x'''^2 + y'''^2 + z'''^2) - (x'x''' + y'y''' + z'z''')^2. \end{aligned}$$

E szerint (3b) egyenleteinek tekintetbe vételével a (16)-ból

$$\frac{1}{\varrho_0} = - \frac{x''X' + y''Y' + z''Z'}{(X'^2 + Y'^2 + Z'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Delta}{[(x'''^2 + y'''^2 + z'''^2) - (x'x''' + y'y''' + z'z''')^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (18)$$

bb. Ez értéket másként is fejezhetjük ki; a (16)-ból és (17)-ből:

$$\varrho_0^2 = \frac{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}{\Delta^2};$$

* A számlálók — előjeleit a ϱ_0 (18) kifejezésének pozitív értéke követeli.

helyetteszve ide (5)-ből:

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = \tau^{-2} \varrho^{-2} + R'^2; \text{ és } A^2 = R^4 \tau^{-2};$$

továbbá, mivel

$$R = \varrho^{-1}; \quad R' = -\varrho^{-2} \varrho',$$

nyerjük:

$$\varrho_0^2 = [\tau^{-2} \varrho^{-2} + \varrho^{-4} \varrho'^2] \tau^2 \cdot \varrho^4,$$

azaz

$$\varrho_0^2 = \varrho^2 + \tau^2 \varrho'^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

mely alakra a következőkben hivatkozni fogunk.

A (18) és (19) az osculáló gömb sugarának értékét adják meg.

c. Hátra van még az osculáló gömb (ξ_0, η_0, ζ_0) összszerendezőjű középpontja helyzetének meghatározása s e czélból keressük ennek a görbe (ξ, η, ζ) helyzetű görbületi középpontjától (a ϱ görbületi sugár végpontjától) való ϱ_1 távolságát, melynek derékszögű vetületei

$$\xi_0 - \xi, \quad \eta_0 - \eta, \quad \zeta_0 - \zeta;$$

úgy, hogy

$$\varrho_1^2 = (\xi_0 - \xi)^2 + (\eta_0 - \eta)^2 + (\zeta_0 - \zeta)^2.$$

A görbületi sugár vetületei [Math. repertórium 73. §. (7) s i. t.]:

$$\xi - x = \lambda \varrho; \quad \eta - y = \mu \varrho; \quad \zeta - z = \nu \varrho. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

A ϱ_1 távolság vetületei a (15)-ből s a (20)-ból:

$$\xi_0 - x - (\xi - x) = \xi_0 - \xi = \frac{-\varrho_0 X'}{(X'^2 + Y'^2 + Z'^2)^{\frac{1}{2}}} - \lambda \varrho; \text{ s i. t. } . \quad . \quad (21)$$

Képezve a (21) és az $a = x'$ s i. t. továbbá a $\lambda = \varrho x''$ s i. t., az (1) és (2) segítségével a ϱ_1 távolság vetületeit a görbe vonal (a, b, c) iránycosinusu érintőjére és a (λ, μ, ν) iránycosinusu normálisára s megjegyezve, hogy $x'Y' + y'Z' = 0$, végre még tekintettel a (16)-ra, nyerjük:

$$a(\xi_0 - \xi) + b(\eta_0 - \eta) + c(\zeta_0 - \zeta) = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

$$\lambda(\xi_0 - \xi) + \mu(\eta_0 - \eta) + \nu(\zeta_0 - \zeta) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

E két egyenlet szerint e ϱ_1 távolság a görbe érintőjére és főnormálisára merőleges irányú, azaz binormálisával párhuzamos.

Vége a (21)-ből a ϱ_1^2 -ot képezve, a (16) és (19) segítségével:

$$\varrho_1^2 = (\xi_0 - \xi)^2 + (\eta_0 - \eta)^2 + (\zeta_0 - \zeta)^2 = \varrho_0^2 + \varrho^2 - 2\varrho^2,$$

azaz:

$$\varrho_1^2 = \varrho_0^2 - \varrho^2 = \tau^2 \varrho'^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Ezek értelmében az osculáló gömb középpontja a görbületi középpontból az osculáló síkra emelt binormálison, az utóbbitól $\tau \varrho'$ távolságban fekszik.

2. A görbe vonal két szomszédos görbületi tengelyének metszőpontja az osculáló gömb középpontja.

Valamely görbe görbületi középpontjában (a ρ görbületi sugár végpontjában) az osculáló síkra emelt normális e görbe görbületi tengelye.

Legyenek mint fent x, y, z a görbe folyó coordinátái, ξ, η, ζ a görbületi középpont össszrendezői és λ, μ, ν a ρ görbületi sugár irány-cosinusai; ezekre nézve a (20) egyenletek érvényesek.

A görbe szomszédos, $(x+dx, y+dy, z+dz)$ pontjára nézve a megfelelő menynyiségek $\xi+d\xi, \eta+d\eta, \zeta+d\zeta; \rho+d\rho; \lambda+d\lambda, \mu+d\mu, \nu+d\nu$.

E szerint a (20)-ból:

$$d\xi - dx = \lambda d\rho + \rho d\lambda \quad \text{s i. t.}$$

Tekintettel a (6) utolsó egyenleteire, e differentiólok:

$$\left. \begin{aligned} d\xi &= dx + \lambda d\rho + \rho (f\tau^{-1} - a\rho^{-1}) ds; \\ d\eta &= dy + \mu d\rho + \rho (g\tau^{-1} - b\rho^{-1}) ds; \\ d\zeta &= dz + \nu d\rho + \rho (h\tau^{-1} - c\rho^{-1}) ds. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (25)$$

a. Szorozva a (25) egyenleteit rendre a, b, c -vel és tekintettel a tangens, normális és binormális egymásra merőleges voltára [Math. repertórium 75b. §. (A)] és a $ds = adx + bdy + cdz$ kapcsolatra öszszegezve őket; továbbá szorozva (25) egyenleteket λ, μ, ν -vel és öszszegezve; végre szorozva (25) egyenleteket f, g, h -val és öszszegezve őket, nyerjük rendre

$$\left. \begin{aligned} ad\xi + b d\eta + c d\zeta &= 0 & ; \\ \lambda d\xi + \mu d\eta + \nu d\zeta &= d\rho & ; \\ f d\xi + g d\eta + h d\zeta &= \rho \tau^{-1} ds. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (26)$$

Legyen $\overline{d\sigma}^2 = \overline{d\xi}^2 + \overline{d\eta}^2 + \overline{d\zeta}^2$ a szomszédos két görbületi középpont egymástól való távolsága; akkor a (26) első egyenlete szerint e távolság a görbe normális síkjában fekszik; s így mindkét középpont e síkban van.

b. Az ezen középpontokon átmenő binormálisak (görbületi tengelyek) iránycosinusai rendre:

$$f, g, h; \quad f+df, \quad g+dg, \quad h+dh.$$

Sorozva ezen utóbbiakat rendre a, b, c -vel, tekintettel a tangens s a binormális egymásra való merőlegességére s az ezen iránycosinusok között itt még [Math. repertórium 75b. §. 1. és 2. pontja] fennálló, a (6) rendszer középső egyenleteiből is közvetlenül folyó

$$adf + bdg + cdh = 0$$

öszszefüggésre, nyerjük:

$$a(f+df) + b(g+dg) + c(h+dh) = 0, \quad \dots \dots \dots (27)$$

mely egyenlet szerint az $(x+dx, y+dy, z+dz)$ pontra vonatkozó görbületi tengely szintén az (x, y, z) ponthoz tartozó normális síkban fekszik.

Végre e két binormális iránya (a két görbületi tengely) egymással

[Math. repertórium 74. §. (3)] $d\varepsilon$ csavarodási szöget képez, míg a csavarodás sugarára nézve $\tau d\varepsilon = ds$.

c. Az a . és b . eredményei értelmében a két görbületi tengely a görbe vonal (x, y, z) pontjához tartozó normális síkban fekszik; az első tengely e pont főnormálisával $\frac{1}{2}\pi$, a második $\frac{1}{2}\pi - d\varepsilon$ szöget képez; talppontjaik (a két görbületi középpont) egymástól való távolsága a (26) szerint $d\sigma = [\overline{d\rho}^2 + \rho^2 d\varepsilon^2]^{\frac{1}{2}}$; ennek a görbületi sugárra való vetülete a (26) második egyenlete szerint $d\rho$.

A két tengely egymást oly ρ_1 távolságban a (ξ, η, ζ) görbületi középponttól, a binormálishoz párhuzamos görbületi tengelyen metszi, melyre nézve $d\rho = \rho_1 d\varepsilon$, azaz

$$\rho_1 = \frac{d\rho}{d\varepsilon} = \frac{d\rho}{ds} \cdot \frac{ds}{d\varepsilon} = \tau \rho'.$$

Ezen ρ_1 végpontja (22), (23), (24) szerint az osculáló gömb középpontjával egybeesik; evvel tételünk be van bizonyítva.

330b. §. *Merev pontrendszer általános rulettái s az egyenes vonalú mozgó- és alapfelületek (az axoidok).*

A pontrendszer minden egyes pontjának pályájára nézve a megelőző §. geometriai tételei érvényesek.

E pályák görbületi, csavarodási és osculálási viszonyai a rendszer merevségénél fogva függenek össze egymással s a vizsgálatnak azon cél felé kellene törekednie, hogy e viszonyokat a rendszer bármely pontja pályájára nézve az (MN) alap- s az (MN) sikló és gördülő felület (a két axoid, 275. §.) segítségével ki lehessen fejezni, ha az egyes pontoknak a merev rendszerben való helyzetük ismeretes.

A feladat meg is fordítható és módosítható; fogalmazásai a legnagyobb analogiát mutatnak a sík mozgás megfelelő problémáinak a 142. §-ban részletezett fogalmazásához és a 180—190. §§. valamint a gömbi mozgás 261—267. §§.-ainak vizsgálataihoz.

De meg kell jegyeznünk, hogy ily általános vizsgálatok tetemesen bonyolódottak s már ezen oknál fogva sem vonzók, másfelől a belőlük nyerhető eredmények közvetlenül gyakorlati célokra nem lévén alkalmazhatók, meglejtésük ez oldalról sem látszik sürgősnek.

Speciálisabb vizsgálatok, melyek egyes pontcsoportok pályáira vonatkoznak, sikerrel végeztek (v. ö. a 369. §. 27. feladatát).

Az olvasó a megelőző §. mértani tételeiben s a 324—330. §§. eredményeiben minden egyes esetre nézve a megfejtés helyes és alkalmas eszközeivel rendelkezik.

8. Merev rendszer általános mozgásának magasabb rendű gyorsulásai.

331. §. Az általános mozgás másodrendű gyorsulásának analitikai előtűntetése.

1. A gömbi mozgás analitikai kifejezései csak az által különbözőnek az általános mozgásaitól, hogy ezen utóbbiak derékszögű componenseiben mindenütt az X, Y, Z , koordinátarendszer kezdőpontjára, az O -ra vonatkozó koordináták, sebességi-, gyorsulási-, stb. összetevők járulnak még hozzá (324. §.).

Megtartva az ott a 257—260. §§-okban bevezetett jelölést, itt főleg az említett különbség előtűntetésére fogunk szorítkozni.

E szerint a másodrendű gyorsulás componensei [257. §. (1) és 324. §. (1)].

$$a' = \varphi_{2,x} = a'' + x, a_1''' + y, \beta_1''' + z, \gamma_1'''; \text{ s i. t. } \quad (1)$$

A rendszerrel együtt mozgó X, Y, Z , tengelyekre nézve ξ_s, η_s, ζ_s -mal jelelt másodrendű gyorsulási középpont feltételei:

$$0 = a'' + \xi_s a_1''' + \eta_s \beta_1''' + \zeta_s \gamma_1'''; \text{ s i. t. } \quad (2)$$

mely egyenletek ily az középpont létezését világosan fejezik ki.

2. Alkalmazva a 257. §. 2. pontja (3) transformációját, nyerjük itt:

$$\varphi_{2,x} = u''_x + \omega''_y z - \omega''_z y + 2\omega_x (\omega'_x x + \omega'_y y + \omega'_z z) - 3x (\omega_x \omega'_x + \omega_y \omega'_y + \omega_z \omega'_z) + \left. \begin{aligned} &+ \omega'_x (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 (\omega_y z - \omega_z y) \text{ s i. t. } \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

A kifejezés hatféle tagokból áll; az első tag a rendszer azon pontja másodrendű gyorsulásának componense, melynek helyzete a t időpillanatban az álló XYZ rendszer O kezdőpontjával esik egybe; a többi öt megegyezik a 257. §. 3. pontjában felsorolt componensekkel.

332. §. Egy gyorsulás derékszögű componenseinek egyszerűsített kifejezései.

1. Legyen mint a 326. §-ban a forgás momentán tengelye a Z tengely és a pozitív Y tengely essék egybe az egymásra következő két momentán tengelyt egybekapcsoló legrövidebb távolsággal, míg a két tengely által egymással képezett szög az YZ síkban fekszik (e szöget előállítjuk, ha az egyik tengelyt önmagához párhuzamosan addig eltoljuk, míg a másikat metszi, 257. ábra).

Ekkor az idézett §. értelmében áll:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= 0; & u_y &= 0; & u_z &= u; \\ u'_x &= u'_x; & u'_y &= 0; & u'_z &= u'_z; \\ \omega_x &= 0; & \omega_y &= 0; & \omega_z &= \omega_1; \\ \omega'_x &= \omega'_x; & \omega'_y &= 0; & \omega'_z &= \omega'_z; \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (1)$$

Továbbá, mivel az megelőző §. (3) egyenleteiben u''_x nem függ a forgástól, hanem csak a rendszer translációjától, míg a (3) többi öt tagja csakis a forgástól, de nem a translációtól függ: azért a 259. §. 1. pontjának (4) egyenletei szerint még áll:

$$\omega''_x = (c_1 \omega_1)'; \quad \omega''_y = c_2 \omega_2 \sin \nu; \quad \omega''_z = \omega'_1 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Ennek folytán e rendszerben a $\varphi_{2,x}$, $\varphi_{2,y}$, $\varphi_{2,z}$, componensek csak annyiban különböznek az 259. §. ugyanilyenű (6) componenseitől, hogy itt még rendre a translációnak másodrendű gyorsulásai, u''_x , u''_y , u''_z hozzájárulnak.

A formulák nem egyszerűsödnek, ha őket az elsőrendű gyorsulás középpontjára vonatkoztatjuk.

2. Ha azonban az 1-ben említett koordinátarendszert önmagához párhuzamosan eltoljuk, míg kezdete a másodrendű gyorsulások középpontjával esik egybe [megelőző §. (2)], akkor az A pontnak e középpontra vonatkoztatott koordinátáit ξ , η , ζ -val jelezve: a nevezett egyenletekből az u''_x , u''_y , u''_z tagok elmaradnak és [megegyezőleg a 259. §. (6) kifejezéseivel] nyerjük:

$$\varphi_{2,\xi} = -3\omega_1 \omega'_1 \xi - (\omega'_1 - \omega_1^2) \eta + (c_1 \omega_1^2 + c_2 \omega_2 \sin \nu) \zeta;$$

$$\varphi_{2,\eta} = +(\omega'_1 - \omega_1^2) \xi - 3\omega_1 \omega'_1 \eta - (c_1 \omega_1)' \zeta;$$

$$\varphi_{2,\zeta} = -(c_1 \omega_1^2 + c_2 \omega_2 \sin \nu) \xi + 3c_1 \omega_1^2 \xi + (c_1 \omega_1)' \eta;$$

avagy, kissé másként rendezve:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{2,\xi} &= (c_1 \omega_1^2 + c_2 \omega_2 \sin \nu) \zeta - (\omega'_1 - \omega_1^2) \eta - 3\omega_1 \omega'_1 \xi; \\ \varphi_{2,\eta} &= (\omega'_1 - \omega_1^2) \xi - (c_1 \omega_1)' \zeta - 3\omega_1 \omega'_1 \eta; \\ \varphi_{2,\zeta} &= (c_1 \omega_1)' \eta - (c_1 \omega_1^2 + c_2 \omega_2 \sin \nu) \xi + 3c_1 \omega_1^2 \xi. \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

E formulákat értelmezve, a másodrendű gyorsulás részei:

a. *első része*, mely a felírt componensek első két-két tagját tartalmazza *oly jellegű*, mint valamely *forgás*, melynek sebességi componensei rendre [v. ö. a 242 §. (3)-át]:

$$(c_1 \omega_1)'; \quad (c_1 \omega_1^2 + c_2 \omega_2 \sin \nu); \quad (\omega'_1 - \omega_1^2) \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

b. *második része*, mely a $-3\omega_1 \omega'_1 \xi$, $-3\omega_1 \omega'_1 \eta$, componensekből áll, *centripetális* jellegű és a $-(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}}$ mentén (az A pontnak a másodrendű gyorsulás középpontján átmenő, a forgás momentán tengelyéhez párhuzamos egyenestől való távolsága mentén) fekszik (249. §. b. pontjai).

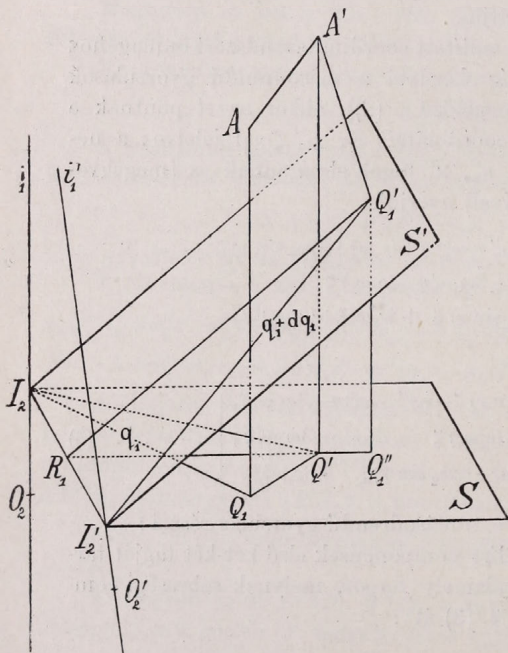
c. *utolsó része*, mely $+3c_1 \omega_1^2 \xi$ értékű és a *forgás momentán tengelyéhez párhuzamos*.

Ezekből kitűnik, hogy a másodrendű gyorsulás, ha középpontjára

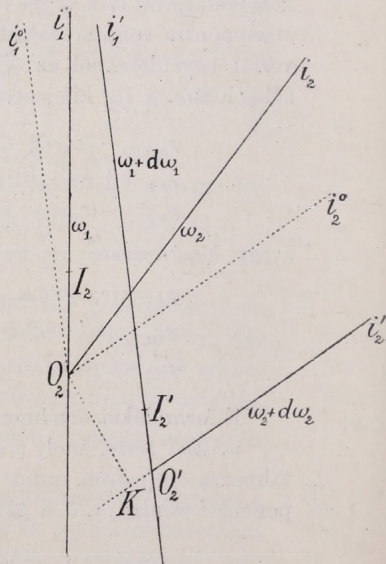
vonatkoztatjuk is, nem fejezhető ki oly egyszerű két tag által, mint az elsőrendű gyorsulás (328. §.)

333. §. *Az általános mozgás másodrendű gyorsulásának geometriai előtüntetése.*

Kiindulunk a 328. §. 2. pontjának eredményeiből. Ott bebizonyítottuk, hogy az elsőrendű gyorsulás centrumára, O_2 -re mint kezdetre vonatkoztatva, a rendszer bármely A pontjának gyorsulását szétbonthatni $-\omega_1^2 q_1$ értékű centripetális componensre (mely az O_2 -ön át [259a. ábra], a forgás momentán tengelyéhez párhuzamosan vont $O_2 I_2$



259a. ábra.



259b. ábra.

egyenesnek az A -tól számított távolsága mentén, ennek talppontja felé van irányítva) és egy $\omega_2 q_2$ értékű, az ω_2 szöggyorsulásból származó componensre (melyben [259b. ábra] q_2 az A pont távolsága az elsőrendű szöggyorsulás $O_2 i_2$ tengelyétől; e componens az $AO_2 i_2$ síkra merőleges).

A tárgyalás a 258. §-éhoz analog.

Jeleljék (259a és b ábrák) O_2 és O_2' az elsőrendű gyorsulás kö-

$$\overline{Q'Q_1} = v_q dt;$$

$$\overline{Q_1 I_2} = q_1;$$

$$\overline{I_2 I'_2} = w dt.$$

E szerint a magasabbrendűek elhagyásával az (1) első része:

$$\begin{aligned} (\overline{\omega_1^2 + d\omega_1^2})(q_1 + dq_1) &= \overline{\omega_1 \omega'_s q_1} \sin \psi dt + \overline{\omega_1 \omega'_s z} dt + \overline{\omega_1^2 r_q} dt + \overline{\omega_1^2 q_1} + \\ &+ 2\overline{\omega_1 \omega'_1 q_1} dt + \overline{\omega_1^2 r} dt. \end{aligned}$$

Levonva ebből $\omega_1^2 q_1$ -t, maradnak a másodrendű gyorsulás azon részei, melyek az elsőrendű centripetális gyorsulás változásából származnak, melyek előjelét az (1) határozza meg, nevezetesen:

- $\omega_1 \omega'_s q_1 \sin \psi$, a $\overline{Q'_1 Q_1}$ hez (az $i_1 O_2$ -höz, vagy a forgás momentán tengelyéhez) párhuzamosan.
- $\omega_1 \omega'_s z$, a $\overline{Q'_1 Q'}$ mentén, mely a momentán forgás síkjában, az $I_2 I'_2$ -re merőlegesen fekszik;
- $\omega_1^2 v_q$, a $\overline{Q_1 Q'}$ mentén, mely az AA' elmozdulásnak a momentán forgás S síkjára való vetületével egyenlő.
- $2\omega_1 \omega'_1 q_1$, mely a $\overline{Q_1 I_2}$, azaz a q_1 mentén fekszik.
- $\omega_1^2 w$, az $I_2 I'_2$ mentén.

Mind ezen öt componens iránya az A ponton halad keresztül.

2. Az ω_2 szöggyorsulásból származó gyorsulási componens t -kor $\omega_2 q_2$ értékű és az $O_2 i_2$ tengelyre vonatkozik; ellenben $t + dt$ időkor $(\omega_2 + d\omega_2)(q_2 + dq_2)$, de ez most az $O'_2 i'_2$ tengelyre vonatkozik s e componenst magát geometriailag (vector módjára) e tengely körüli forgás gyanánt tárgyalhatjuk.

Amde, a 160. §. tétele szerint bármily $O'_2 i'_2$ tengely körüli forgás szétbontható (259b. ábra) az ehhez párhuzamos $O_2 i_2^0$ tengely körüli, az eredetivel egyenlő nagyságú forgásra és egy translációra, mely az $O'_2 i'_2$ és az $O_2 i_2^0$ tengelyekre merőleges síkban fekszik és melynek irányát és nagyságát az idézett tétel értelmében teljesen ismerjük, mihelyt a nevezett két tengely iránya és helyzete és a forgás nagysága adva van. E két elmozdulással kívánjuk az $O'_2 i'_2$ körüli forgás-jellegű $(\omega_2 + d\omega_2)(q_2 + dq_2)$ vektort helyettesíteni.

a. Miután $O_2 K$ a nevezett két párhuzamos tengely egymástól való távolsága, az utóbbi transláció sebessége $(\omega_2 + d\omega_2) O_2 K$, avagy, a magasabb rendűek elhagyásával s az $O_2 K = w dt$ jelölés megtartásával, a másodrendű gyorsulásnak e translációból származó része

$\omega_2 w$, mely az $O_2 K O'_2$ síkra és az $O_2 K$ vonalra merőleges irányú.

β. Az $O_2 i_2^0$ tengely körüli $(\omega_2 + d\omega_2)$ szögsebességű forgás (mely a szétbontandó componens első része) oly részeit a másodrendű gyorsulásnak fogja létesíteni, melyek keletkeznek, ha az elsőrendű gyorsulásoknak O_2 középpontja ugyanaz marad, míg az ω_2 szöggyorsulás iránya és

nagysága változik. Amde, ezek a részek, szám szerint ketten, ugyanazok, melyek a merev rendszer gömbi mozgásánál (hol O_2 a fixpontba esik) a szöggyorsulás növekedésénél fogva fellépnek és melyeket geometriailag a 258. (14) formulájában, analitikailag a 257. §. (4) formuláiban és ugyane 257. §. 3. pontjának a . és részben b . szakaszaiban előtűntettük; felsorolásuk itt fölösleges.

Evvel a merev rendszer általános mozgásának másodrendű gyorsulása geometriailag teljesen elő van tüntetve.

A gömbi mozgásnál felkarolt részletezéshez analog tárgyalást itt hosszadalmasságánál fogva mellőzzük.

334. §. *Merev rendszer általános mozgásának tetszőleges rendű gyorsulásai.*

1. A 291. §. (1) egyenleteinek n -szeri differentiálásából nyerjük :

$$x^{(n)} = \varphi_{n-1,x} = a^{(n)} + x_1 \alpha_1^{(n)} + y_1 \beta_1^{(n)} + z_1 \gamma_1^{(n)} \quad \text{s i. t.;} \quad \dots \quad (1)$$

mely egyenletek az $n-1$ -ed rendű gyorsulás componenseit fejezik ki.

Ha a rendszerrel szilárd kapcsolatban lévő X, Y, Z , tengelyekre vonatkoztatva, ξ_n, η_n, ζ_n -nel jelöljük az n -ed rendű sebesség ($n-1$ -ed rendű gyorsulás) középpontját, erre nézve :

$$0 = a^{(n)} + \xi_n \alpha_1^{(n)} + \eta_n \beta_1^{(n)} + \zeta_n \gamma_1^{(n)} \quad \text{s i. t.;} \quad \dots \quad (2)$$

mely egyenletek szerint e középpont koordinátái reális mennyiségek, azaz, ily középpont tényleg létezik.

1. Ha φ_{m-1} és φ_{n-1} -el jeleljük a rendszer tetszőleges A pontjának $m-1$ -ed, illetve $n-1$ -ed rendű gyorsulását, $(\varphi_{m-1}, \varphi_{n-1})$ -val a kettő irányra által egymással képezett szöget, $C_{m,n}$ - és $S_{m,n}$ -nel pedig a

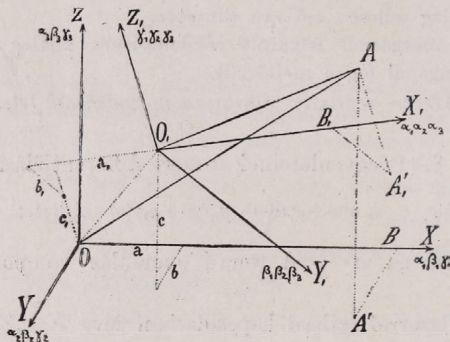
$C_{m,n} = \varphi_{m-1} \varphi_{n-1} \cos(\varphi_{m-1}, \varphi_{n-1})$; $S_{m,n} = \varphi_{m-1}, \varphi_{n-1} \sin(\varphi_{m-1}, \varphi_{n-1})$ mennyiségeket, akkor nagyon könnyű bebizonyítani, hogy mind azok a tételek és eredmények, melyek a 260. §. 2. pontjában a gömbi mozgásra nézve találtattak, itt is érvényesek és csak azt a különbséget mutatják, hogy az $x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)}$ gyorsulásoknál az $a^{(n)}, b^{(n)}, c^{(n)}$ transzlátorius gyorsulási részek járulnak még hozzá.

A tételeknek az általános mozgásra vonatkozó igazolását, mint igen egyszerű, de tanulságos gyakorlatot az olvasónak ajánljuk.

9. Merev pontrendszer relativ mozgása általánosságban.

335. §. Az absolut, az elszállító és a relativ sebesség.

1. Legyen XYZ valamely a térben szilárd fekvésű, ellenben X,Y,Z , a térben tetszőlegesen mozgó (elszállító) tengelyrendszer (241. ábra); de megjegyezzük, hogy e fejezetben az X,Y,Z , elszállító



241. ábra.

tengelyeket *nem* tekintjük a merev, mozgó pontrendszerrel egybekapcsolva. Ekkor [a Math. repertórium 49. §.-ának (3) transzformáló formulái vagy] a 291. §. (1) formulái szerint

$$\left. \begin{aligned} x &= a + x_1 + y_1 \beta_1 + z_1 \gamma_1 \\ y &= b + x_2 + y_2 \beta_2 + z_2 \gamma_2 \\ z &= c + x_3 + y_3 \beta_3 + z_3 \gamma_3 \end{aligned} \right\}; \dots \dots \dots (1)$$

de itt az egyenletek jobb oldalán fellépő menynyisígek mind változóknak tekintendők.

2. Ezen egyenletek első differenciálquotienszei az idő szerint:

$$\left. \begin{aligned} x' &= (a' + x_1' + y_1' \beta_1' + z_1' \gamma_1') + x_1' \alpha_1 + y_1' \beta_1 + z_1' \gamma_1 \\ y' &= (b' + x_2' + y_2' \beta_2' + z_2' \gamma_2') + x_2' \alpha_2 + y_2' \beta_2 + z_2' \gamma_2 \\ z' &= (c' + x_3' + y_3' \beta_3' + z_3' \gamma_3') + x_3' \alpha_3 + y_3' \beta_3 + z_3' \gamma_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Az egyenletrendszer megegyezik a 83. §. (3) rendszerével; az ránycosinusok között fennálló, ott felírt (2), (3a) és (3b) összszefüggések itt is érvényesek.

E sebességi componensek két fajta tagból állóknak tekintendők.

a. Az első, zárójelbe foglalt rész a sebességnek azon részét fejezi ki, mely *állandó* x, y, z , coordinátáknál lép fel; ez egyszersmind az X,Y,Z , rendszerrel merev kapcsolatban levőnek gondolt, e rendszerben x, y, z , coordinátákkal bíró pontnak (*a coincidáló pontnak*) e coordináta-rendszer mozgása folytán fellépő sebessége, melyet ezért

az elszállítás sebességének (ritesse d'entrainement, Fortführungsge-
schwindigkeit, velocity of moving space) sokszor pedig a coincidló
pont sebességének neveznek.

b. A második rész az x, y, z , koordináták változásából származik; a sebesség ezen részét *relatív sebességnek* mondjuk, mert ez a rendszerbeli pontnak az X, Y, Z , tengelyrendszerhez viszonyított relatív mozgásából származik.

A (2) egyenletek rövid vectoralakja:

$$\overline{v_a} = \overline{v_e} + \overline{v_r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

azaz, az abszolút sebesség egyenlő az elszállító és a relatív sebesség geometriai összegével.

336. §. Az absolut, az elszállító, az összetett centripetális és a relativ gyorsulás. CORIOLIS (CLAIRAUT)* tétele. Analytikai tárgyalás.

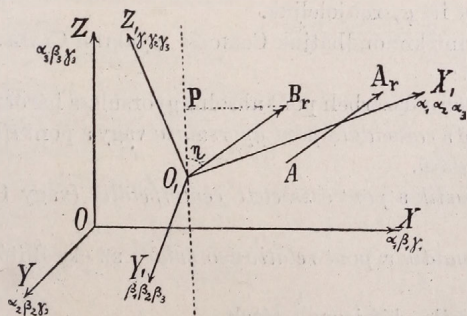
1. A megelőző §. (1) rendszerének kétszeri differenciálásából nyerjük az abszolút gyorsulás derékszögű componenseit:

$$\varphi_x = x'' = (a'' + x_1\alpha_1'' + y_1\beta_1'' + z_1\gamma_1'') + 2 \left\{ \begin{array}{l} (x_1'\alpha_1' + y_1'\beta_1' + z_1'\gamma_1') + \\ (x_1''\alpha_1 + y_1''\beta_1 + z_1''\gamma_1) \end{array} \right\} \text{ s. i. t. } \quad (1)$$

Ezen összetevők *három* részből állóknak tekinthetők.

a) Az első zárójeles menynyiség a gyorsulás azon része, mely már *állandó* x, y, z , koordináták mellett érvényes; ez megegyezik a 324. §-ban felírt (1) vagy (3) gyorsulással, melyet itt, és a megelőző §. megállapításai szerint, a *coincidáló pont gyorsulásának* vagy az *elszálítás gyorsulásának* nevezzük és φ_c -vel jeleljük.

β) A második zárójeles menynyiség értelmezésére nézve legyen



260. ábra.

(260. ábra) az A pontnak a mozgó X, Y, Z , rendszerhez viszonyított relatív sebessége $\vec{AA_r} = v$, és vigyük azt fel irány és nagyság szerint

* CLAIRAUT 1742-ben, CORIOLIS 1835-ben találta e tételt.

az O_r -ból, úgy hogy $\vec{O_r B_r} = \vec{v_r}$. Ezen v_r derékszögű összetevői x', y', z' ; e szerint a B_r pont x_r, y_r, z_r koordinátái az XYZ szilárd rendszerben:

$$x_r = a + x'_1 \alpha_1 + y'_1 \beta_1 + z'_1 \gamma_1 \quad \text{s i. t.} \quad (2)$$

Ha most egy pillanatra a B_r pontot az X, Y, Z mozgó rendszerrel merev kapcsolatban lévőnek (azaz x', y', z' -et állandónak) tekintjük, akkor ennek *sebessége* az álló X tengely mentén

$$x'_r = a' + (x'_1 \alpha_1 + y'_1 \beta_1 + z'_1 \gamma_1) \quad \text{s i. t.} \quad (2a)$$

A jobboldali első tag az O kezdet abszolút sebessége; a második, a zárójeles tag pedig ezen felvétel értelmében és szerkezeténél fogva, kifejezi a B_r pont azon sebességének vetületét, melylyel az az O, P momentán tengely körüli forgás folytán bír [242. §. (1) és (3) és 249. §.].

Ámde ezen forgássebesség értéke

$$(PB_r) \omega = (O, B_r \sin \eta) \omega = v_r \omega \sin \eta, \quad (3)$$

hol ω , az X, Y, Z rendszer mozgásának szögsebessége, η a v_r relativ sebesség és a momentán forgás tengelye között lévő szög és maga a $v_r \omega \sin \eta$ mennyiség az O, PB_r síkra — és pedig B_r pontból az O, P körüli forgás mentén emelt normálisban fekszik.

E szerint a (2a) egyenletek második tagjai a $v_r \omega \sin \eta$ vector derékszögű vetületei; maga a vector kétszeresét *összetett centripetális gyorsulásnak*, sokszor CORIOLIS-féle *gyorsulásnak* is nevezik.

γ) Az (1) egyenletek harmadik zárójeles tagjai az A pontnak az X, Y, Z rendszerre vonatkozó (x'', y'', z'') componensekkel bíró) relativ gyorsulásának vetületei az álló X, Y, Z tengelyekre; a gyorsulás ezen részét itt φ_r -rel jeleljük.

2. E szerint kimondhatjuk CORIOLIS (gyakran CLAIRAUT-ének nevezett) tételét:

Valamely rendszerbeli pont abszolút gyorsulása három részből áll:

α) Az első a *coincidáló pont gyorsulása* vagy a pont *elszállításának abszolút gyorsulása*.

β) A második a *pont összetett centripetális* (vagy CORIOLIS-féle) *gyorsulása*.

γ) A harmadik a *pont relativ gyorsulása* az elszállító koordináta-rendszerben.

Geométrailag kifejezve e tételt:

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi_c} + 2\vec{v_r} \omega \sin \eta + \vec{\varphi_r} \quad (4)$$

Jegyzet. A B_r pont koordinátái az X, Y, Z rendszerben, a β) pont szerkesztése szerint az x', y', z' sebességi összetevők; ha e pont az O, P momentán tengely körül ω szögsebességgel forog, és az ω compo-

nensei $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, akkor a B_r pont derékszögű sebességi összetevői a 243. §. (3) rendszere szerint:

$$\omega_y z'_r - \omega_z y'_r; \quad \omega_z x'_r - \omega_x z'_r; \quad \omega_x y'_r - \omega_y x'_r \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Négyzetre emelve és összegezve e componenseket, és tekintetbe véve, hogy

$$v_r^2 = x_r'^2 + y_r'^2 + z_r'^2,$$

$$\omega_r^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2,$$

$$v_r \omega \sin \eta = \omega_r v_r \left[1 - \left(\frac{\omega_x}{\omega_r} \frac{x'_r}{v_r} + \frac{\omega_y}{\omega_r} \frac{y'_r}{v_r} + \frac{\omega_z}{\omega_r} \frac{z'_r}{v_r} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

nyerjük a 249. §. 1. pontja kifejtéseinek mintájára, némi rövidítések után

$$(\omega_y z'_r - \omega_z y'_r)^2 + (\omega_z x'_r - \omega_x z'_r)^2 + (\omega_x y'_r - \omega_y x'_r)^2 = v_r^2 \omega_r^2 \sin^2 \eta; \quad . \quad (6)$$

miáltal a CORIOLIS-féle gyorsulásnak más, analitikai értelmezését találtuk, mert észreveszszük, hogy az (5) kifejezéseinek kétszeresei egyenlők a CORIOLIS-féle gyorsulásnak az elszállító rendszerre vonatkozó derékszögű componenseivel.

337. §. CORIOLIS (CLAIRAUT) tétele. Geometriai tárgyalás.

A mozgó pontrendszert vonatkoztatassuk a szintén mozgó X, Y, Z , koordináta-rendszere, mely azonban a merev pontrendszerrel ne álljon szilárd kapcsolatban.

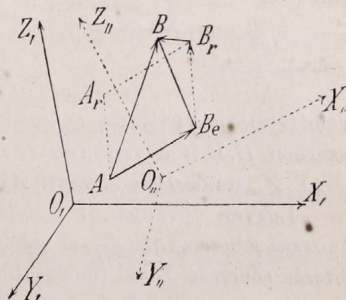
1. Az abszolút elmozdulás szétbontása elszállító, relativ és forgató componensre.

Legyen A a mozgó rendszer tetszőleges pontjának helyzete t időpillanatban, B a helyzete $t + \Delta t$ időkor és így AB a Δt időköz alatt bekövetkezett abszolút elmozdulás (261. ábra).

Az X, Y, Z , koordinátarendszer azon pontja, mely t időkor a mozgó A ponttal esik egybe, a $t + \Delta t$ időpillanatban B_e helyzetben legyen; e pontot az X, Y, Z , rendszer magával vitte; az AB elmozdulás ezen, AB_e részét (összetevőjét) az *elszállítás elmozdulásának* nevezzük.

Az A pont ezenkívül az X, Y, Z , rendszerhez relativ mozgással is bír; az ebből származó elmozdulás AA_r , mely az $B_e B_r$ -el egyenértékű (261. ábra).

Mivel azonban a Δt közben az X, Y, Z , rendszer az X_r, Y_r, Z_r ,



261. ábra.

helyzetbe jutott s így az $\overline{O,O}$, transláción kívül forgást is szenvedett, azért az AA_r relativ elmozdulás is végzi ezt a forgást és az $X,,Y,,Z,,$ rendszerben nem B_eB_r , hanem B_eB a teljes relativ elmozdulás. Ennek B végpontját A -val egybekapcsolva nyerjük a tényleges elmozdulást \overline{AB} -t.

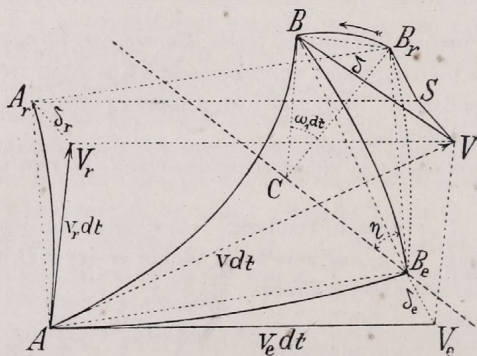
E szerint a tényleges elmozdulás, \overline{AB} , az elszállítás $\overline{AB_e}$ elmozdulásának, továbbá a relativ elmozdulásnak, B_eB_r -nek és a B_e körüli forgás $\overline{B_rB}$ ívének eredője; röviden :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB_e} + \overrightarrow{B_eB_r} + \overrightarrow{B_rB} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (0)$$

2. CORIOLIS tetele.

Hogy a mozgás gyorsulását lehessen tanulmányozni, vizsgáljuk meg az AB , AB_e , AB_r elmozdulásokhoz tartozó pályáívek deviatióját (47. §.)

Ezen czélból jeleljék a 262. ábrában (melynek A , A_r , B_e , B_r , B pontjai a megelőző ábrának épen így jelelt pontjaival identikusak) az AB_e ív a coincidáló pont pályáját (az elszállítás pályáját); AA_r ív a



262. ábra.

relativ mozgás pályáját az eredeti helyzetű X,Y,Z , coordinátarendszerben, B_eB ív ugyane relativ mozgás pályáját a $t+dt$ időpillanatú $X,,Y,,Z,,$ rendszerben ; végre AB a tényleges mozgás pályáját.

Legyen továbbá $\overline{AV_r} = v_r dt$ a relativ, $\overline{AV_e} = v_e dt$ az elszállító mozgás sebességének dt -vel való szorzata ; ekkor $\overline{AV} = v dt$ az eredő sebesség szorzata dt -vel (magasabb rendű csekélyeket elhanyagolva).

A rajz szerint $V_r A_r$ a relativ, $V_e B_e$ az elszállító, VB a tényleges mozgás deviatiója.

Ezt az utóbbit, a VB deviatiót kívánjuk a többi két deviatió és a mozgás egyéb jellemzői, a forgáséi által kifejezni ; ezt könnyen tehetjük, mihielyt a megelőző 1. pont értelmében azon elmozdulásokat részleteztük, melyek által az AA_r ív a B_eB helyzetbe jut.

a. Az AA_r önmagához párhuzamosan lesz eltolva, míg A pont V_e -be, V_r pont V -be, A_r pont S -be jut; ebből következik:

$$\overline{V_r A_r} = \overline{VS} = \delta_r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

b. A $V_e S$ ív (mely az AA_r ívvel *congruens de complicatio* kikerülése céljából nincsen kirajzolva) önmagához párhuzamosan lesz eltolva míg a V_e pont B_e -be, az S pont a B_r -be jut; ebből következik:

$$\overline{V_e B_e} = \overline{SB_r} = \delta_e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

c. A $B_e B_r$ ívet a t -kor érvényes $B_e C$ momentán tengely körül forgatva, mely itt a B_e ponton megyen át (mivel eddig, az a és b alatt említett két elmozdulás csak az AB_e közös translációt létesítette) a B_r átmegy a B -be. A BB_r ív vagy húrja,

$$\overline{BB_r} = (\omega, dt) \overline{CB},$$

hol ω , az X, Y, Z , rendszer mozgásának szögsebessége, mely ugyanaz, bármely B_e pontra is vonatkoztassuk azt (271. §.).

Ámde CB a magasabbrendű menynyiségek elhanyagolásával írható ($B_e B$ ív) $\cdot \sin \eta$, hol η a momentán forgás tengelye és a BB_e között lévő szög; ezenkívül $B_e B$ ív helyébe, a magasabb rendűek elhanyagolásával $v_r dt$ -t szabad tennünk és így

$$\overline{BB_r} = \overline{\omega, v_r \sin \eta (dt)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

d. A tényleges deviáció, $\overline{VB} = \delta$ az (1), (2), (3) alatt felírt kifejezések geometriai összege lévén:

$$\overrightarrow{\delta} = \overrightarrow{\delta_r} + \overrightarrow{\delta_e} + \overrightarrow{\omega, v_r \sin \eta (dt)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

3. A deviáció definíciója szerint a gyorsulás mindig egyenlő a deviáció értéke kétszeresének az időelem négyzetével való osztatával. (47. §.); ha ennek értelmében:

φ a tényleges mozgás gyorsulása szilárd XYZ rendszerre nézve,
 φ_r az X, Y, Z , mozgó rendszerhez viszonyított relativ mozgás gyorsulása;

φ_e a coincidáló pont (az elszállító mozgás) gyorsulása a szilárd XYZ rendszerre nézve;

$2v_r \omega \sin \eta = \varphi_c$ a forgásból származó (összetett centripetális, a CORIOLIS-féle) gyorsulás,

akkor φ a (4) szerint az utóbbi három gyorsulás geometriai összege, azaz

$$\overrightarrow{\varphi} = \overrightarrow{\varphi_r} + \overrightarrow{\varphi_e} + 2\overrightarrow{v_r \omega \sin \eta} = \overrightarrow{\varphi_r} + \overrightarrow{\varphi_e} + \overrightarrow{\varphi_c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Ez CORIOLIS tétele, mint a megelőző §. (4) formulájában.

338. §. *Esetek, melyekben a CORIOLIS-féle gyorsulás zérus.*

Ha a megelőző két §. (2) illetve (5) egyenleteiben a CORIOLIS-féle gyorsulás zérus, akkor marad:

itt φ_{ex} , φ_{ey} , φ_{ez} -vel jeleljük és az ott (554. l.) írt φ_x , φ_y , φ_z , componensekkel egyenlőknek kell tennünk, azaz írunk:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{ex} &= u'_x + \omega'_y z - \omega'_z y + (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) \omega_x - \omega_1^2 x, \\ \varphi_{ey} &= u'_y + \omega'_z x - \omega'_x z + (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) \omega_y - \omega_1^2 y, \\ \varphi_{ez} &= u'_z + \omega'_x y - \omega'_y x + (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) \omega_z - \omega_1^2 z, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

4. A negatív CORIOLIS-féle gyorsulás, $-2v_r \omega \sin \eta$ derékszögű componensei az X , Y , Z , tengelyek mentén legyenek $-\varphi_{cx}$, $-\varphi_{cy}$, $-\varphi_{cz}$; értékeiket a 336. §. Jegyzetében találtuk:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{cx} &= 2(\omega_y z' - \omega_z y'), \\ \varphi_{cy} &= 2(\omega_z x' - \omega_x z'), \\ \varphi_{cz} &= 2(\omega_x y' - \omega_y x') \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

5. A 2, 3, 4. pontok alapján az (1) vectoregyenletet szétbonthatjuk az X , Y , Z , menti componenseire és így a relativ gyorsulás componenseit az X, Y, Z , koordináta-rendszerre vonatkoztatott adatokkal fejezhetjük ki:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{rx} &= (\varphi_x) - \varphi_{cx} - \varphi_{cx}, \\ \varphi_{ry} &= (\varphi_y) - \varphi_{cy} - \varphi_{cy}, \\ \varphi_{rz} &= (\varphi_z) - \varphi_{cz} - \varphi_{cz}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

hol a jobboldali componenseket a (3), (4), (5) egyenletcsoportok szolgáltatják.

Ezen formulák alkalmazását a 348—357. §§. példái tárgyalásánál fogjuk adni.

340. §. *A relativ mozgás magasabb rendű gyorsulásai. CORIOLIS tételének általánosítása.*

A 337. §. 1. pontjában az absolut elmozdulást szétbontottuk elszállító, relativ és forgató összetevőire. Mintán ezen elmozdulások megfelelő pályáveik *húrjaival egyenlők*, azért ezeket következőleg jelelhetjük (261 és 262. ábrák, idézett §.):

$$\overline{AB} = \overline{Ah}_a; \quad \overline{AB}_e = \overline{Ah}_e; \quad \overline{B}_e \overline{B}_r = \overline{Ah}_r; \quad \overline{B}_r \overline{B} = \overline{Ah}_f,$$

miáltal az ott talált (0) egyenlet:

$$\overline{Ah}_a = \overline{Ah}_e + \overline{Ah}_r + \overline{Ah}_f \quad (0)$$

1. Derékszögű componensekre bontva a (0) egyenletet, ezt írjuk:

$$\left. \begin{aligned} \Delta h_{a,x} &= \Delta h_{e,x} + \Delta h_{r,x} + \Delta h_{f,x}; \\ \Delta h_{a,y} &= \Delta h_{e,y} + \Delta h_{r,y} + \Delta h_{f,y}; \\ \Delta h_{a,z} &= \Delta h_{e,z} + \Delta h_{r,z} + \Delta h_{f,z} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Az egyes elmozdulási componenseket a pont kinematikája 60. §. (1) formulái szerint tüntetjük elő.

E czéla jeleljük a h_a , h_e , h_r , h_f húrok vetületeinek első és magasabbrendű quotienseit a gyorsulások módjára rendre

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{a_0,x} &= \frac{dh_{a,x}}{dt}; & \varphi_{a_1,x} &= \frac{d^2 h_{a,x}}{dt^2}; & \varphi_{a_2,x} &= \frac{d^3 h_{a,x}}{dt^3}; & \dots \\ \varphi_{e_0,x} &= \frac{dh_{e,x}}{dt}; & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{aligned} \right\} \text{ s i. t., } \quad (2)$$

hol:

φ_{a_0} , φ_{a_1} , φ_{a_2} ... az abszolút,
 φ_{e_0} , φ_{e_1} , φ_{e_2} ... az elszállító,
 φ_{r_0} , φ_{r_1} , φ_{r_2} ... a relativ, végre
 φ_{f_0} , φ_{f_1} , φ_{f_2} ... a forgó mozgás különböző rendű gyorsulásai.

Az idézett kifejtés értelmében (68. l.):

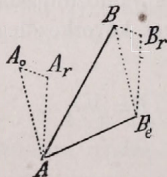
$$\left. \begin{aligned} \Delta h_{a,x} &= \varphi_{a_0,x} \Delta t + \frac{1}{2} \varphi_{a_1,x} \Delta t^2 + \frac{1}{2.3} \varphi_{a_2,x} \Delta t^3 + \dots \\ \Delta h_{e,x} &= \varphi_{e_0,x} \Delta t + \frac{1}{2} \varphi_{e_1,x} \Delta t^2 + \frac{1}{2.3} \varphi_{e_2,x} \Delta t^3 + \dots \\ \Delta h_{r,x} &= \varphi_{r_0,x} \Delta t + \frac{1}{2} \varphi_{r_1,x} \Delta t^2 + \frac{1}{2.3} \varphi_{r_2,x} \Delta t^3 + \dots \\ \Delta h_{f,x} &= \varphi_{f_0,x} \Delta t + \frac{1}{2} \varphi_{f_1,x} \Delta t^2 + \frac{1}{2.3} \varphi_{f_2,x} \Delta t^3 + \dots \text{ s i. t. } \end{aligned} \right\} \dots \quad (3)$$

2. A φ_f mennyiségek a φ_r mennyiségek és a szöggyorsulások componensei által fejezhetők ki.

Ugyanis a (2) szerint:

$$\varphi_{f_0,x} = \frac{dh_{f,x}}{dt} = \lim \frac{\Delta h_{f,x}}{\Delta t} \text{ s i. t.; } \dots \quad (4)$$

ámde a $\Delta h_f = B_r B$; de mivel az 263 ábrában $\overline{B_e B} = \overline{A_0 A}$, azért $\Delta h_f = \overline{A_r A_0}$; ez pedig az AA_r -nek A körüli elemi forgásából származott húr, mi közben az $AA_r = B_e B_r = \Delta h_r$ sugár változatlan maradt, és így $\varphi_{f_0,x}$, $\varphi_{f_0,y}$, $\varphi_{f_0,z}$ a (4) szerint az A_r pontnak ezen forgásból származó sebességi componenseit jelentik.



263. ábra.

Ha az X, Y, Z , rendszer momentán forgásának ω , a szögsebessége (mely bármely A vagy B_e rendszerbeli pontra nézve ugyanaz, 271. §.), míg componensei ω_x , ω_y , ω_z , akkor a 242. §. (3) szerint az ezen forgásból származó sebesség componensei:

$$-\varphi_{f_0,x} = \Delta h_{r,y} \omega_z - \Delta h_{r,z} \omega_y, \text{ s i. t.}$$

Ezen kifejezésbe helyetteszve a (3) harmadik egyenletét, ebből

$$-\varphi_{f_0,x} = (\varphi_{r_0,y} \omega_z - \varphi_{r_0,z} \omega_y) \Delta t + \frac{1}{2} (\varphi_{r_1,y} \omega_z - \varphi_{r_1,z} \omega_y) \Delta t^2 + \dots; \text{ s i. t. } ($$

Az Y és a Z tengelyekhez párhuzamos componensek kifejezéseit a (8)-ból az x, y, z indexek cyclusos felcseréléséből nyerjük.

Ezen egyenletek kifejezik a tetszőleges rendű abszolút gyorsulás componenseit az elszállító és a relatív gyorsulás összehatózóit valamint a szöggyorsulás componensei segítségével.

Maguk a $\varphi_{a_0}, \varphi_{a_1}, \varphi_{a_2} \dots$ abszolút gyorsulások a (8)-ban felírt componenseiből a vectorok módjára adódnak.

4. Könynyű kimutatni, hogy (8) első egyenlete a relatív sebességek tételét, második egyenlete CORIOLIS tételét fejezi ki.

a. Az első egyenletből:

$$\overline{\varphi_{a_0}} = \overline{\varphi_{e_0}} + \overline{\varphi_{r_0}}, \quad \text{vagy} \quad \overline{v_a} = \overline{v_e} + \overline{v_r}; \quad \dots \dots \dots (9)$$

szóval: az abszolút sebesség egyenlő az elszállító és a relatív sebesség geometriai összegével [335. §. (3)].

b. A második egyenlet, mely az elsőrendű gyorsulásra vonatkozik, szintén vector módjára írható; de utolsó tagjának fele egyszerűsített jelölésben következő alakú:

$$-(\varphi_{r_0,y} \omega_z - \varphi_{r_0,z} \omega_y) = -v_r \omega_r [\cos(v_r, y) \cos(\omega_r, z) - \cos(v_r, z) \cos(\omega_r, y)].$$

Az ily három összehatózó négyzete [a Math. repertórium 44. §-ának (2a) formulája szerint]:

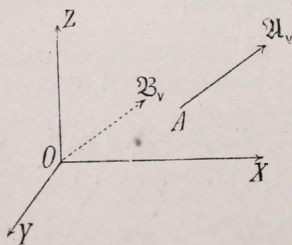
$$v_r^2 \omega_r^2 \sin^2(v_r, \omega_r);$$

e szerint a (8) második egyenlete adja

$$\overline{\varphi_a} = \overline{\varphi_e} + \overline{\varphi_r} + 2\overline{v_r \omega_r \sin(v_r, \omega_r)}, \quad \dots \dots \dots (10)$$

mely CORIOLIS tételének kifejezése [336. §. (4)].

5. A másod- és magasabb rendű abszolút gyorsulások tényleges algebrai képzését itt mellőzzük, azonban az olvasónak ajánlhatjuk.



264. ábra.

341. §. *Mozgó tengelyekre vonatkoztatott, magasabb rendű sebességeknek és gyorsulásoknak az egygyel alacsonyabb fokúakból való származtatása a relatív mozgás alapján.*

Legyen (264. ábra) XYZ egy az O szilárd kezdete körül tetszőlegesen forgó koordináta-rendszer, x, y, z a mozgó merev pontrendszer valamely A pontjának e tengelyekre vonatkozó koordinátái, végre

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}, \dots, \frac{d^{v+1}x}{dt^{v+1}}, \frac{d^{v+1}y}{dt^{v+1}}, \frac{d^{v+1}z}{dt^{v+1}} \dots$$

e tengelyrendszerre vonatkozó relatív sebességének, v -nek, elsőrendű-, $\dots v$ -ed rendű \dots gyorsulásának összehatózóit.

Legyen $A\mathfrak{N}_v$ a v -ed rendű gyorsulást, φ_v -t a t -időpillanatban képviselő vector, melyet irány és nagyság szerint O -ból kiindulólág $O\mathfrak{B}_v$ -el rajzoljuk fel (v. ö. a CORIOLIS tétele származtatásánál használt 260. ábrát); úgy, hogy az $O\mathfrak{B}_v$ derékszögű vetületei az X, Y, Z tengelyre: $\varphi_{v,x}, \varphi_{v,y}, \varphi_{v,z}$.

Ugyanezen v -ed rendű gyorsulás $t+dt$ időpillanatban $\overline{\varphi_v + d\varphi_v}$.

Hogy a φ_v gyorsulásból a φ_{v+1} gyorsulást lehessen szerkeszteni, az $O\mathfrak{B}_v$ -nek a mozgó XYZ rendszerhez viszonyított irány- és nagyság szerinti változását kell azon dt időelemhez viszonyítani, mely alatt e változás bekövetkezett.

1. Ha az XYZ mozdulatlan volna, akkor a φ_v -nek $\varphi_{v,x}, \varphi_{v,y}, \varphi_{v,z}$ derékszögű összetevői dt idő múlva volnának:

$$\varphi_{v,x} + d\varphi_{v,x}; \quad \varphi_{v,y} + d\varphi_{v,y}; \quad \varphi_{v,z} + d\varphi_{v,z} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

2. Mivel pedig az XYZ rendszer O körül ω szögsebességgel forog, ennek pedig a derékszögű összetevői $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, azért ezen forgás folytán \mathfrak{B}_v -nek az XYZ rendszerhez viszonyított helyzete [a 242. §. (3) sémája értelmében] dt idő alatt a következő componensekkel változott:

$$(\omega_y \varphi_{v,z} - \omega_z \varphi_{v,y}) dt; \quad (\omega_z \varphi_{v,x} - \omega_x \varphi_{v,z}) dt; \quad (\omega_x \varphi_{v,y} - \omega_y \varphi_{v,x}) dt \quad . \quad . \quad (2)$$

3. Ha az (1) és (2) alatti egynevű összetevők összegeiből rendre levonjuk a $\varphi_{v,x}, \varphi_{v,y}, \varphi_{v,z}$ componenseket és a fenmaradó különbségeket dt vel osztjuk: nyerjük a $v+1$ -ed rendű relativ gyorsulás derékszögű componenseit a mozgó XYZ rendszer tengelyei mentén:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{v+1,x} &= \frac{d\varphi_{v,x}}{dt} + \omega_y \varphi_{v,z} - \omega_z \varphi_{v,y} \\ \varphi_{v+1,y} &= \frac{d\varphi_{v,y}}{dt} + \omega_z \varphi_{v,x} - \omega_x \varphi_{v,z} \\ \varphi_{v+1,z} &= \frac{d\varphi_{v,z}}{dt} + \omega_x \varphi_{v,y} - \omega_y \varphi_{v,x} \end{aligned} \right\} . \quad . \quad . \quad (3)$$

Mivel e §. megfontolásai még akkor is állanak, ha $A\mathfrak{N}_v$ helyébe az OA távolságot, azaz a 0 ad rendű sebességet tesszük, azért a (3) rendszer még a $v=-1$ esetre is érvényes, mikor is $v_x = x' + \omega_y z - \omega_z y$ s i. t. [V. ö. a 371. §. 36a. feladatát].

E formulákat tényleg alkalmazhatjuk, ha az XYZ rendszer forgásának $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ szögsebességi componenseit ismerjük.

342. §. Alkalmazás a magasabb rendű gyorsulások tangenciális, normális és binormális összetevőinek képzésére.

Válaszszuk most az X, Y, Z mozgó tengelyek gyanánt a mozgó pont abszolút pályája mindenkori tangenséhez, normálisához és binormálisához [Math. repertórium 75a. §. 26. ábra, vagy ezen mű, 65. §. 80. l., 34. ábra) párhuzamos OX, OY, OZ vonalakat, melyek O kez-

dete szilárd; a TNB rendszert az idézett 34. ábra értelmében vesszük fel.

A mozgó pont a pályáján ds ívelemmel halad tovább; a tangens, normális és binormális rendszere elemi forgást szenved (ezenkívül translációt is, mely azonban itt közömbös); e forgás összetevőit a T tangens (X tengely), N normális (Y tengely) és a B binormális (Z tengely) körül kívánjuk meghatározni.

1. A T tangens körül az osculáló sík (a TN sík) $d\varepsilon$ csavarodási szöggel forog, melynek értéke [Math. repertórium 68. §. (2)]:

$$d\varepsilon = \frac{ds}{\tau} = \omega_x dt, \quad (1)$$

hol τ a pálya csavarodási sugara.

2. Az N normális körül a tengely-rendszer csak másodrendű csekély forgást szenved (az egymásra következő két tangens ugyanis, másodrendű csekély megnyitások elhanyagolásával a TN síkban fekvőnek tekinthető, i. h.); ezért:

$$\omega_y dt = 0, \quad (2)$$

3. A B binormális körül az osculáló sík (a TN sík) és vele együtt a tangens is $d\vartheta$ görbületi szöggel forog, melynek értéke [Math. repertórium 68. §. (1)]:

$$d\vartheta = \frac{ds}{\rho} = \omega_z dt, \quad (3)$$

hol ρ a pálya görbületi sugara.

Ezek helyettesítésével a megelőző §. (3) egyenleteiből, ha bennük még az x, y, z jelzőket itt a t, n, b , jelzőkkel felcseréljük:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{v+1,t} &= \frac{d\varphi_{v,t}}{dt} - \frac{\varphi_{v,n}}{\rho} \frac{ds}{dt}; \\ \varphi_{v+1,n} &= \frac{d\varphi_{v,n}}{dt} + \frac{\varphi_{v,t}}{\rho} \frac{ds}{dt} - \frac{\varphi_{v,b}}{\tau} \frac{ds}{dt}; \\ \varphi_{v+1,b} &= \frac{d\varphi_{v,b}}{dt} + \frac{\varphi_{v,n}}{\tau} \frac{ds}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

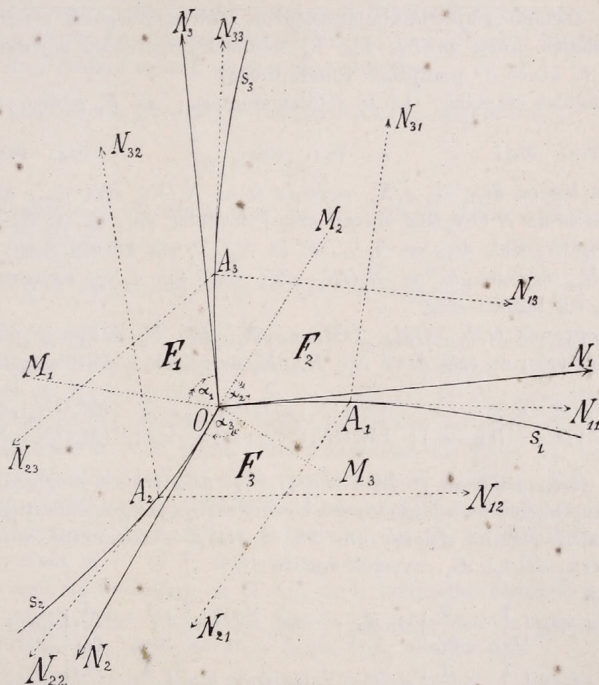
Ez pedig a 63. §. (4) rendszerével teljesen megegyező egyenlet-csoport.

343. §. *Az elszállító rendszer tengelyei az egymást orthogonálisan metsző felületek metszővonalainak érintőjéhez párhuzamosak legyenek.*

A mozgó pont helyzetét görbevonali koordináták által adottnak tekintjük [Math. repertórium 41. §. 5. pontja], melyeket itt egymást orthogonálisan metsző felületek $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ paramétereinek vesszük.

Az A ponton keresztül, mely itt az O kezdettel esik egybe (265. ábra) azon három s_1, s_2, s_3 metszőgörbe halad, melyben az ezen A (azaz O) ponton átmenő F_1, F_2, F_3 három felület közül kettő-kettő egymást metszi; e görbék N_1, N_2, N_3 érintői A -ban (O -ban) egymásra merőlegesek; ezek az érintők egyszersmind rendre az A -ban (O -ban) találkozó F_1, F_2, F_3 felületek normálisai.

E normálisak azon irányait tekintjük positiveknek, melyek a növekedő $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ paramétereknek megfelelnek.



265. ábra.

I. Mindenek előtt az ily orthogonális felület-rendszer egy fontos tulajdonságát kívánjuk megállapítani.

[E czélból a Math. repertórium 88, 95, 98. §§. eredményeit tartjuk szemmel].

1. Válaszszuk az s_1, s_2, s_3 görbék mentén az A_1, A_2, A_3 pontokat olyformán, hogy $OA_1 = OA_2 = OA_3 = ds_0$; e pontokban is kénytelen az F_1, F_2, F_3 felületek családjá egymást orthogonálisan metszeni.

Legyen N_{11} az s_1 -hez az A_1 -ben húzott érintő; N_{21} és N_{31} az ugyan-ezen ponton áthaladó F_2 és F_3 felületekre ugyancsak A_1 -ben emelt normálisak; ugyanily jelentéssel bírnak az A_2 ponton áthaladó s_2 görbére,

az F_3 és F_1 felületekre nézve az N_{22} , N_{32} , N_{12} egyenesek és végre az A_3 ponton áthaladó s_3 görbére, az F_{12} és F_2 felületekre nézve az N_{33} , N_{13} , N_{23} egyenesek.

A felület-családok orthogonalitásánál fogva az

$$N_1 N_2 N_3; \quad N_{11} N_{21} N_{31}; \quad N_{12} N_{22} N_{32}; \quad N_{13} N_{23} N_{33}$$

vonalrendszerek külön-külön derékszögűek.

Az OA_1 , OA_2 , OA_3 ívelemek *normális* metszetek ugyan, de olyanok, melyek metsző felületei általánosságban nem síkok; ezért az s_1 , s_2 , s_3 görbék osculáló síkjai is általánosságban nem merőlegesek a felületekre.

Jeleljék most az F_1 , F_2 , F_3 felületek főgörbületi sugarai párait rendre (a közös O pontjukra vonatkozólag)

az F_1 felület számára: az F_2 felület számára: az F_3 felület számára:

$$\varrho_{1,1}, \varrho_{1,2}; \quad \varrho_{2,1}, \varrho_{2,2}; \quad \varrho_{3,1}, \varrho_{3,2};$$

továbbá legyen $d\epsilon_{2,1}$ az $A_1 N_{21}$ egyenes és az $N_1 O N_2$ sík-, $d\epsilon_{3,1}$ az $A_1 N_{31}$ egyenes és az $N_1 O N_3$ sík közötti szög; továbbá $d\epsilon_{3,2}$ az $A_2 N_{32}$ egyenes és az $N_2 O N_3$ sík-, $d\epsilon_{1,2}$ az $A_2 N_{12}$ és az $N_2 O N_1$ sík közötti szög; és $d\epsilon_{1,3}$ az $A_3 N_{13}$ egyenes és az $N_3 O N_1$ sík-, $d\epsilon_{2,3}$ az $A_3 N_{23}$ egyenes és az $N_3 O N_2$ sík közötti szög.

Legyenek OM_1 , OM_2 , OM_3 az F_1 , F_2 , F_3 felületek *főmetszetei* közül egy-egy; az ezek és az N_1 , N_2 , N_3 tengelyek közötti szögek pedig:

$$\begin{aligned} (M_1 O N_3) &\not\rightarrow \alpha_1; & (M_2 O N_1) &\not\rightarrow \alpha_2; & (M_3 O N_2) &\not\rightarrow \alpha_3 \\ (M_1 O N) &\not\rightarrow -(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha_1); & (M_2 O N_3) &\not\rightarrow -(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha_2); & (M_3 O N_1) &\not\rightarrow -(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha_3). \end{aligned}$$

1. Ezen jelölések mellett, a $d\epsilon_{2,1} \dots d\epsilon_{2,3}$ szögek meghatározására BERTRAND tételét, de a másodrendű kicsiny mennyiségek elhanyagolásával alkalmazva [Math. repertórium 98. §. (1)] és tekintetbe véve, hogy $OA_1 = OA_2 = OA_3 = ds_0$, nyerjük rendre:

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_{2,1} &= +\tfrac{1}{2} ds_0 \left\{ \frac{1}{\varrho_{2,2}} - \frac{1}{\varrho_{2,1}} \right\} \sin 2\alpha_2; & d\epsilon_{3,1} &= -\tfrac{1}{2} ds_0 \left\{ \frac{1}{\varrho_{3,2}} - \frac{1}{\varrho_{3,1}} \right\} \sin (\pi - 2\alpha_3) \\ d\epsilon_{3,2} &= +\tfrac{1}{2} ds_0 \left\{ \frac{1}{\varrho_{3,2}} - \frac{1}{\varrho_{3,1}} \right\} \sin 2\alpha_3; & d\epsilon_{1,2} &= -\tfrac{1}{2} ds_0 \left\{ \frac{1}{\varrho_{1,2}} - \frac{1}{\varrho_{1,1}} \right\} \sin (\pi - 2\alpha_1) \\ d\epsilon_{1,3} &= +\tfrac{1}{2} ds_0 \left\{ \frac{1}{\varrho_{1,2}} - \frac{1}{\varrho_{1,1}} \right\} \sin 2\alpha_1; & d\epsilon_{2,3} &= -\tfrac{1}{2} ds_0 \left\{ \frac{1}{\varrho_{2,2}} - \frac{1}{\varrho_{2,1}} \right\} \sin (\pi - 2\alpha_2) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Ezen egyenletekből azonnal következik:

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_{2,1} &= -d\epsilon_{2,3}; \\ d\epsilon_{3,2} &= -d\epsilon_{3,1}; \\ d\epsilon_{1,3} &= -d\epsilon_{1,2}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

2. Ezenkívül, mivel az $(N_{21} A_1 N_{31}) \not\rightarrow$, $(N_{32} A_2 N_{12}) \not\rightarrow$, $(N_{13} A_3 N_{23}) \not\rightarrow$ szögek az orthogonális feltételei szerint mindig *derékszögek*, önként következnek, hogy (magasabbrendű kicsiny mennyiségek elhanyagolásával) az

N_{21} s az (N_2ON_1) sík-, valamint az N_{31} és az (N_3ON_1) sík között lévő $d\epsilon_{2,1}$ és $d\epsilon_{3,1}$ szögek egyenlők tartoznak lenni s i. t.; azaz rendre

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_{2,1} &= d\epsilon_{3,1}; \\ d\epsilon_{3,2} &= d\epsilon_{1,2}; \\ d\epsilon_{1,3} &= d\epsilon_{2,3}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

3. A (2) és (3) egyenleteket egyetlen egy egyenletté akként egyesíthetjük, hogy pl. $d\epsilon_{2,1}$ -ből kiindulva a (2) első egyenletét felírva, jobb oldali részét a (3) harmadik egyenletéből fejezzük ki, azután az így származó egyenlet jobb oldalát ismét a (2) harmadik egyenletéből fejezzük s i. t. és ezt az eljárást addig folytatjuk, míg a cyclus befejezésével ismét a $d\epsilon_{2,1}$ értékig jutunk vissza. Nyerjük így:

$$d\epsilon_{2,1} = -d\epsilon_{2,3} = -d\epsilon_{1,3} = +d\epsilon_{1,2} = +d\epsilon_{3,2} = -d\epsilon_{3,1} = -d\epsilon_{2,1};$$

azaz:

$$d\epsilon_{2,1} = -d\epsilon_{2,1},$$

mely egyenlet csak úgy állhat fenn, ha $d\epsilon_{2,1} = 0$; de ekkor a többi szögek is zérus értékűek, azaz:

$$d\epsilon_{2,1} = d\epsilon_{3,1} = d\epsilon_{3,2} = d\epsilon_{1,2} = d\epsilon_{1,3} = d\epsilon_{2,3} = 0 \dots \dots \dots (4)$$

4. A (4) egyenletek értelmében az OA_2 ívelem O és A_2 pontjaiban az F_1 -re emelt N_1 és N_{12} normálisak az N_1N_2 síkba esnek; az OA_3 ívelem O és A_3 pontjaiban az F_2 -re emelt N_2 és N_{23} normálisak az N_2N_3 síkba; az OA_1 ívelem O és A_1 pontjaiban az F_3 -ra emelt N_3 és N_{31} normálisak az N_3N_1 síkba esnek; hasonlóan az N_2 és N_{21} az N_1N_2 síkba, az N_3 és N_{32} az N_2N_3 síkba és végre az N_1 és N_{13} az N_1N_3 síkba.

Ezek szerint az OA_1 ívelem az F_2 és az F_3 felületek közös és kölcsönös főmetszete; épen így az QA_2 ívelem az F_3 és F_1 felületekre és az OA_3 ívelem az F_1 és F_2 felületekre nézve.

Ugyanez az eredmény az (1)-ből a (4) tekintetbe vételével azonnal adódik, mivel ekkor kell, hogy legyen: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$; azaz, M_1 az ON_1 mentén, OM_2 az N_2 és M_3 a közös ON_3 mentén esik.

5. Az 1—4. pontokban említettek a tér minden A (itt O) pontjára érvényesek lévén, nyerjük a következő tételt: *Egymást mindennütt orthogonálisan metsző felületek metszőgörbéinek minden eleme közös főmetszete azon két felületnek, melyeknek kölcsönös metszéséből keletkezett és így maguk e metszőgörbék a metszést létesítő két-két felületnek görbületi vonalai* [Math. repertórium 95. §.].

II. Elszállító XYZ rendszerünk tengelyei rendre mindig párhuzamosak legyenek az $N_1N_2N_3$ irányokkal; a 341. §. értelmében e rendszer azon forgásának $\omega_x dt$, $\omega_y dt$, $\omega_z dt$ összetevőit kell meghatározoznunk, mely forgást e tengelyrendszer szenved, mialatt az A pont (a 265. ábrában az O pont) elemi elmozdulást végez.

Jeleljék ds az A pályájának ívelemét, ds_1 , ds_2 , ds_3 ennek vetületeit N_1 , N_2 , N_3 mentén (265. ábra).

Lássuk, mily forgást létesítenek külön-külön a ds_1 , ds_2 , ds_3 elmozdulási vetületek és jeleljük az N_1 , N_2 , N_3 körüli, ds_1 folytán származó forgásszögeket $d\vartheta_{11}$, $d\vartheta_{21}$, $d\vartheta_{31}$ -el, a ds_2 és ds_3 folytán származókat $d\vartheta_{12}$, $d\vartheta_{22}$, $d\vartheta_{32}$ -vel, illetve $d\vartheta_{13}$, $d\vartheta_{23}$, $d\vartheta_{33}$ -al.

Még megjegyezzük, hogy a görbületi sugarakat akkor tekintjük pozitíveknek, ha irányaik a pozitív normálisakéival megegyeznek.

1. A $ds_1 = OA_1$ elmozdulás folytán az $N_1N_2N_3$ rendszer $N_{11}N_{21}N_{31}$ helyzetbe jutott, melynél az I. alatt bebizonyított tétel szerint, az N_2 , mialatt N_{21} -be jutott, az N_1N_2 síkban, azaz az N_3 körül pozitív (N_1 -től N_2 -felé) és pedig $d\vartheta_{31}$ szögű forgást végzett, mely az F_2 -nek ON_2 menti $\varrho_{2,1}$ főgörbületi sugara és ds_1 által adódik (az F_2 homorú oldalát N_2 felé fordítván) $d\vartheta_{31} = + \frac{ds_1}{\varrho_{2,1}}$. Ezenkívül az N_3 az N_3N_1 síkban N_{31} -ig, azaz az N_2 körül $d\vartheta_{21}$ pozitív szögű forog, mely (mivel az F_3 felület domború oldalát fordítja N_3 felé és így ennek idetartozó $\varrho_{3,2}$ görbületi sugara negatív): $d\vartheta_{21} = - \frac{ds_1}{\varrho_{3,2}}$. Végre az N_1 körüli $d\vartheta_{11}$ forgásszög [a (4) értelmében] zérus.

Összefoglalva, a ds_1 folytán felmerülő forgás szögsebességi komponensei:

$$\frac{d\vartheta_{11}}{dt} = 0; \quad \frac{d\vartheta_{21}}{dt} = - \frac{ds_1}{dt} \cdot \frac{1}{\varrho_{3,2}}; \quad \frac{d\vartheta_{31}}{dt} = + \frac{ds_1}{dt} \cdot \frac{1}{\varrho_{2,1}} \quad . \quad . \quad (5)$$

2. Teljesen ezen eljárás szerint [vagy közvetlenül (5)-ből is, az indexeket cyclososan felcserélve], a ds_2 és a ds_3 folytán keletkező forgások szögsebességi komponensei:

$$\frac{d\vartheta_{12}}{dt} = + \frac{ds_2}{dt} \cdot \frac{1}{\varrho_{3,1}}; \quad \frac{d\vartheta_{22}}{dt} = 0; \quad \frac{d\vartheta_{32}}{dt} = - \frac{ds_2}{dt} \cdot \frac{1}{\varrho_{1,2}} \quad . \quad . \quad (6)$$

$$\frac{d\vartheta_{13}}{dt} = - \frac{ds_3}{dt} \cdot \frac{1}{\varrho_{2,2}}; \quad \frac{d\vartheta_{23}}{dt} = + \frac{ds_3}{dt} \cdot \frac{1}{\varrho_{1,3}}; \quad \frac{d\vartheta_{33}}{dt} = 0 \quad . \quad . \quad (7)$$

3. Mivel elszállító XYZ rendszerünk mindig párhuzamos marad a mindenkor $N_1N_2N_3$ rendszerhez, e II. szakasz első kikezdése szerint keresett szögsebességi összetevői az (5), (6), (7) egyenletekből, az egymás alatt álló értékek összegezéséből adódnak; ha még írjuk az A (itt O) pont sebességi összetevőit:

$$\frac{ds_1}{dt} = v_1; \quad \frac{ds_2}{dt} = v_2; \quad \frac{ds_3}{dt} = v_3;$$

akkor a szögsebesség komponensei:

$$\omega_1 = \omega_x = + \frac{v_2}{\varrho_{3,1}} - \frac{v_3}{\varrho_{2,2}}; \quad \omega_2 = \omega_y = + \frac{v_3}{\varrho_{1,1}} - \frac{v_1}{\varrho_{3,2}}; \quad \omega_3 = \omega_z = + \frac{v_1}{\varrho_{2,1}} - \frac{v_2}{\varrho_{1,2}}, \quad (8)$$

melyek a 341. §. (3) formuláiba való helyettesítés s bennük az x, y, z indexeknek $1, 2, 3$ -mal való felcserélése után az ezen rendszerre vonatkozó magasabb rendű gyorsulásokat engedik kiszámítani:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{r+1,1} &= \frac{d\varphi_{r,1}}{dt} + \omega_2 \varphi_{r,3} - \omega_3 \varphi_{r,2} \\ \varphi_{r+1,2} &= \frac{d\varphi_{r,2}}{dt} + \omega_3 \varphi_{r,1} - \omega_1 \varphi_{r,3} \\ \varphi_{r+1,3} &= \frac{d\varphi_{r,3}}{dt} + \omega_1 \varphi_{r,2} - \omega_2 \varphi_{r,1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

344. §. Alkalmazás a magasabb rendű gyorsulásoknak térbeli polárkoordináták szerinti szétbontására.

A térbeli polárkoordináták a következő, egymást orthogonálisan metsző három felület paraméterei: *a)* egy r sugarú gömb; *b)* egy η nyílású, Z tengelyű körkúp; *c)* egy ϑ szögű (földrajzi hosszúságú) meridiánsík [35. §., 34. l., 16. ábra].

E felületek metszövonalainak érintői AR , AH , $A\theta$ tengelyű, rendszert alkotnak. (16. ábra.)

1. A gömb két főmetszetének görbületi sugarai:

$$\varrho_{1,1} = -r; \quad \varrho_{1,2} = -r \dots \dots \dots (1)$$

(negatív az előjel, mert a gömb domború oldalát fordítja az \overline{AR} tengely felé).

2. A körkúpnak az A pontra vonatkozó főmetszetei egyike az OA egyenes és ennek folytatása, másika pedig az az ellipsis, mely a kúp-felületnek normális és az OA -ra merőleges metszéséből származik. Mivel $r \sin \eta$ az A -n átmenő párhuzamos körnek (a Z -tengelytől A -felé pozitívnek vett) sugara, ez pedig a kúpra az A -ban emelt AH normálisával η szöget képez, azért a kúp ezen második főgörbületi sugara, MEUSNIER tétele szerint [Math. repertórium 85. §. (3)]: $\varrho_{2,2} \cos \eta = -(r \sin \eta)$; (a negatív előjelet az okozza, hogy a kúp domború felülete néz az AH tengely fele) úgy, hogy itt:

$$\varrho_{2,1} = \infty; \quad \varrho_{2,2} = -r \operatorname{tg} \eta \dots \dots \dots (2)$$

3. A PAO meridiánsík főgörbületi sugarai:

$$\varrho_{3,1} = \infty; \quad \varrho_{3,2} = \infty \dots \dots \dots (3)$$

4. Az A pont sebességi összetevői [35. §. (1)]:

$$v_r = v_1 = \frac{dr}{dt}; \quad v_\eta = v_2 = r \frac{d\eta}{dt}; \quad v_\vartheta = v_3 = r \sin \eta \frac{d\vartheta}{dt} \dots \dots (4)$$

5. Ezekből a megelőző §. (8) és (9) egyenletei, ha bennük az $1, 2, 3$ indexeket rendre az r, η, ϑ indexekkel cseréljük fel:

$$\omega_1 = \omega_r = + \cos \eta \frac{d\vartheta}{dt}; \quad \omega_2 = \omega_\eta = - \sin \eta \frac{d\vartheta}{dt}; \quad \omega_3 = \omega_\vartheta = + \frac{d\eta}{dt} \dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{r+1,r} &= \frac{d\varphi_{r,r}}{dt} - \sin \eta \frac{d\vartheta}{dt} \varphi_{r,\vartheta} - \frac{d\eta}{dt} \varphi_{r,\eta}; \\ \varphi_{r+1,\eta} &= \frac{d\varphi_{r,\eta}}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \varphi_{r,r} - \cos \eta \frac{d\vartheta}{dt} \varphi_{r,\vartheta}; \\ \varphi_{r+1,\vartheta} &= \frac{d\varphi_{r,\vartheta}}{dt} + \cos \eta \frac{d\vartheta}{dt} \varphi_{r,\eta} + \sin \eta \frac{d\eta}{dt} \varphi_{r,r}. \end{aligned} \right\} \dots \dots (6)$$

6. Ezen sémákból az elsőrendű gyorsulást nyerjük, ha megfigyezzük, hogy $v_r = \varphi_{0,r}$, $v_\eta = \varphi_{0,\eta}$, $v_\vartheta = \varphi_{0,\vartheta}$, és ezeket az értékeket a (6) jobb részeibe helyettesítjük; az eredmény teljesen megegyezik a 45. §. (6) formuláival, de itt kényelmesebb úton találtuk.

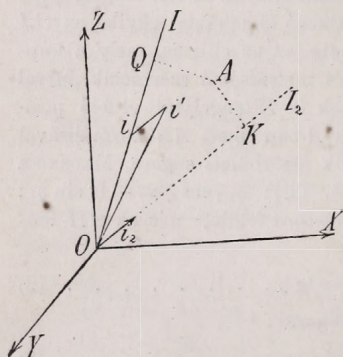
Ebből a magasabb rendű ilyenmű gyorsulás összetevői is egyszerű algebrai operációk segítségével, új megfontolások nélkül közvetlenül adódnak; a másodrendűek kifejtését az olvasónak ajánljuk.

10. Példák a pont és a merev pontrendszerek relatív mozgására.

345. §. CORIOLIS (CLAIRAUT) tétele magában foglalja RIVALS tételét.

Ha a merev rendszer egy pont körül foroghat, akkor a 336. §. tárgyalásai nagyon egyszerűsödnek.

Legyen XYZ (266. ábra) a szilárd tengelyrendszer, melynek O



266. ábra.

kezdeti egyszersmind a merev rendszer szilárd pontja és legyen X, Y, Z , az a tengelyrendszer, melynek helyzete a tekintetbe vett t időpillanatban az XYZ -ével egybeesik és melynek forgási sebessége állandóan egyenlő a merev rendszer forgássebességének t -kor érvényes értékével.

E szerint itt a „coincidáló” pontok sebességei mind megegyeznek a megfelelő rendszerbeli pontokéval (azaz, a v_r relatív sebesség zérus) de gyorsulásaik különböznek.

A rendszerbeli pontok sebességei a coincidálókéivel egyenlő lévén, és így CORIOLIS tételéből [338. (1)] marad:

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r \dots \dots \dots (1)$$

1. A a_e elszállító gyorsulás itt az X, Y, Z , tengelyrendszer forgásából keletkezik; ennek szögsebességei a tényleges momentán forgás szögsebességeivel, ω_x , ω_y , ω_z -vel egyenlők.

De, az X, Y, Z -nek az OI momentán forgási tengely körüli, állandónak tekintett forgása centripetális (középre tartó) gyorsulással jár, mely a 249. §. értelmében $\omega^2 \overline{AQ}$ értékű és a tengelyre merőleges AQ mentén fekszik.

2. A a_r , a relatív mozgás gyorsulása itt onnan származik, hogy míg coincidáló pontok szögsebessége állandóan ω , addig a tényleges mozgás már $t+dt$ időpillanatban $\omega+d\omega$; jeleljék $Oi=\omega$ és $Oi'=\omega+d\omega$ ezt a két szögsebességet irány és nagyság szerint; lévén \vec{n}' a szögsebes-

ségnek, mint vectornak, teljes változása, melynek componensei $d\omega_x$, $d\omega_y$, $d\omega_z$.

Felvéve ezt az $i\vec{i}'$ vectort az O -ból irány és nagyság szerint, úgy, hogy $i\vec{i}' = \vec{O}i_2$, az $\vec{O}i'$ -t úgy tekinthetni, mint az $\vec{O}i = \omega$ és az Oi_2 vectorok eredőjét; e szerint $t+dt$ időpillanatban a pontrendszer sebességét úgy tekinthetni, mint a mely a OI körül ω szögsebességgel és a OI_2 körül $[(d\omega_x)^2 + (d\omega_y)^2 + d\omega_z^2]^{\frac{1}{2}}$ szögsebességgel történő két forgásból származik.

Mivel ennek értelmében az A pont relatív sebessége t -kor zérus, $t+dt$ -kor pedig $\vec{O}i_2 \cdot \vec{AK}$ (266. ábra), azért a relatív gyorsulás itt:

$$\varphi_r = \frac{\vec{O}i_2}{dt} \cdot \vec{AK} = \varphi_\omega \vec{AK}, \quad (2)$$

hol φ_ω a szöggyorsulás (249. §. 1. pontja), a φ_r maga pedig a relatív sebesség növekedése mentén, azaz azon normális mentén fekszik, mely az A -ból mint talppontból kiindulva, mind az \vec{AK} -ra, mind az OK -ra merőleges.

3. E szerint nyerjük (1)-ből:

$$\vec{\varphi} = \omega^2 \vec{AQ} + \varphi_\omega \vec{AK}; \quad (3)$$

ez pedig RIVALS tétele, melyet már a 249. §-ban bebizonyítottuk.

346. §. *Példa. A gyorsulás szétbontása sík polárkoordináták szerint CORIOLIS tétele alapján.*

Vegyünk valamely pontja körül síkban forgó egyeneset szemügyre, és benne az egyenes mentén haladó valamely pontot; fejeztessék ki ennek abszolút gyorsulása CORIOLIS tétele alapján.

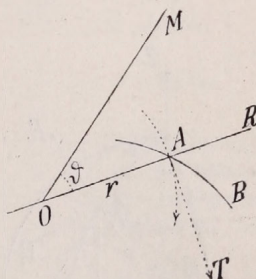
Legyen A (267. ábra) a forgó OR egyenes azon pontja, mely t időkor a mozgó A pont helyzetével egybeesik; azaz A az A -nak a egyenesben fekvő coincidáló pontja, mely az O körül r sugárral kört ír le.

1. Az A pont tényleges mozgása a coincidáló A ponthoz képest csak annyiban bír relatív mozgással, a mennyiben az előbbi az OR vonal mentén is mozog; a relatív sebesség és gyorsulás itt:

$$v_r = \frac{dr}{dt}; \quad \varphi_r = \frac{d^2r}{dt^2}; \quad (3)$$

2. Az elszállítás itt az OA sugarú kör mentén történik; e szerint az elszállító gyorsulás is ezen körmozgásból származó gyorsulás lehet csak, melynek két összetevője van.

$$\text{Jeleljék:} \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \omega; \quad \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \omega', \quad \text{ekkor:}$$



267. ábra.

Az egyik, a *centripetális* componens: $-\omega^2 r$, mely O felé tart,
a másik, a *tangenciális* componens: $+\omega' r$, mely T felé tart.
E szerint

$$\vec{\varphi}_e = \vec{\omega}' r - \omega^2 r \dots \dots \dots (4)$$

3. Az összetett centripetális, vagy CORIOLIS-féle gyorsulás értéke itt egyszerű, mert a 336. §. (4) formulája $2\omega v_r \sin \eta$ tagjában η a momentán forgás tengelye és a relatív sebesség között lévő szög, mely itt $\frac{1}{2}\pi$; marad

$$2\omega v_r \sin \eta = 2\omega \frac{dr}{dt}; \dots \dots \dots (5)$$

e gyorsulás a momentán forgás tengelye és a relatív sebesség által meghatározott sík normálisa mentén, azaz itt az AT mentén fekszik.

4. Összefoglalva a (3), (4), (5) formulákat, azt az eredményt nyerjük, hogy a tetszőleges AB pályát (267. ábra) leíró pont gyorsulása két componensből állónak tekinthető;

az egyik összetevő az r mentén fekszik, értéke $r'' - r\omega^2$;

a másik összetevő a növekvő ϑ mentén van, értéke $r\omega' + 2r'\omega$.

Ezt az eredményt más úton a 44. §. (7) formulában találtuk.

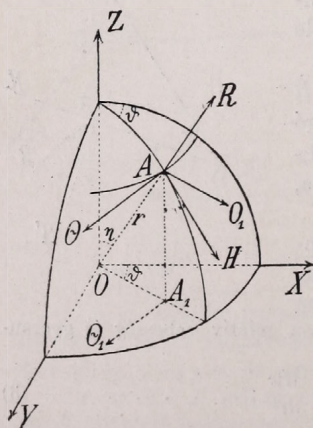
347. §. Példa: A gyorsulás szétbontása térbeli polárkoordináták szerint CORIOLIS tétele alapján.

Jelöljük az A mozgó pontnak gömbi összszerendezőit, mint a 23, 35

és 45. §§-okban r , η , ϑ , (16. ábra, 34. lap és 268. ábra); ezen koordináták növekedésének irányai rendre az AR , az AH , az $A\theta$ vonalakkal esnek egybe; ezek mentén kívánjuk a gyorsulást szétbontani.

Az A mozgását összetettnek tekintjük: 1. az A -nak az AOZ síkban történő (ezen síkhoz relatív) mozgásából. 2. Az A -nak az AOZ sík OZ körüli forgásából származó mozgásából.

1. Az A -nak az AOZ síkban fekvő polárkoordinátái r és η ; az e síkban történő (relatív) mozgás gyorsulásának, φ_r -nek mely itt össze nem tévesztendő az i. h. radiális gyorsulásával), vezérsugári és forgató összetevői a 44. §. (7) egyenletei értelmében:



268. ábra.

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 \text{ az } R \text{ mentén}; \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\eta}{dt} \right) \text{ az } H \text{ mentén} \quad (1)$$

2. Az AOZ síknak az OZ körüli forgása csak az A -nak az XY -síkra vetített A_1 nyoma koordinátáit változtathatja meg (268. ábra); ha e koordináták $OA_1 = r \sin \eta$ és ϑ , akkor itt csak ϑ változhatik. A forgás szögsebessége itt $\frac{d\vartheta}{dt}$ lévén, az A_1 -nek és vele együtt az A -nak e forgás folytán felmerülő tangenciális és normális gyorsulási componense a 46. §. (5) egyenletei értelmében:

$$r \sin \eta \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} \text{ az } A_1 \Theta_1 \text{ mentén,} \quad -r \sin \eta \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \text{ az } OA_1 \text{ mentén;} \quad (2a)$$

az utóbbi componens negatív előjele onnan származik, hogy itt a normális gyorsulás *centripetális*, azaz $A_1 O$ -irányú.

Mintán e componensek egyszersmind az A mozgása azon részének gyorsulásai, melyek az OZ körüli forgásból származnak, azért (az $A_1 \Theta_1$ az OA_1 -re merőleges lévén) az A ezen gyorsulási componensei közül az első (az $A_1 \Theta_1$ -hoz párhuzamos) $A\Theta$ mentén, a második az (az OA_1 -hez párhuzamos) $O_1 A$ mentén fekszik.

Az AR és az AH az $A_1 OZ$ síkban fekszenek; az AO_1 is, az előbbi megjegyzés szerint, ugyanebben a síkban fekszik és az AH -val η , az AR -el $\frac{1}{2}\pi - \eta$ szöget képez.

Szétbontva e szerint a (2a) második, OA_1 menti componensét AR - és AH menti összetevőkre, az elszállító gyorsulásnak, φ_e -nek a (2a)-ból keletkező összes componensei:

$$\left. \begin{aligned} -r \sin^2 \eta \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \text{ az } R \text{ mentén;} \quad & -r \sin \eta \cos \eta \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \text{ az } H \text{ mentén,} \\ & +r \sin \eta \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} \text{ a } \Theta \text{ mentén.} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

3. Hátra van még az összetett centripetális (a CORIOLIS-féle) gyorsulás szerkesztése; ennek $2\omega, v_{rel} \sin \zeta$ az értéke, hol ω , az elszállító rendszer szögsebessége a momentán tengely körül, v_{rel} ezen rendszerben a (relatív) sebesség és ζ e sebesség és a momentán tengely közötti szög [336. §. 1. pontja, hol ω , v , η e mennyiségek jelei].

Jelen esetünkben, az AOZ sík az elszállító rendszer; OZ a momentán forgás tengelye; $\frac{d\vartheta}{dt}$ az elszállítás szögsebessége e rendszerben; v_{rel} a relatív sebesség, melynek az AR , illetve AH menti vezérsugári és forgató componense $\frac{dr}{dt}$ és $r \frac{d\eta}{dt}$; továbbá, mivel az AO_1 merőleges az OZ -re, azért $v_{rel} \sin \zeta$ a relatív sebesség vetülete az AO_1 -re, mely vetületet azonban a v_{rel} felírt két összetevőjéből és az AO_1 irányból azonnal nyerhetjük, mivel ez az irány a vezérsugári componenssel $\frac{1}{2}\pi - \eta$, a forgatóval η szöget képez és így a vectorok szabályai szerint:

$$v_{rel} \sin \zeta = \frac{dr}{dt} \sin \eta + r \frac{d\eta}{dt} \cos \eta.$$

Ezek értelmében a CORIOLIS-féle gyorsulás (mely a relativ sebesség és a momentán tengelyen átmenő síknak a forgás irányában emelt normálisa mentén, itt tehát az $A\theta$ mentén fekszik):

$$\varphi_c = 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\vartheta}{dt} \sin \eta + 2r \frac{d\eta}{dt} \frac{d\vartheta}{dt} \cos \eta \quad \text{a } \theta \text{ mentén} \quad . \quad (3)$$

4. Egybefoglalva és rendezve az (1), (2), (3) alatti gyorsulások componentjeit, nyerjük:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_R &= \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 - r \sin^2 \eta \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2; \\ \varphi_H &= \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\eta}{dt} \right) - r \sin \eta \cos \eta \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2; \\ \varphi_\theta &= \frac{1}{r \sin \eta} \frac{d}{dt} \left(r^2 \sin^2 \eta \frac{d\vartheta}{dt} \right); \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

mely egyenletek teljesen megegyeznek a 45. §. (6) kifejezéseivel és a 344. §. 6. pontja eredményeivel.

348. §. *Valamely pontnak egy forgó gömb (a föld) felületéhez viszonyított relativ mozgása.*

A föld felületéhez közeli mozgások megvizsgálásánál rendszeren beérjük a föld tengelye körüli forgása azon befolyását meghatározni, melyet középfutó gyorsulásnak neveznek (v. ö. a 350. §-ot).

De tényleg ezen befolyás tetemesen bonyolódottabb; ismerete a föld felületén vagy ennek közelségében végbemenő mozgások tanulmányozására nézve okvetetlenül szükséges, miért is a következőkben az ily mozgásoknak a földdel szilárd kapcsolatban lévő koordináta-rendszerre vonatkozó mozgás-egyenleteit fogjuk felállítani.

Jelelje (269. ábra, 598. l.) PQ a föld forgás-tengelyét; maga a forgás nyugatról keletre történvén, a QP folytatásában a P fölött lévő szem e forgást az óramutató járásával ellenkező irányúnak látja.

I. Az elszállító koordinátákra vonatkozó összes menynyiségeket itt a most felesleges, jelzés elhagyásával írjuk. A földdel együtt mozgó ezen elszállító XYZ rendszer kezdete a föld felületén legyen O ; ennek távolsága a föld középpontjától r , földrajzi szélessége λ , földrajzi hosszúsága (a PO meridián és az első meridián [itt a rajz síkja] közötti szög) ϑ .

Továbbá, ezen elszállító rendszer Y tengelye egybeesik a $O-n$ átmenő párhuzamos körhöz a növekvő ϑ -k mentén húzott OY érintővel, X tengelye a PO meridiánhoz a fogyó λ -k mentén húzott OX érintővel, Z tengelye pedig a CO -nak (az r -nek) OZ folytatásával. (E rendszer tengelyeinek egymásutánja megegyezik a 216. §. lábjegyzéké pozitív rendszerével).

Legyen végre CM , CN , CP az az egymásra merőleges három szilárd helyzetű vonal, melyre a mozgó OX , OY , OZ tengelyek irányait vonatkoztatni akarjuk. Az ábrából kitűnik, hogy OY az MCN síkhoz párhuzamos és CM -mel $\frac{1}{2}\pi + \vartheta$, CN -el ϑ , a CP -vel $\frac{1}{2}\pi$ szöget képez;

továbbá, hogy OX a CP -vel $\pi - \lambda$ szöget-, OX -nak az MCN síkra való vetülete a CO_1 folytatásába esvén, CM -el ϑ , CN -el $\frac{1}{2}\pi - \vartheta$ szöget képez; végre, hogy OZ a CP -vel $\frac{1}{2}\pi - \lambda$ szöget-, MCN síkra való vetülete pedig szintén a CO_1 folytatásába esvén, CM -el ϑ , CN -nel $\frac{1}{2}\pi - \vartheta$ szöget képez.

II. Ennek értelmében a CM , CN , CF mozdulatlan irányok és az OX , OY , OZ elszállító tengelyek között az iránycosinusok következő táblázatos sémája érvényes [az X -, Y -, Z -hez kapcsolt ϑ index csak azt jelenti, hogy az irányok a $\vartheta = \vartheta$ szöghöz tartoznak; így pl. az X_ϑ és az N egyenesek közötti szög cosinusa $\sin \lambda \sin \vartheta$ s í. t.].

	M	N	P	
X_ϑ	$\sin \lambda \cos \vartheta$	$\sin \lambda \sin \vartheta$	$-\cos \lambda$ (1)
Y_ϑ	$-\sin \vartheta$	$\cos \vartheta$	0	
Z_ϑ	$\cos \lambda \cos \vartheta$	$\cos \lambda \sin \vartheta$	$\sin \lambda$	

A következőkben szükségünk lesz az $OXYZ$ rendszernek a forgás folytán egymásra következő két szomszédos helyzetének helyzetkülönösen pedig iránykülönbségére; ezért írjuk fel az (1) alatti iránycosinusokat az O -nak λ -s $\vartheta + d\vartheta$ coordinátájú helyzetére nézve. A keletkező séma:

	M	N	P	
$X_{\vartheta+d\vartheta}$	$\sin \lambda \cos \vartheta - \sin \lambda \sin \vartheta d\vartheta$	$\sin \lambda \sin \vartheta + \sin \lambda \cos \vartheta d\vartheta$	$-\cos \lambda$ (2)
$Y_{\vartheta+d\vartheta}$	$-\sin \vartheta - \cos \vartheta d\vartheta$	$\cos \vartheta - \sin \vartheta d\vartheta$	0	
$Z_{\vartheta+d\vartheta}$	$\cos \lambda \cos \vartheta - \cos \lambda \sin \vartheta d\vartheta$	$\cos \lambda \sin \vartheta + \cos \lambda \cos \vartheta d\vartheta$	$\sin \lambda$	

Az (1) és (2)-ből azonnal nyerhetjük az X_ϑ , Y_ϑ , Z_ϑ és az $X_{\vartheta+d\vartheta}$, $Y_{\vartheta+d\vartheta}$, $Z_{\vartheta+d\vartheta}$ irányok által képezett szögek iránycosinusait.

Eljárva a közösleges módon [Math. repertórium 43. §. (3) formulája], a másodrendű tagok elhanyagolásával, némi rövidítések után a következő sémát nyerjük:

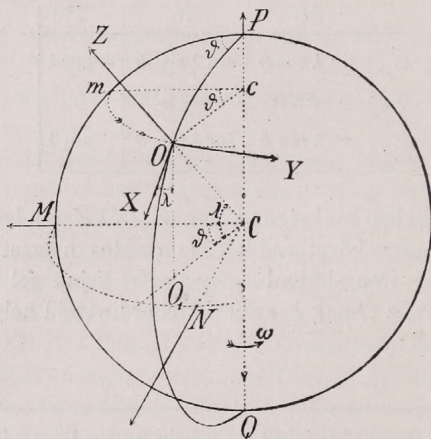
	$X_{\vartheta+d\vartheta}$	$Y_{\vartheta+d\vartheta}$	$Z_{\vartheta+d\vartheta}$	
X_ϑ	1	$-\sin \lambda d\vartheta$	0 (3)
Y_ϑ	$+\sin \lambda d\vartheta$	1	$+\cos \lambda d\vartheta$	
Z_ϑ	0	$-\cos \lambda d\vartheta$	1	

349. §. Folytatás. A forgó gömbhöz (a földhöz) viszonyított relatív mozgás differenciálegyenletei.

A következőkben a 339. §. (6) formuláit fogjuk jelen esetünkre, de az ott használt, jelölés elhagyásával képezni.

I. A föld forgásának és vele együtt az XYZ elszállító rendszernek is a szögsebessége $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$; ezt itt állandónak és a QP -hez párhuzamos vectornak tekintjük.

1. Ezen forgás CP tengelyének, avagy a vele párhuzamos O_1O -nek pozitív iránya (269. ábra) az X, Y, Z tengelyekkel rendre $\pi - \lambda, \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi - \lambda$



269. ábra.

szögeket képez és ezért az ω -nak ezen tengelyek menti componensei rendre:

$$t\text{-kor: } \omega_x = -\omega \cos \lambda; \quad \omega_y = 0; \quad \omega_z = +\omega \sin \lambda. \quad (1)$$

Továbbá az O kezdőpontnak abszolút sebességi összetevői az X, Y, Z tengelyek mentén [327. §. (2)] u_x, u_y, u_z ; mivel itt e sebesség csak a QP körüli forgásból származik, azért ez az OY mentén fekszik és componensei:

$$t\text{-kor: } u_x = 0; \quad u_y = r\omega \cos \lambda; \quad u_z = 0. \quad (2)$$

2. Hogy az (1) és (2) alatt írt mennyiségekből az ω' abszolút szöggyorsulás és az O pont abszolút gyorsulásának az elszállító rendszer X, Y, Z tengelyeire vonatkozó összetevőit nyerhessük, megfontoljuk, hogy az (1) és (2) értékek itt minden XYZ helyzetre nézve érvényesek ugyan, de az X, Y, Z iránya, és így az (1) és (2) alatt írt componenseké is az idő folytával változó.

Röviden: t időpillanatban az $\omega_x, \omega_y, \omega_z; u_x, u_y, u_z$ componensek

abszolút nagysága az (1)-ben és (2)-ben, irányecsinusai a megelőző §. (1) sémájában foglalvák, míg $t+dt$ időpillanatban abszolút értékei ugyanazok, de irányecsinusait a megelőző §. (2) sémája adja.

Vetítsük most a nevezett $t+dt$ időponti komponenseket azon irányokra, melyekkel az X, Y, Z tengelyek t -kor bírnak; ezt a megelőző §. (3) sémájának irányecsinusai segélyével azonnal tehetjük. A szögsebesség (1) vetületei $t+dt$ -kor rendre:

$$\begin{aligned} \text{az } X \text{ mentén:} & \quad -\omega \cos \lambda \cdot 1 - 0 \cdot \sin \lambda d\theta + \omega \sin \lambda \cdot 0 = -\omega \cos \lambda; \\ \text{az } Y \text{ mentén:} & \quad -\omega \cos \lambda \cdot \sin \lambda d\theta + 0 \cdot 1 + \omega \sin \lambda \cdot \cos \lambda d\theta = 0; \\ \text{a } Z \text{ mentén:} & \quad -\omega \cos \lambda \cdot 0 - 0 \cdot \cos \lambda d\theta + \omega \sin \lambda \cdot 1 = +\omega \sin \lambda. \end{aligned}$$

E vetületek értéke a t -kor érvényes (1) alatti ugyanezen irányú komponensekkel egyenlők lévén: a szögsebességnek egyetlenegy tengely mentén sincsen gyorsulása (változása); e szerint a szöggyorsulás összetevői itt:

$$\omega'_x=0, \quad \omega'_y=0; \quad \omega'_z=0 \dots \dots \dots (3)$$

Az O pont abszolút sebességének (2) vetületei pedig

$$\begin{aligned} t+dt\text{-kor:} \quad & 0.1 - r\omega \cos \lambda \cdot \sin \lambda d\theta + 0 \cdot 0 = -r\omega \sin \lambda \cos \lambda d\theta; \\ & 0 \cdot \sin \lambda d\theta + r\omega \cos \lambda \cdot 1 + 0 \cdot \cos \lambda d\theta = +r\omega \cos \lambda; \\ & 0.0 - r\omega \cos \lambda \cdot \cos \lambda d\theta + 0 \cdot 1 = -r\omega \cos^2 \lambda d\theta. \end{aligned}$$

Levonva ezen értékekből a (2) alattiakat és dt -vel osztva, nyerjük az O abszolút, itt csak a *forgás* folytán fellépő gyorsulásának vetületeit az X, Y, Z tengelyekre:

$$u'_x = -r\omega^2 \sin \lambda \cos \lambda; \quad u'_y = 0; \quad u'_z = -r\omega^2 \cos^2 \lambda \dots \dots (4)$$

II. Ezen (1), (3), (4) értékek segélyével képezzük a 339. §. (6) kifejezéseit a mozgó A pontra nézve, (melynek az XYZ elszállító rendszerben x, y, z az összszerendezői).

1. Az A abszolút gyorsulási összetevői *nyugvó* föld esetében

$$(\varphi_x)=0, \quad (\varphi_y)=0, \quad (\varphi_z)=-G \dots \dots \dots (5)$$

hol G a föld attractionális vonzásából származó \overline{OC} irányú gyorsulás.

2. Az *elszállító* gyorsulás összetevői [339. §. (4) és a jelen §. (1), (3), (4)]:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{ex} &= -r\omega^2 \sin \lambda \cos \lambda + \omega^2 (x \cos^2 \lambda - z \sin \lambda \cos \lambda) - \omega^2 x \\ \varphi_{ey} &= \dots \dots \dots - \omega^2 y \\ \varphi_{ez} &= -r\omega^2 \cos^2 \lambda - \omega^2 (x \sin \lambda \cos \lambda - z \sin^2 \lambda) - \omega^2 z \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

3. Végre a CORIOLIS-féle gyorsulás összetevői (339. §. (5)):

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{cx} &= -2y'\omega \sin \lambda; \\ \varphi_{cy} &= +2\omega (z' \cos \lambda + x' \sin \lambda); \\ \varphi_{cz} &= -2y'\omega \cos \lambda. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

4. Az (5), (6), (7) értelmében a 339. §. (6) formuláiból némi összevonással

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{ry} &= x'' = +\omega r^2 \sin \lambda \cos \lambda + \omega^2 x \sin^2 \lambda + \omega^2 z \sin \lambda \cos \lambda + 2\omega y' \sin \lambda; \\ \varphi_{rx} &= y'' = +\omega^2 y - 2\omega (x' \sin \lambda + z' \cos \lambda); \\ \varphi_{rz} &= z'' = -G + \omega^2 r \cos^2 \lambda + \omega^2 z \cos^2 \lambda + \omega^2 x \sin \lambda \cos \lambda + 2\omega y' \cos \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Itt x, y, z jelentik mint fent a mozgó A pontnak a földhöz viszonyított [a földdel együtt mozgó XYZ rendszerre vonatkozó (269. ábra)] relatív koordinátáit és a (8) ezen relatív mozgás differenciálegyenleteit tünteti elő; de mindig azon feltétel mellett, hogy a föld alakja szigorúan gömb, s hogy vonzása a felületen mindenütt a középpont felé van fordítva.

Az ellipsoid-alakú földre nézve ez egyenleteket a 353. §-ának (7) rendszere tartalmazza.

350. §. *A forgás befolyása a gömbfelületi földnehezségi (szabad esésbeli) gyorsulás nagyságára és irányára Függő ön a forgó gömbön.*

Egy homogén vagy koncentrikus homogén rétegekből összetett gömb bármily helyzetű pontra vonatkozó vonzásának (vonzó gyorsulásának)

iránya mindig átmegyzen e ponton és a gömb középpontján és minden felületi pontra nézve egy és ugyanazon értékű; legyen G ezen gyorsulás értéke.

Ha a gömb forgásban van, akkor a rajta λ földrajzi szélesség alatt fekvő O pont a forgás tengelye körül $a \cos \lambda$ sugarú kört ír le, a lévén a gömb sugara (270. ábra).

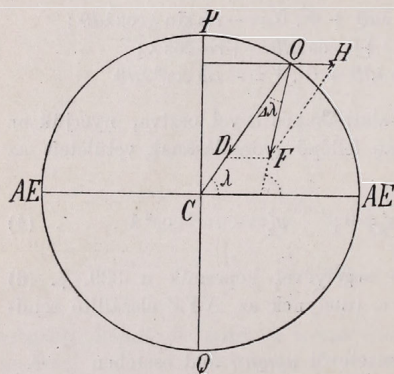
E forgás állandó ω szögsebességénél fogva az O pont középfutó (centrifugális) gyorsulást nyer, melynek értéke

az O -t e közpályában megtartó centripetális gyorsulással (46. §. 2. Jegyzete), azaz $(a \cos \lambda \cdot \omega)^2 : a \cos \lambda = a\omega^2 \cos \lambda$ -val egyenlő, iránya pedig az O -ból a forgás tengelyére emelt normálissal ellenkező.

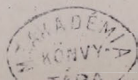
E szerint a forgó gömbön nyugvó O pont eredő gyorsulása összetevődik az OC menti $OD=G$ és az OH menti $a\omega^2 \cos \lambda$ komponensekből, melyek egymással $\pi - \lambda$ szöget képeznek.

Az $OF=g$ eredő földnehezségi (szabad esésbeli) gyorsulás értéke:

$$\begin{aligned} \overline{OF}^2 &= g^2 = G^2 + a^2 \omega^4 \cos^2 \lambda - 2Ga\omega^2 \cos \lambda \cdot \cos \lambda; \\ g &= G \left\{ 1 - \omega^2 \cos^2 \lambda \left(2 \frac{a}{G} - \frac{a^2 \omega^2}{G^2} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}; \quad \dots \quad (1) \end{aligned}$$



270. ábra.



e g -nek az AE AE æquatorral képezett szöge pedig $\pi - (\lambda + \Delta\lambda)$; az OFH háromszögből erre nézve:

$$\sin \Delta\lambda : \sin (\lambda + \Delta\lambda) = a\omega^2 \cos \lambda : G;$$

vagy:

$$a\omega^2 \cos \lambda \sin (\lambda + \Delta\lambda) = G \sin \Delta\lambda;$$

rövidítve $\cos \Delta\lambda$ -el, elhanyagolás nélkül könnyen nyerjük:

$$\operatorname{tg} \Delta\lambda = \frac{a\omega^2 \sin \lambda \cos \lambda}{G - a\omega^2 \cos^2 \lambda} \dots \dots \dots (2)$$

Az (1) és (2) kifejezések teljesen tüntetik elő a forgás befolyását a gömbfelületi nehézségi gyorsulás nagyságára és irányára; az O -ban fel függesztett rövid függőn iránya az OF .

Az æquator alatt a gyorsulás:

$$g_{\lambda=0} = G - a\omega^2 = G \left(1 - \frac{a\omega^2}{G}\right), \dots \dots \dots (3)$$

ott a középfutó összetevő a vonzóval ellentett irányú.

Jegyzet; Ha $a\omega^2$ csekély a G -hez képest, akkor az (1)-ben az $a\omega^2$ másodrendű tagjait elhanyagolhatjuk és a (2) nevezőjében a második tagot az elsőhöz képest; így nyerjük:

$$\left. \begin{aligned} g &= G - a\omega^2 \cos^2 \lambda; \\ \operatorname{tg} \Delta\lambda &= \frac{a\omega^2}{G} \sin \lambda \cos \lambda. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

Ha a földet *gömbnek* tekintenők, akkor (Math. repertórium 132. §. 174, és 175. ll.) $a = 6370430$ méter; g az æquator alatt volna körülbelül: $9,8089 \frac{\text{méter}}{(\text{mpcz})^2}$; továbbá a földnek tengelye körüli forgásának ideje a csillagnap = 86164.09 mpcz.

E szerint itt:

$$\omega = \frac{2\pi}{86164.09} = 0,0000729212; \quad a\omega^2 = 0,033875;$$

$$G = g_{\lambda=0} + a\omega^2 = 9,8089 + 0,033875 = 9,8428;$$

$$\frac{a\omega^2}{G} = 0,0034415 = \frac{1}{290,57} = \frac{1}{(17,045)^2}.$$

Ha tehát a földgömb forgásának sebessége $17,045$ -szer nagyobb volna mint tényleg, akkor az æquator alatt a vonzásbeli és a centrifugális gyorsulás összege zérus volna; akkor a testek ott nem esnének a föld felé, hanem lebegnének a légkörben.

A (3) és (4) közelítő formulák a gömbalakú földre nézve

$$\left. \begin{aligned} g_{\lambda} &= 9,8428 (1 - 0,0034415 \cos^2 \lambda); \\ \operatorname{tg} \Delta\lambda &= 0,0034415 \sin \lambda \cos \lambda. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4a)$$

A föld *ellipsoid*-alakjának befolyását a következő §§-ban tárgyaljuk.

351. §. *A földet forgó lelapúlt forgási ellipsoidnak tekintve, az eredő földnehézségi gyorsulás. CLAIRAUT tapasztalati közelítő formulája.*

A megelőző §§-ok vizsgálatait oly forgó testre kívánjuk alkalmazni, illetve kiterjeszteni, melynek vonzásához és alakjához a föld vonzása és alakja nagy közelítéssel hozzásímul.

1. A föld felületén s ennek közelében a nehézségi vonzásra és a föld alakjára vonatkozólag megejtett mérések szerint a föld felületén és annak közelében a földvonzás magaviselete igen nagy megközelítéssel megegyezik egy homogén (vagy még közös középpontú, hasonló és hasonló fekvésű ellipsoid-felületek közötti homogén rétegekből összetett) lelapúlt forgás-ellipsoid vonzásával, továbbá, a földalakja is nagy közelítéssel ily ellipsoidnak tekinthető [Math. repertórium 132. §. 174. lap].

2. Az általános gravitáció és a hydrodynamika szigorú elmélete bebizonyítja, hogy valamely a szabad világűrben lebegő, forgó folyadék-tömeg saját anyagának a (NEWTON-féle törvény szerinti) nehézkedési vonzása és a forgásából származó centrifugális erő befolyása alatt oly egyensúlyi alakokat vehet fel, melyek egyike a lelapúlt forgás-ellipsoid. Ámde valamely folyadék felszíne csak akkor marad stabilis egyensúlyban, ha a felszínre ható erők ezen határfelület minden elemére merőlegesek és a folyadék-tömeg belseje felé vannak fordítva.

Röviden: a forgó forgás-ellipsoid alakú folyadék gravitacionális vonzásának és forgásából származó középfutó erejének eredője mindenütt az ellipsoid-felület normálisába esik; ezt az eredőt rendesen a földnehézség erejének (a szabad esést létesítő erőnek) nevezik.

3. Ezeket tartva szemmel és megjegyezve, hogy a föld felületének legnagyobb része folyadékkal, vízzel, van borítva, a földet igen nagy közelítéssel ily forgó forgás-ellipsoidnak tekinthetjük, mely azon tulajdonsággal bír, hogy a földnek minden felületi pontjára kifejtett vonzó gyorsulásának és e pont forgásából keletkező középfutó gyorsulásának eredője mindenütt merőleges a forgás-ellipsoid felületi elemeire. Ezt az *eredőt*, melynek nyilvánulása a testeknek a föld felülete közelében történő szabad esés gyorsulásával egyenlő, közönségesen *földnehézségi gyorsulásnak* nevezik (v. ö. a köv. 4. pontot).

Jegyzet. A valóságban az a felület, mely a föld nehézségi gyorsulására mindenütt merőleges és mely a föld egyensúlyi vagy niveau-felülete (az ú. n. *geoid*) nem egyezik meg teljesen ily sphäroid-felülettel, hanem, különösen nagyobb hegységek közelében, kis szabálytalanságokat mutat és az idő folytával kissé változó; de ezen csekély mérvű eltérések alig képesek a föld niveau-felülete alakja általános jellegét változtatni.

4. *A föld geometriai és kinematikai jellemzői gyanánt a következő értékek vehetők* [Math. repertórium 132. §. 174 és 175. l.]:

Ezentúl az $x=cO$ távolságot ϱ -val fogjuk jelezni; ekkor (0)-ból:

$$\varrho = a \frac{\cos \lambda}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \lambda}} \quad (1)$$

és kicsiny ε^2 esetében, közelítőleg:

$$\varrho = a \cos \lambda \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin^2 \lambda\right) \quad (1a)$$

Jeleljék továbbá (271. ábra) $OD=G$ az ellipsoid gravitationális vonzásának gyorsulását, OH a középfutó erőnek $\varrho\omega^2$ gyorsulását, $OF=g$ az eredő, tényleg fellépő ú. n. földnehezégi gyorsulást, mely az ellipsoid-felületre normális irányú.

Az ábra szerint:

$$G^2 = g^2 + (\varrho\omega^2)^2 + 2g\varrho\omega^2 \cos \lambda \quad (2)$$

Az æquator alatt:

$$G_{\lambda=0} = g_{\lambda=0} + a\omega^2 \quad (2a)$$

Helyetteszve (2)-be az (1a)-t, közelítőleg nyerjük:

$$G^2 = g^2 + a^2\omega^4 \cos^2 \lambda \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin^2 \lambda\right)^2 + 2ga\omega^2 \cos^2 \lambda \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin^2 \lambda\right), \quad (3)$$

avagy rendezve s az ε^2 magasabb hatványait elhanyagolva:

$$G^2 = g^2 + a^2\omega^4 \cos^2 \lambda + 2ga\omega^2 \cos^2 \lambda + a^2\omega^4 \cdot \varepsilon^2 \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda + ga\omega^2 \varepsilon^2 \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda \quad (3a)$$

A föld forgásának ideje (a csillagnap) 86164.09 másodperc lévén, itt is $\omega = 2\pi : 86164.09 = 0.00007292118$; továbbá: $a\omega^2 = 0.0339117$ végre:

$$\varepsilon^2 = 0.0069205; \quad a\omega^2 : 9.831603 = 0.00344926.$$

Ezek szerint a megelőző §. 4. pontja értékeivel a (3a):

$$G^2 = (9.831603)^2 (1 - 0.00517464 \cos^2 \lambda)^2 + 0.0011500 \cos^2 \lambda + \\ + 2.9.831603.0.0339117 (1 - 0.00517464 \cos^2 \lambda) \cos^2 \lambda + \\ + 0.0069205.0.0339117 (0.0339117 + 9.831603^*) \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda.$$

A számítás adja:

$$G = 9.831603 [1 - 0.00343886 \cos^2 \lambda - 0.00000893 \cos^4 \lambda + \\ + 0.00002395 \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda]^{\frac{1}{2}}$$

Helyetteszve az utolsó tagba $\sin^2 \lambda = 1 - \cos^2 \lambda$ -át, nyerjük:

$$G = 9.831603 [1 - 0.00341491 \cos^2 \lambda - 0.00003288 \cos^4 \lambda]^{\frac{1}{2}}$$

Kifejtve a $\cos^4 \lambda$ -át tartalmazó tagokig bezárólag, marad:

$$G = 9.831603 [1 - 0.00170745 \cos^2 \lambda - 0.00001789 \cos^4 \lambda] \quad (4)$$

* Elhanyagolva e mellett a g változó részét, mely csak a hetedik tizedesjegyben szolgáltat 1-et.

Ez a föld-sphäroid tisztán gravitacionális (attractionális) vonzásának gyorsulása a föld felületén λ szélesség alatt.

Jegyzet: Az æquator alatt $\lambda=0$; ott a megelőző §. 4. pontja szerint a közönséges nehézségi szabad esésbeli gyorsulás

$$g_{\lambda=0}=9.831603.0.99482536;$$

ellenben a föld gravitacionális vonzásának gyorsulása (4) szerint:

$$G_{\lambda=0}=9.831603.0.99827466;$$

a kettő különbsége, melynek az ott uralkodó centrifugális gyorsulással egyenlőnek kell lennie:

$$G_{\lambda=0}-g_{\lambda=0}=9.831603.0.00344930.$$

Másrészt az æquator nagy tengelyéből és az ω szögsebességből egyenesen számított középfutó gyorsulás az æquator alatt:

$$a\omega^2=0.0339117=9.831603.0.00344927.$$

A megegyezés a fentirt $G_{\lambda=0}-g_{\lambda=0}$ különbséggel a számítás pontosságának határáig terjed.

A pólusokban $\lambda=\frac{1}{2}\pi$; ekkor mind a G , mind a g értéke 9.831603. E megegyezések a (4) formula helyességére vallanak.

2. Végre még kifejezendő a G és g közötti $\Delta\lambda$ szög (271. ábra). Ezen ábra HOF háromszöge szerint:

$$\varrho\omega^2: g = \sin \Delta\lambda : \sin (\lambda - \Delta\lambda), \quad \text{vagy} \quad \varrho\omega^2 : G = \sin \Delta\lambda : \sin \lambda.$$

Az elsőből:

$$\varrho\omega^2 \cdot \sin (\lambda - \Delta\lambda) = g \sin \Delta\lambda,$$

vagy elhanyagolás nélkül kifejtve és (1)-et tekintetbe véve

$$\operatorname{tg} \Delta\lambda = \frac{\varrho\omega^2 \sin \lambda}{g + \varrho\omega^2 \cos \lambda} = \frac{a\omega^2 \sin \lambda \cos \lambda}{g \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \lambda} + a\omega^2 \cos^2 \lambda} \quad \dots (5a)$$

A másodikból:

$$\sin \Delta\lambda = \frac{\varrho\omega^2 \sin \lambda}{G} = \frac{a\omega^2 \sin \lambda \cos \lambda}{G \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \lambda}} \quad \dots (5b)$$

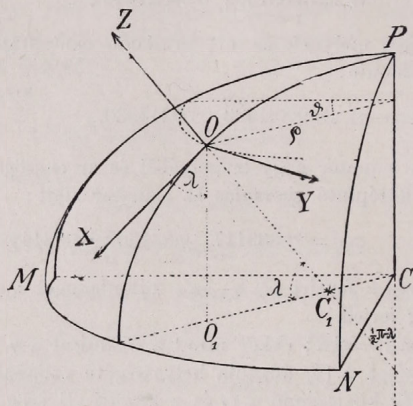
hol g a megelőző §. (5) és G ezen §. (4) értékei szerint λ függvényeiben helyetteszendők; de a g -nek és a G -nek a λ -tól függő tagjai csak csekély befolyást gyakorolhatnak a $\Delta\lambda$ értékére.

353. §. A forgó föld-ellipsoid felületéhez viszonyított relativ mozgás differentiálegyenletei.

A 348. és 349. §§-okban a gömbre nézve megejtett vizsgálatot a föld forgás-ellipsoidjára akarjuk alkalmazni illetve kiterjeszteni.

I. Legyen (272. ábra) O a föld felületének valamely pontja; ϑ a rajta átmenő ellipszis meridián és az első meridián (itt a rajz síkja) közötti szög, λ a szög, mely alatt az O -ban az ellipsoidra emelt normális (a függő irány) az æquator síkját metszi; e szerint, ϑ és λ az ellipsoidon az O pont *geographiai hosszúsága és szélessége*.

A földdel merev kapcsolatban lévő (elszállító) XYZ koordináta-rendszer kezdete a föld felületén legyen ismét az O ; az Y -tengely az



272. ábra.

O -n átmenő párhuzamos körhöz a növekvő ϑ -k mentén húzott OY érintő, az X -tengely az O -n átmenő ellipsis-meridiánhoz az æquator felé húzott OX érintő, végre a Z tengely az O -ban az ellipsoid felületére emelt OZ normális, mely [351. §. 2. pontja szerint] a föld eredő (nehézségi) gyorsulásával ellentett irányú.

Legyen végre itt is CM , CN , CP egymásra merőleges három szárlárd tengely, melyektől kezdve az elszállító rendszer helyzetét, szög-coordinátáit számítjuk.

A rajzból kitűnik, hogy az OY tengely, (mely az MCN síkhoz párhuzamos), a CM -mel $\frac{1}{2}\pi + \vartheta$; a CN -nel ϑ , a CP -vel $\frac{1}{2}\pi$ szöget képez; továbbá, hogy OX tengely vetülete az MCN síkra a CO_1 folytatásába esik, mely a CM -mel ϑ , a CN -nel $\frac{1}{2}\pi - \vartheta$ szöget, az OX a CP -vel $\pi - \lambda$ szöget képez; végre, hogy az OZ tengely vetülete az MCN síkra ugyancsak a CO_1 folytatásába esik, mely a CM -mel ϑ , a CN -nel $\frac{1}{2}\pi - \vartheta$, az OZ a CP -vel pedig $\frac{1}{2}\pi - \lambda$ szöget képez.

Ezek pedig minden tekintetben megfelelnek a 348. §. I. pontja szögeinek, habár itt a meridiánok ellipszisek és a ZO tengely folytatása nem megyen a C középponton keresztül.

E szerint az idézett 348. §. (1), (2), (3) sémái itt is érvényesek.

II. Arra nézve, hogy a relativ gyorsulás componenseit a 339. §. (3)—(6) formulái értelmében szerkeszthessük, jegyezzük meg, hogy a , jelzést itt mindenütt elhagyjuk és hogy az O pontnak a föld forgásából származó elszállító gyorsulási componenseit, u'_x -, u'_y -, u'_z -t itt mindjárt a gravitationális (az attractionális) vonzás gyorsulásával egyesítjük.

Ezek ugyanis az O középfutó (azaz körpályája normális) gyorsulásnak és a földellipsoid gravitationális vonzásának (azaz, az O abszolút gyorsulásának) eredője az OC_1 irányú, a Z tengelylyel ellentett földnehézségi (szabad esésbeli) gyorsulás, g , mely tehát az O -ban a föld felületéhez viszonyított relativ gyorsulás értéke.

Az O -nak a forgásból származó sebességi és gyorsulási összetevői [272. ábra és 349. §. (2) és (4), ha bennük az $r \cos \lambda = cO$ helyébe itt ρ -t teszünk]:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= 0; & u_y &= \rho\omega; & u_z &= 0; \\ u'_x &= -\rho\omega^2 \sin \lambda; & u'_y &= 0; & u'_z &= -\rho\omega^2 \cos \lambda. \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

A 349. §-ban az abszolút gyorsulásnak az elszállító rendszer tengelyei menti componensei voltak (φ_x) , (φ_y) , (φ_z) ; ezért itt az O kezdőpontban a föld felületén nyugvó, de szabad pontra nézve érvényes relativ gyorsulást a 339. §. (4), (5), (6) formuláiból akként nyerjük, hogy benne az x , y , z koordinátákat s az x' , y' , z' sebességi componenseket zérussal egyenlővé tesszük és a relativ gyorsulás fennmaradó részeit a tapasztalattal megegyezőleg úgy írjuk, hogy eredőjük a $-Z$ tengely mentén fekszenék és g értékű legyen; e szerint:

$$(\varphi_x) - u'_x = 0; \quad (\varphi_y) - u'_y = 0; \quad (\varphi_z) - u'_z = -g \dots (2)$$

Ha pedig a föld felülete közelében mozgó A helyzetű s a földfelülethez viszonyított (az elszállító rendszerre vonatkozó) x , y , z koordinátájú pont relativ gyorsulását akarjuk számítani, akkor az idézett 339. §. (4) egyenleteit, az u'_x , u'_y , u'_z kivételével és (5) egyenleteit kell képeznünk és ugyane §. (6) egyenleteiből le kell vonunk.

Az I. pont megjegyzései értelmében itt is, mint a gömb esetében [349. §. (1) és (3)]:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= -\omega \cos \lambda; & \omega_y &= 0; & \omega_z &= +\omega \sin \lambda; \\ \omega'_x &= 0; & \omega'_y &= 0; & \omega'_z &= 0. \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

miből:

$$x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z = -\omega (x \cos \lambda - z \sin \lambda) \dots (4)$$

Ezek szerint az idézett 339. §. (4), (5), (6) egyenletei:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{ex} - u'_x &= +\omega^2 (x \cos^2 \lambda - z \sin \lambda \cos \lambda) - \omega^2 x \\ \varphi_{ey} - u'_y &= -\omega^2 y \\ \varphi_{ez} - u'_z &= -\omega^2 (x \sin \lambda \cos \lambda - z \sin^2 \lambda) - \omega^2 z \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{cy} &= -2\omega y' \sin \lambda \\ \varphi_{cx} &= +2\omega (z' \cos \lambda + x' \sin \lambda) \\ \varphi_{cz} &= -2\omega y' \cos \lambda \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Levonva az (5)-öt és (6)-ot a (2)-ből, nyerjük végre a földhöz (a mozgó XYZ rendszerhez) viszonyított relativ mozgás differenciálegyenleteit:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{ry} = x'' &= +\omega^2 (x \sin^2 \lambda + z \sin \lambda \cos \lambda) + 2\omega y' \sin \lambda; \\ \varphi_{rx} = y'' &= +\omega^2 y - 2\omega (x' \sin \lambda + z' \cos \lambda); \\ \varphi_{rz} = z'' &= -g + \omega^2 (x \sin \lambda \cos \lambda + z \cos^2 \lambda) + 2\omega y' \cos \lambda; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

hol $g = 9.831603 - 0.050875 \cos^2 \lambda - 0.000003 z$.

Ezen kifejezések egyszerűbbek, mint a gömbre nézve találtak [349. §. (8)], minék oka az, hogy itt a g , azaz az O -ban a földön nyugvónak, de szabadnak tekintett pontra vonatkozó, a forgó földfelülethez viszonyított eredő (szabad esésbeli) földnehézségi gyorsulás (melynek egyik componense a centrifugális gyorsulás) van behozva, míg az ott fellépő G csak a gravitacionális (attractionális) vonzás gyorsulása.

E kifejezésekben az ω^2 -től függő tagokat elhanyagolva nyerjük Poisson (1838) formuláit.

354. §. *Valamely mozgó pont a föld-sphäroid tetszőleges érintő síkján tartozik maradni; milyen a mozgása, ha az csak a föld-nehézségi erő alatt, súrlódás nélkül történik?*

A megelőző §. elszállító rendszerét megtartva, jelen példánkban a mozgás az XY síkban megyen végbe és ezért $z = 0$, $z' = 0$ és $\varphi_{rz} = 0$; marad a megelőző §. (7) egyenleteiből:

$$\varphi_{rx} = x'' = +\omega^2 x \sin^2 \lambda + 2\omega y' \sin \lambda; \quad \varphi_{ry} = y'' = +\omega^2 y - 2\omega x' \sin \lambda. \quad (1)$$

A harmadik egyenletet itt egy előirt felületen történő mozgás egyenletévé kell alakítani; a φ_n feltételi gyorsulás itt az XY síkra merőleges (89a. §.); ezért

$$\varphi_{rz} = z'' = 0 = -g + \omega^2 x \sin \lambda \cos \lambda + 2\omega y' \cos \lambda + \varphi_n \quad \dots \dots (2)$$

I. Általános eset.

Ha az x és y coordináták (melyeket az O -tól számítunk) csak néhány ezer métert tesznek ki és λ nincsen az $\frac{1}{2}\pi$ közelében, akkor az $\omega^2 x$ és $\omega^2 y$ szorzatok [a 352. §. $\omega^2 = (0.0000729212)^2$ kicsiny értékénél fogva] elhanyagolhatók az $\omega x'$ és $\omega y'$ szorzatokhoz képest [v. ö. a 371. §. 33. feladattát] és ekkor (1)- és (3)-ből:

$$\left. \begin{aligned} x'' &= +2\omega y' \sin \lambda; & y'' &= -2\omega x' \sin \lambda; \\ z'' &= -g + 2\omega y' \cos \lambda + \varphi_n = 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Ezen egyenletek megfejtése nagyon könnyű.

Az első kettőnek egyszeri integrációjából:

$$x' = +2\omega y \sin \lambda + a; \quad y' = -2\omega x \sin \lambda + b \quad \dots \dots \dots (4)$$

Ezenkívül a (3) első egyenletét x' -tel, másodikát y' -al szorozva, a kettő összege:

$$x''x' + y''y' = 0, \text{ azaz } (x'^2 + y'^2)' = 0,$$

miből:

$$x'^2 + y'^2 = v_0^2 = \text{constans}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

mely egyenlet szerint a pont sebességének v_0 értéke *állandó*.

Ha most a pont O -ban van (272. ábra), akkor $x=0$, $y=0$, és (4)-ből $x'=a$, $y'=b$; azaz, a és b a pont sebességi componensei az O helyzetben; ha α_0 ezen sebesség és az X tengely közötti szög, akkor: $a=v_0 \cos \alpha_0$, $b=v_0 \sin \alpha_0$; és így a (4) írható:

$$x' = +2\omega y \sin \lambda + v_0 \cos \alpha_0; \quad y' = -2\omega x \sin \lambda + v_0 \sin \alpha_0. \quad (4a)$$

Képezve ezen egyenletekből az (5)-öt és rövidség kedvéért írva

$$p = + \frac{v_0 \sin \alpha_0}{2\omega \sin \lambda}; \quad q = - \frac{v_0 \cos \alpha_0}{2\omega \sin \lambda}; \quad r = \frac{v_0}{2\omega \sin \lambda}, \quad . \quad . \quad (6a)$$

nyerjük:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

mely egyenlet szerint a pont pályája kör; középpontjának koordinátái p és q , sugara r ; a kör az O ponton is halad keresztül.

Jelelve ω_0 -al az állandó r vezérsugár szögsebességét a kör közép-pontja körül, ennek értéke:

$$\omega_0 = \frac{v_0}{r} = 2\omega \sin \lambda, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

mely v_0 -tól független. Közép szélességekben $\lambda=45^\circ$; $\sin \lambda = \sqrt{0.5} = 0.7071$ és így a 352. §. $\omega = 0.00007292$ értékével:

$$\lambda = 45^\circ; \quad \omega_0 = 0.00010312; \quad r = 9696.5 v_0.$$

Az egész körpálya befutására szükséges idő:

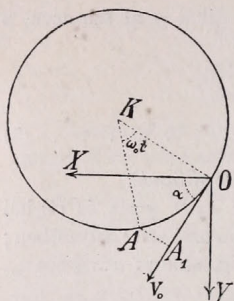
$$T = \frac{2r\pi}{v_0} = \frac{\pi}{\omega \sin \lambda} = 60887.0 \text{ másodperc},$$

mely szintén valamenynyi ily mozgásra nézve ugyanaz.

A (3) harmadik egyenlete itt:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -g + 2\omega y' \cos \lambda + \psi_n = 0, \\ \text{vagy (4) szerint:} \\ \psi_n &= g - 4\omega^2 y \sin \lambda \cos \lambda - 2v_0 \omega \sin \alpha_0 \cos \lambda \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Ha $\alpha_0 = \frac{1}{2}\pi$, akkor az O -ból induló pont a ρ sugarú párhuzamos kör mentén kezdi a mozgását és akkor eleinte $y'=v_0$, miáltal $\psi_n = g - 2\omega v_0 \cos \lambda$; ha $\alpha_0 = -\frac{1}{2}\pi$, akkor a pont kezdősebessége ellenkező és $\psi_n = g + 2\omega v_0 \cos \lambda$; végre, ha $\alpha_0 = 0$ vagy π , akkor a pont a meridián mentén kezdi a mozgását, és kezdetben $y'=0$, miáltal $\psi_n = g$.



273. ábra.

Jegyzet. A meridiánhoz α_0 szög alatt a vízszintes síkban elhajított, e síkban mozgó pont a megelőzők értelmében kört ír le; e szerint pályája eltér az α_0 szögű OA_1 egyenestől (273. ábra).

Ha $KA=r$ a kör sugara, A a pont helyzete az O -ponton való áthaladás után t időben, A_1 az α_0 irányú egyenesre bocsátott mérőleges talppontja s így OA_1 a KA vetülete a v_0 irányára, akkor:

$$(OKA) \sphericalangle = \omega_0 t; \quad OA_1 = r \sin \omega_0 t; \quad AA_1 = r(1 - \cos \omega_0 t).$$

Ha OA csak kicsiny szögű ív, akkor tekintettel (6a)-ra közelítőleg:

$$OA_1 = r\omega_0 t = v_0 t; \quad AA_1 = r(1 - \cos \omega_0 t) = \frac{1}{2} r\omega_0^2 t^2 = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{r} t^2 = \frac{\omega \sin \lambda}{v_0} \cdot \overline{OA_1}^2, \quad (9)$$

azaz az OA_1 egyenestől való eltérés (*deviáció*, 47. §.) mérsékelt távolságoknál az OA_1 vetület négyzetével arányos.

A *sebesség* irányváltozása egyenlő az $\omega_0 t$ szöggel.

II. Speciális esetek.

1. Az *aequator* alatt $\lambda=0$; ekkor (6a) szerint $r=\infty$, a pálya egyenes, mit még a (9) egyenlet is bizonyít; a pont az eredeti α_0 irányú vonalon halad tovább. A feltételi gyorsulás (8) szerint $\psi_0 = g - 2v_0\omega \sin \alpha_0$.

2. A *pólusokban* $\lambda = \frac{1}{2}\pi$; az (1) és (2) egyenletek:

$$x'' = +\omega^2 x + 2\omega y'; \quad y' = +\omega^2 y - 2\omega x'; \quad z'' = 0 = -g + \psi_n. \quad (10)$$

A harmadik egyenletből csak $\psi_n = g$ következik; az első két egyenlet ellenben a másodrendű simultán (együttesen fennálló) differenciál-egyenletek egyszerű rendszere, melyből azonnal:

$$x'x' + y'y' = \omega^2 (xx' + yy')$$

vagy:

$$(x^2 + y^2)' = \omega^2 (x^2 + y^2)';$$

ebből:

$$v^2 = \omega^2 (x^2 + y^2) + v_0^2, \quad \dots \dots \dots (11)$$

hol v_0 az A pont sebessége az O kezdetben.

Ugyanezen (10) alatti két egyenletből:

$$xy'' - yx' = -2\omega (xx' + yy'),$$

vagy:

$$(xy' - yx')' = -\omega (x^2 + y^2)'$$

avagy:

$$xy' - yx' = -\omega (x^2 + y^2), \quad \dots \dots \dots (12)$$

hol az integráció állandója *zérus*, mivel *O*-ra nézve az egyenletnek mindkét oldala zérus.

Polárkoordinátákban kifejezve (11)-et és (12)-öt [34. §. (2) és 36. §. (6) és (11)], de össze nem tévesztve az I. pont *r* jelentését a jelenlegivel:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = v^2 = v_0^2 + r^2\omega^2; \quad r^2\frac{d\vartheta}{dt} = -\omega r^2.$$

A másodikból:

$$\omega = -\frac{d\vartheta}{dt}; \quad \text{e szerint az elsőből } v_0 = \frac{dr}{dt} \quad \text{és így:}$$

$$\vartheta = -\omega t + \vartheta_0; \quad r = v_0 t + r_0 = -\frac{v_0}{\omega} \vartheta + \left(r_0 + \frac{\vartheta_0}{\omega} v_0\right)$$

Ha az időszámítás kezdetét úgy választjuk, hogy: $r_0 \omega = v_0 \vartheta_0$, akkor marad

$$r = -\frac{v_0}{\omega} \vartheta; \quad \dots \dots \dots (13)$$

azaz, az *A* pont az *O* körül közönséges ARCHIMEDES-féle spirális ír le. (V. ö. a 371. §. 33. feladatát).

Jegyzet. A (10) első két egyenletéből ismételt differenciálás által az *y*-t, illetve az *x*-et és differenciálquocienseit könnyen eltávolíthatjuk és nyerjük:

$$x'''' + 2\omega^2 x'' + \omega^4 x = 0; \quad y'''' + 2\omega^2 y'' + \omega^4 y = 0 \quad \dots \dots (14)$$

Ajánljuk a kezdőnek, hogy ezekre a differenciálegyenletekre nézve a 92. és 95. §§. 2. pontjaiban kimutatott eljárás szerint bizonyítsa be, miszerint a (14) teljes integráljainak alakja:

$$\left. \begin{aligned} x &= a_1 e^{\varrho_1 t} + a_2 e^{\varrho_2 t} + a_3 e^{\varrho_3 t} + a_4 e^{\varrho_4 t}; \\ y &= b_1 e^{\varrho_1 t} + b_2 e^{\varrho_2 t} + b_3 e^{\varrho_3 t} + b_4 e^{\varrho_4 t}; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

hol $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ a

$$\varrho^4 + 2\varrho^2\omega^2 + \omega^4 = 0 \quad \dots \dots \dots (16)$$

egyenlet gyökei. Egyeztessék ez az eredmény a (13)-al.

355. §. *Valamely szabad pontnak a föld felületéhez viszonyított mozgása. (Elhajított test mozgása, a föld forgásának tekintetbe vételel). A mozgásegyenletek integrációja.*

Vizsgáljuk meg a föld felületén elhajított testnek (lövetnek) mozgását a levegő ellenállásának és surlódásának tekintetbe vétele nélkül.

Vegyük fel itt is, hogy a mozgás a föld felületén csak néhány ezer méternyi távolságig történik [v. ö. e §. 2. Jegyzetét]; ekkor a

353. §. (7) formuláiban a g állandónak tekinthető és az $\omega^2 x$, $\omega^2 y$, $\omega^2 z$ tagok elhanyagolható kicsinyek (a 352. §. szerint $\omega = 0.00007292$ lévén) és így ezen egyenletek:

$$x'' + 2\omega y' \sin \lambda; \quad y'' = -2\omega z' \cos \lambda - 2\omega x' \sin \lambda; \quad z'' = -g + 2\omega y' \cos \lambda \quad (1)$$

Ezen egyenletek egyszeri integrációjából azonnal:

$$\left. \begin{aligned} x' &= +2\omega y \sin \lambda + a; \\ y' &= -2\omega (x \sin \lambda + z \cos \lambda) + b; \\ z' &= -gt + 2\omega y \cos \lambda + c. \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

hol a , b , c az integráció állandói; ezek itt a sebesség azon componeenseit jelentik, melyekkel a mozgó pont bír, ha ez az $x = y = z = 0$, azaz az O helyzetben van.

A továbbiakra nézve az (1) egyenleteit rendre x' -, y' -, z' -vel szorozva, közvetlenül nyerjük:

$$\begin{aligned} x'x' &= +2\omega x'y' \sin \lambda; \\ y'y' &= -2\omega y'z' \cos \lambda - 2\omega x'y' \sin \lambda; \\ z'z' &= +2\omega y'z' \cos \lambda - gz'; \end{aligned}$$

e szerint:

$$x'x' + y'y' + z'z' = -gz' \quad \text{vagy:} \quad (x'^2 + y'^2 + z'^2)' = -2gz';$$

vége:

$$x^2 + y^2 + z^2 = -2gz + \text{constans.}$$

Alkalmazva ezt az egyenletet és a (2) egyenleteket az O helyzetre, melyen a pont $t=0$ -kor haladjon keresztül, a *constans* adódik mint az ezen helyzetnek megfelelő sebesség; így nyerjük:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = v^2 = (a^2 + b^2 + c^2) - 2gz; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

mely a sebességnek jellemző egyenlete.

A (2) egyenletek további integrációja nem okoz nehézséget.

1. Helyettesítve (2)-ből az y' értékét az (1) első x'' egyenletébe, ebből:

$$x'' = -4\omega^2 (x \sin \lambda + z \cos \lambda) + 2\omega b \sin \lambda.$$

Ezen egyenlet jobb oldalán a $-4\omega^2 x$ és $-4\omega^2 z$ oly rendű tagok, melyeket a jelen §. elején tett megjegyzés értelmében itt szabad elhanyagolnunk, úgy, hogy marad:

$$x'' = +2\omega b \sin \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Ezt kétszer integrálva:

$$x' = +2\omega b t \sin \lambda + A_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$x = +\omega b t^2 \sin \lambda + A_1 t + A_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Az integráció A_1 és A_2 állandóiról később lesz szó.

2. Helyettesítve a (2)-ből az x' -, y' -, z' -et az (1) második és harmadik egyenletébe, nyerjük:

$$\begin{aligned}y'' &= +2\omega g t \cos \lambda - 4\omega^2 y - 2\omega (a \sin \lambda + c \cos \lambda); \\z'' &= -4\omega^2 x \sin \lambda \cos \lambda - 4\omega^2 z \cos^2 \lambda - g + 2\omega b \cos \lambda.\end{aligned}$$

Itt is, az ezen §. elején tett megjegyzés értelmében az $\omega^2 x$ -, $\omega^2 y$ - és $\omega^2 z$ -vel szorzott tagokat elhanyagolva, marad:

$$y'' = +2\omega g t \cos \lambda - 2\omega (a \sin \lambda + c \cos \lambda); \quad z'' = -g + 2\omega b \cos \lambda. \quad (7)$$

Ezekből pedig közvetlenül:

$$\begin{aligned}y' &= +\omega g t^2 \cos \lambda - 2\omega t (a \sin \lambda + c \cos \lambda) + B_1; \\z' &= -gt + 2\omega b t \cos \lambda + C_1;\end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad \dots \quad (8)$$

$$\begin{aligned}y &= +\frac{1}{2}\omega g t^3 \cos \lambda - \omega t^2 (a \sin \lambda + c \cos \lambda) + B_1 t + B_2; \\z &= -\frac{1}{2}g t^2 + \omega b t^2 \cos \lambda + C_1 t + C_2;\end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad \dots \quad (9)$$

hol B_1 , B_2 , C_1 , C_2 az integráció állandói.

A (6) és a (8) egyenletek előtűntetik a probléma általános megoldását [a közelítés azon fokáig bezárólag, melyet e §. elején megállapítottunk s mely közelítéssel az (1), (4), (7) mozgás-egyenletek érvényesek, v. ö. a 371. §. 36. feladatát].

Ha pedig a g -nek az x , y , z coordinátáktól való függését és irányváltozását is kívánjuk tekintetbe venni, ezt $g = g_0 + \alpha x + \beta y + \gamma z$ alakban kell a 353. §. (2) és (7) formuláiba vezetni, hol g_0 az O kezdetre vonatkozik és α , β , γ a tapasztalásból vagy a 351. §. (5) kifejezéséből meghatározható kicsiny együtthatók.

A g_0 a $-Z$ -be esik, a g iránya ettől eltér.

1. *Jegyzet*: A (6) és (8) egyenletekben összesen *kilencz* állandója az integrációnak, ugyanis a , b , c ; A_1 , B_1 , C_1 ; A_2 , B_2 , C_2 lép fel; ámde, mivel az (1) differentiál-egyenletek csak másodrendűek, ezen állandók közül csak *hat* lehet egymástól független.

Meghatározásuk az egyes konkrét esetekben külön-külön történik (v. ö. a következő §§-okat).

2. *Jegyzet*: A (6) és (9) formulák *érvényességi határaitra* nézve, megjegyzendő, hogy a jelen §-ban az $\omega^2 x$, $\omega^2 y$, $\omega^2 z$ rendű tagokat elhanyagoltuk, és hogy a g -t a mozgó pontra nézve állandónak s az O helyzetre vonatkozó értékével egyenlőnek vettük fel.

De, a 351. §. 4. pontja szerint a pont mozgása közben e pont λ szélessége és h magassága a föld fölött változik, miért g is változik.

Így ha pl. felvesszük, hogy a pont legnagyobb magassága $z = 5000$ méter, akkor $4\omega^2 z = 0.000000052.20000 = 0.000104$ méter:second; másrészt a g -változása [351. §. (5)] $0.000003.5000 = 0.015$, avagy g -nek körülbelül 0.0015-ed része, azaz a g változása tetemesen nagyobb, mint az ω^2 -vel szorzott, elhanyagolt tagok értéke.

E szerint a (6) és (9) formulákat csak oly mozgásokra lehet alkalmazni, melyeknél az x , y , z relativ coordináták nem nagyobbak, mint legfeljebb 4–5000 méter s ekkor g -nek e coordinátákra vonatkozó középértékét tanácsos venni.

356. §. *A függőlegesen fölfelé vagy lefelé hajított (eső) test mozgása a föld forgásának tekintetbe vételével.*

I. Hajítsunk valamely testet v_0 kezdősebességgel az XYZ elszá-
lító rendszer O kezdőpontjából függőlegesen felfelé (a Z tengely men-
tén 272. ábra), és legyen e mozgás kezdete egyszersmind az időszá-
mítás kezdete is.

E szerint itt:

$$t=0; \quad \begin{array}{lll} x'=0, & y'=0, & z'=+v_0; \\ x=0, & y=0, & z=0; \end{array}$$

azaz a megelőző §. (5), (6), (8) és (9) egyenletei szerint:

$$\begin{array}{lll} A_1=0, & B_1=0, & C_1=v_0; \\ A_2=0, & B_2=0, & C_2=0; \end{array}$$

vége a megelőző §. (2) egyenleteiből:

$$a=0, \quad b=0, \quad c=v_0.$$

Ezek értelmében az idézett (6) és (9) egyenletekből:

$$\left. \begin{array}{l} x=0; \\ y=+\frac{1}{3}\omega g t^3 \cos \lambda - v_0 \omega t^2 \cos \lambda; \\ z=-\frac{1}{2}g t^2 + v_0 t. \end{array} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

A mozgó pont az YZ (a meridiánra merőleges normális) síkban
marad (272. ábra); az emelkedés a z mentén ugyanazon törvény sze-
rint történik, mint ha a föld gyorsulása g volna, de nem forogna;
az emelkedés ideje a $z'=0$ feltételből következik és így:

$$\left. \begin{array}{l} \text{az emelkedés ideje: } T = \frac{v_0}{g} \\ \text{az emelkedés magassága: } H = \frac{v_0^2}{2g} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Ellenben a mozgó pont a párhuzamos kör mentén eltérítést
szenvet; miután az (1) alatti y kifejezésének *negatív* tagja rendesen
sokkal nagyobb, mint az első, az y *negatív* lesz, azaz XYZ rendsze-
rünk fekvése értelmében (272. ábra) az eltérítés *nyugat* felé van.

Helyetteszve y -ba t helyébe a T értékét, nyerjük:

$$y_{t=T} = -\frac{2}{3} \frac{\omega v_0^3}{g^2} \cos \lambda = -\frac{4}{3} \omega \frac{H^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}}{\sqrt{g}} \cos \lambda \dots \dots \dots (3)$$

mint a legmagasabb helynek a verticálistól *nyugat felé* való eltérését.

A pont *pályáját* az (1)-ből az idő kiküszöbölésével nyerjük; szá-
mítását, mely hatodrendű görbéhez vezet, az olvasóra bízuk.

II. Ejtsük el a testet $t=0$ időkor az O kezdet fölötti H magasságban.

Ekkor a kezdet feltételei:

$$\begin{array}{lll} t=0; & x'=0, & y'=0, & z'=0; \\ & x=0, & y=0, & z=H; \end{array}$$

továbbá, a megelőző §. (5), (6), (8), (9) és (2) egyenleteiből az integráció állandói:

$$\begin{array}{lll} A_1=0; & B_1=0; & C_1=0; \\ A_2=0; & B_2=0; & C_2=H; \\ a=0; & b=+2H\omega \cos \lambda; & c=0. \end{array}$$

Ezek tekintetbe vételével a (6) és (9) egyenletek:

$x=+2H\omega^2 t^2 \sin \lambda \cos \lambda$; $y=\frac{1}{3}\omega g t^3 \cos \lambda$; $z=H-\frac{1}{2}gt^2+2H\omega^2 t^2 \cos^2 \lambda$;
ámde itt az $\omega^2 H$ -val szorzott tagok, a 355. §. elején tett megállapodás értelmében elhanyagolandók, úgy hogy marad:

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \\ y=+\frac{1}{3}\omega g t^3 \cos \lambda \\ z=H-\frac{1}{2}gt^2 \end{array} \right\} (4)$$

A leeső pont itt is az YZ (a meridiánra merőleges normális) síkban marad; az esés a Z mentén ugyanazon törvény szerint történik, mintha a föld nem forogna és nehézségi gyorsulása g volna; az esés ideje és a leérkezés sebessége (a $z=0$ feltételből), elhanyagolva a $v=\sqrt{z'^2+y'^2}$ kifejezésben az y'^2 -ot, mely ω^2 -tel arányos:

$$T=\sqrt{\frac{2H}{g}}; \quad v_0=\sqrt{2Hg}; \quad v_0=gT \quad (5)$$

A leérkező pont az XZ síkban, a párhuzamos kör mentén, a vertikálistól eltér; miután a (4) első egyenlete szerint az y mindig pozitív, azért (az XYZ elszállító rendszer helyzeténél fogva, 353. §., 272. ábra) ez az eltérés *kelet*-felé történik (ellenkezőleg, mint az I. pontban tárgyalt függőlegesen felfelé hajított testnél).

Helyettesítve az x -be t helyébe a T -t, nyerjük:

$$x_{t=T}=+\frac{2\sqrt{2}}{3}\omega \frac{H^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{g}} \cos \lambda =+\frac{1}{3}\frac{\omega v_0^3}{g^2} \cos \lambda, \quad (6)$$

mint a leérkezés pillanatában érvényes legnagyobb keleti eltérést, melynek értéke csak félszer akkora, mint az I. pontban tárgyalt, függőlegesen fölfelé hajított test nyugati eltérése, (3).

A pont pályája a (4)-ből könnyen adódik; írva $x=\xi$; $H=z+\zeta$, nyerjük:

$$\xi^2=\frac{8}{9}\frac{\omega^2 \cos^2 \lambda}{g}\zeta^3 \quad (7)$$

mely a *jélköbös* vagy NEIL-féle parabola [Math. repertórium 65. §. A. 76. lap, 25. formula].

357. §. *Tetszőleges irányban elhajított test mozgása a föld forgásának tekintetbe vételével.*

A testet $t=0$ -kor az elszállító rendszer O kezdetéből v_0 sebességgel hajtjuk el (274. ábra); e sebesség irányán átfektetett vertikális sík az Y tengelyvel (e párhuzamos kör érintőjével) avagy a nyugatról keletfelé vont iránynyal) $\frac{1}{2}\pi - \vartheta$, a meridiánnal ϑ , a vízszintes XY síkkal pedig α szöget képezzen és így a v_0 vetületei az elszállító rendszer tengelyeire rendre: $v_0 \cos \alpha \cos \vartheta$; $v_0 \cos \alpha \sin \vartheta$; $v_0 \sin \alpha$.

E szerint itt a kezdet feltételei:

$$\begin{aligned} t=0; \quad x' &= v_0 \cos \alpha \cos \vartheta; & y' &= v_0 \cos \alpha \sin \vartheta; & z' &= v_0 \sin \alpha; \\ x &= 0; & y &= 0; & z &= 0; \end{aligned}$$

és így a 355. §. (5), (6), (8), (9) és (2) egyenleteinek tekintetbe vételével:

$$\begin{aligned} A_1 &= v_0 \cos \alpha \cos \vartheta; & B_1 &= v_0 \cos \alpha \sin \vartheta; & C_1 &= v_0 \sin \alpha; \\ A_2 &= 0; & B_2 &= 0; & C_2 &= 0; \\ a &= A_1; & b &= B_1; & c &= C_1; \end{aligned}$$

miáltal az idézett (6) és (9) egyenletek:

$$\left. \begin{aligned} x &= +v_0 \omega t^2 \cos \alpha \sin \vartheta \sin \lambda + v_0 t \cos \alpha \cos \vartheta; \\ y &= +\frac{1}{3} \omega g t^3 \cos \lambda - v_0 \omega t^2 (\cos \alpha \cos \vartheta \sin \lambda + \sin \alpha \cos \lambda) + v_0 t \cos \alpha \sin \vartheta; \\ z &= -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \omega t^2 \cos \alpha \sin \vartheta \cos \lambda + v_0 t \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Hogy e mozgást könnyebben lehessen összehasonlítani a nyugvónak tekintett földre nézve a 108. §-ban tárgyalt ballisztikus probléma eredményeivel, válaszszunk oly X, Y, Z , rendszert (274. ábra), melynek X, Y , síkja vízszintes, X , tengelye a v_0 sebességnek a horizontális síkra való vetülete mentén legyen, míg a Z , tengely a Z -vel essék egybe.

Ekkor a mozgó pont x, y, z , koordinátái [Math. repertórium 50. §. (1).]

$$x = +x \cos \vartheta + y \sin \vartheta; \quad y = -x \sin \vartheta + y \cos \vartheta; \quad z = z;$$

és így az 1-ből:

$$\left. \begin{aligned} x &= +\frac{1}{3} \omega g t^3 \cos \lambda \sin \vartheta - v_0 \omega t^2 \sin \alpha \cos \lambda \sin \vartheta + v_0 t \cos \alpha; \\ y &= +\frac{1}{3} \omega g t^3 \cos \lambda \cos \vartheta - v_0 \omega t^2 (\cos \alpha \sin \lambda + \sin \alpha \cos \lambda \cos \vartheta); \\ z &= -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \omega t^2 \cos \alpha \sin \vartheta \cos \lambda + v_0 t \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Ha $\omega=0$, azaz, ha a föld nem forogna és nehézségi gyorsulása g volna, akkor e formulák átmennek:

$$x = v_0 t \cos \alpha; \quad y = 0; \quad z = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \quad \dots \quad (2a)$$

kifejezésekbe, melyek a 108. §. (8) formuláival teljesen megegyeznek

A (2) és (2a) értékek különbségei a föld forgásának befolyását világosan tüntetik elő.

1. A hajítás T tartamát, az emelkedési idő kétszeresét a $z_0=0$ feltétel segélyével (a $t=0$ kezdő időpillanatot kizárva), a (2) utolsó egyenletéből közvetlenül nyerjük:

$$T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g - 2v_0 \omega \cos \alpha \sin \vartheta \cos \lambda}, \quad \dots \quad (3)$$

vagy, kiemelve g -t a nevezőből s ezt kifejtve, közelítőleg:

$$T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \left\{ 1 + \frac{2v_0 \omega}{g} \cos \alpha \sin \vartheta \cos \lambda \right\} \quad \dots \quad (3a)$$

Az első tényező a nyugvó földre vonatkozó hajítási idő [108. §. (9)]; a második tagban $\cos \alpha$ és az északi félgömbön $\cos \lambda$ mindig pozitív értékek, míg $\sin \vartheta$ akkor pozitív, ha a hajítás irányának a vízszintes síkra való vetülete a meridián-vonallal 0 és $+\pi$ között fekvő szöget képez (274. ábra), ellenben negatív a $\sin \vartheta$, ha e szög 0 és $-\pi$ között fekszik; röviden:

Ha a v_0 kezdő sebesség a meridiántól keletre fekszik, a hajítási idő nagyobb, ha attól nyugatra fekszik, ezen idő kisebb mint a nyugvó földre vonatkozó idő; ez az utóbbi pedig megegyezik a meridián síkjában történő hajítás idejével.

2. A hajítási távolságot, L -et nyerjük, ha a (2) x , egyenletében t -helyébe a (3a)-ból a T -t teszszük. Elhanyagolva az ω^2 -tal szorzott tagokat, nyerjük:

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \left[1 + \frac{2v_0 \omega}{g} \cos \alpha \sin \vartheta \cos \lambda \right] - \frac{4v_0^3 \omega}{g^2} \left(1 - \frac{2}{3} \right) \sin^3 \alpha \cos \lambda \sin \vartheta,$$

vagy, némi rövidítések után:

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \left\{ 1 + \frac{2v_0 \omega}{g} \sin \vartheta \cos \lambda \left[\cos \alpha - \frac{1}{3} \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha \right] \right\} \quad \dots \quad (4)$$

Az első tényező a nyugvó földre vonatkozó hajítási távolság [108. §. (10)]; a második tényező második részének előjele ϑ -tól és α -tól függ; az α -tól függő tényező

$$\cos \alpha - \frac{1}{3} \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha = \frac{3 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3 - 4 \sin^2 \alpha}{\cos \alpha};$$

ez addig pozitív, míg $3 - 4 \sin^2 \alpha \geq 0$; vagy $\sin^2 \alpha \leq \frac{3}{4}$, vagy $\sin \alpha \leq \sqrt{0.75}$, azaz, míg $\alpha \leq 60^\circ$; ezentúl negatív; ellenben $\cos \vartheta$ pozitív, ha v_0 a meridiántól keletre, negatív, ha attól nyugatra fekszik.

Közönséges lövéseknél $\alpha < 60^\circ$ és így (4) szerint L nagyobb vagy kisebb a nyugvó földre vonatkozó távolságnál a szerint, a mint v_0 a meridiántól keletre vagy nyugatra fekszik.

3. A (2) egyenletek szerint a pont nem marad az X, Z , (a hajítás) síkjában; az y , az e síktól való *deviáció* (*eltérés*) nagyságát adja meg.

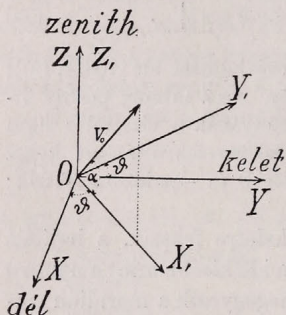
A legnagyobb eltérés a leérkezés helyén mutatkozik; helyetteszve a t helyébe a (3a)-ból T -t a (2) rendszer y , egyenletébe és elhanyagolva itt is az ω^2 -tal szorzott tagokat, nyerjük:

$$y_{t=T} = -\frac{8}{3} \frac{v_0^3 \omega}{g^3} \sin^3 \alpha \cos \lambda \cos \vartheta - \frac{4v_0^3 \omega}{g^2} [\sin^2 \alpha \cos \alpha \sin \lambda + \sin^3 \alpha \cos \lambda \cos \vartheta];$$

vagy:

$$y_{t=T} = -\frac{4v_0^3 \omega}{g^2} \sin^3 \alpha \cos \lambda (\cotg \alpha \operatorname{tg} \lambda + \frac{1}{3} \cos \vartheta) \quad (5)$$

Ezen eltérés előjele a zárójeles tényező előjelétől függ. Miatán (274. ábra) $\vartheta = -\frac{1}{2}\pi$ -től $\vartheta = +\frac{1}{2}\pi$ -ig az Y , tengely a meridiántól keletre



274. ábra.

esik, ez az (5) eltérés nyugatfelé (és pedig a hajítás Z, OX , síkjára merőlegesen) irányított lesz mindaddig, míg $\cotg \alpha \operatorname{tg} \lambda + \frac{1}{3} \cos \vartheta$ pozitív; ekkor az O -ban lévő észlelő a lövetnek a ZX' czélsíktól (a hajítás síkjától) jobbfelé való eltávolodását fogja észlelhetni; az eltérés állandó α és λ mellett legnagyobb, ha $\vartheta=0$, azaz, ha a lövés a meridiánsíkban északról dél felé történik.

Az eltérésnek ezen előjele megmarad mindaddig, míg $\cotg \alpha \operatorname{tg} \lambda > \frac{1}{3}$; mert akkor, bármilyen is a ϑ , az (5) zárójeles tényezője mindig pozitív.

De ha α fogyásával $\cotg \alpha \operatorname{tg} \lambda < \frac{1}{3}$, akkor léteznek $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ és $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$ között oly ϑ értékek, melyekre nézve a zárójeles tényezője zérus, illetve negatív és ekkor az eltérés a Z, X , czélsíktól balra esik.

Kivételes esetet képez az egyenlítő, melyre nézve $\lambda=0$ és így

$$y_{t=T} = -\frac{4v_0^3 \omega}{3g^2} \sin^3 \alpha \cos \vartheta \quad (5a)$$

Ha az egyenlítőben a lövés a meridián mentén dél felé történik ($\vartheta=0$), akkor az O -ból megfigyelt eltérés a cél síkjától jobbfelé (nyugatfelé) fekszik; ha északfelé ($\vartheta=\pi$), akkor az eltérés a cél síkjától balfelé, azaz ismét nyugatfelé fekszik. Végre a meridiánra merőleges síkban tett lövésnél a lövet nem lép ki a cél síkjából.

E 3. pont eredményei a tapasztalással nagyjában megegyeznek.

4. A hajítás magasságát a (2) egyenletek z , kifejezése adja, ha beolvasa a $\frac{dz}{dt}=0$ feltétel alapján az emelkedés idejét meghatározzuk; de az 1. pontból azonnal látjuk, hogy ez $\frac{1}{2}T$ -vel egyenlő; ha e szerint z -be t helyébe $(\frac{1}{2}T)$ -ből $\frac{1}{2}T$ -t teszünk és az ω^2 -val szorzott tagokat elhanyagoljuk, némi rövidítéssel a magasság számára nyerjük:

$$H = +\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \left[1 + \frac{2v_0 \omega}{g} \cos \alpha \sin \vartheta \cos \lambda \right] = +\frac{1}{2} T \frac{1}{2} v_0 \sin \alpha \quad (6)$$

Az első tényező itt is a nyugvó földre vonatkozó hajtási magasság: a második tényező második részének előjele a $\sin \vartheta \cos \lambda$ -éval egyenlő.

E szerint mindkét félgömbön az elért magasság nagyobb, ha a czél a meridiántól keletre, kisebb, ha attól nyugatra fekszik.

11. Merev rendszerek kényszermozgása. Példák.

358. §. *A mozgás szabadságát korlátozó feltételekről általánosságban. Kényszer és akadály.*

1. A pont vagy a merev pontrendszer mozgását *teljesen szabad*-nak nevezzük, ha mozgásuk semmiféle feltételnek nincs alávetve és minden irányban teljesen szabadon történhetik.

A pont mozgásánál e pont minden irányban egyenlő könnyűséggel mozoghat (89. §.), míg a merev rendszernél csak a rendszer merev voltának fentartása követeltetik, mely szerint e rendszer konfigurációja mozgás közben változatlan marad.

2. Valamely *feltétel* a pont vagy a pontrendszer mozghatóságát korlátozza. A korlátozás általánosságban véve kétféleképpen nyilvánulhat.

a. Az első esetben a feltétel kényszeríti a pontot, hogy mozgás közben bizonyos felületen vagy görbén maradjon (89a. §.), illetve a merev rendszer egyes pontjait, hogy csak bizonyos felületeken vagy görbéken mozoghassanak; a feltételek ezen csoportját *kényszerítő*eknek nevezhetni.

b. A második esetben a feltétel megakadályozza, hogy a mozgás a tér bizonyos részében történhessék, míg a tér másik részében ez a mozgás szabadságát semmi tekintetben sem korlátozza; a feltételek ezen csoportját *akadályozó*knak, sokszor még *határ-feltételek*nek is nevezik.

Példák. Valamely mozgó pontra nézve az $r=a$ feltétel kifejezi, hogy a pont az a sugarú gömbfelületen tartozik maradni; ez kényszerítő feltétel. Ellenben az $r \leq a$ feltétel szerint a pont az a sugarú gömb belsejében mozog és belőle el nem távozhatik; ez akadályozó feltétel.

Ha a kényszerítő feltétel $r_1 + r_2 = 2a$ vagy $r_1 - r_2 = 2a$ volna és az akadályozó $r_1 + r_2 \leq 2a$ vagy $r_1 - r_2 \leq 2a$ [hol r_1 és r_2 a mozgó pont távolságai két szilárd térbeli ponttól], akkor egy forgási ellipsoid vagy hyperboloid viszi az imént nevezett gömbfelület szerepét.

Továbbá, ha valamely gömb egy másik, nagyobb sugarú gömbfelület belsejében *gördül*, akkor a gördülő gömb középpontja mindig egy gömbfelületen tartozik maradni és így ez kényszerítő feltétel. De ha a kisebb gömb a nagyobb gömbfelületen belül szabadon mozoghat és egyik pontja sem léphet át a külső térbe, a feltétel akadályozó s i. t.

Közmegegyezés szerint a kényszerítő feltételt röviden *feltétel*nek nevezik, míg a másikat mindig *akadály-* vagy *határ-feltétel*nek fogjuk nevezni.

Maga a mozgás, mely kényszerítő feltételek fennállása mellett megyen végbe, általánosságban véve *kényszermozgás*nak nevezetik.

359. §. *A pont, az egyenes vonal és a merer pontrendszerek mozgása szabadságának különböző fokai és az ezeket szabályozó kényszerítő feltételek.*

I. *A pont mozgásának szabadsági fokai.*

1. Már a 89. §-ban felemlítettük, hogy a *teljesen szabad pont* mozgása szabadságának három foka van; *feltétel nincs.*

2. Az előirt $F(x, y, z) = 0$ felületen mozgó pont mozgása szabadságának két foka van; *a feltétel csak egy.*

3. Az előirt $F(x, y, z) = 0$ és $G(x, y, z) = 0$ egyenletű felületek metszőgörbéjén mozgó pont mozgása szabadságának egy foka van; *a feltételek száma kettő.*

4. Ha a 3. pont feltételeihez meg egy, pl. $H(x, y, z) = 0$ alakú feltétel lép, akkor mind a három koordináta meghatározott értékkel bír és a pont nyugalomban van.

A *nyugró* (meghatározott helyzetű) pontnak *nincs mozgás-szabadsági foka, a feltételek száma három.*

II. *Merev egyenes vonal mozgásának szabadsági fokai.*

A merev egyenes vonal helyzetét két pontjának helyzete adja meg, ezek mindegyikének helyzetét három-három koordináta határozza meg.

A két pont mozgása csak annak a feltételnek van alávetve, hogy távolságuk mozgás közben változatlan, a mit az

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = \text{constans}$$

egyenlet fejez ki.

E szerint *öt* koordináta-adat teljesen meghatározza az egyenes helyzetét a térben.

Ezekből kiindulva, egészen analog megfontolások, mint az I. pontéi (illetve a 89. §-éi) a következő eredményekhez vezetnek:

1. *A teljesen szabadon mozgó egyenes vonal mozgásának öt szabadsági foka van; feltétel nincs.*

2. *Ha az egyenes egyik pontja előirt felületen mozog, a mozgásnak négy szabadsági foka van; a feltétel csak egy.*

3. *Ha az egyenes egyik pontja előirt görb.,
vagy két pontja ugyanazon felületen,
vagy két pontja különböző felületen,* | mozog, a mozgásnak
három szabadsági foka
van, a feltételek száma
kettő.

- | | | |
|--|---|--|
| <p>4. Ha az egyenes egyik pontja szilárd,
vagy egyik pontja előirt felületen,
a másik pontja pedig ugyan-
ezen vagy más felületen fekvő
görbén,
vagy három pontja előirt ugyan-
azon vagy több különböző felüle-
teken-,</p> | } | <p>mozog, akkor az egyenes
mozgásának két szabad-
sági foka van, a feltételek
száma három.</p> |
| <p>5. Ha az egyenes egyik pontja szilárd,
másik pontja gömbfelületi görbén
vagy két pontja két térbeli gör-
bén- (beleértve a vonalnak saját
iránya menti síkló mozgását is)-
vagy két pontja előirt felületeken
és egy pontja előirt görbén-,
vagy négy pontja előirt felüle-
teken-,</p> | } | <p>mozog, a mozgásnak egy
szabadsági foka van, a
feltételek száma négy.</p> |

6. Öt feltétel mellett az egyenes mozgása teljesen megszűnik.

A feltételek száma a mozgás szabadságát szabván meg, kimondhatjuk, hogy négy feltétel mellett az egyenes vonal valamenynyi pontjai csak megszabott pályákat írhatnak le, három feltétel mellett valamenynyi pont megszabott felületeken kénytelen mozogni.

Hasonló megjegyzések állanak a két feltételre nézve (3. pont) és egy feltételre nézve (2. pont).

A felsorolt esetek a feltételek kombinációjából származó tetemes változatosságát a mozgás korlátozásának tüntetik elő.

III. Merev pontrendszer mozgásának szabadsági fokai.

A merev rendszer fekvését három pontjának helyzete a térben adja meg (131. §. 2. pontja); a rendszer mozgásának állapota is teljesen ismeretessé válik, mihelyt három pontja mozgásának az állapota adva van.

Ha a merev rendszer teljesen szabad, akkor a három (tetszőlegesen választható) pont is teljesen szabadon mozoghat, de mozgás közben azok kölcsönös relatív helyzete ugyanaz, azaz, egymástól való, számszerint három távolságaik ugyanazok maradnak.

E szerint a három szabad pont a szabadságnak összesen kilencz fokával bír ugyan, de e mellett fennáll az a három feltétel, hogy a három pont kölcsönös távolsai változatlanok maradnak.

Ennek értelmében a teljesen szabad merev rendszer a mozgás szabadságának hat fokával bír.

I. *Jegyzet*: Ugyanezt az eredményt nyerjük, ha tekintetbe vettük volna a merev rendszer általános elmozdulásának szétbontását, a mint ezt a 270. §-ban tettük. Találtuk ugyanis, hogy a merev rendszer tetszőleges elmozdulása mindenkor összetehető: egymásra merőleges három translációból és egymásra merőleges három tengely körüli forgásból. A tetszőleges elmozdulás e szerint *hat* elmozdulási elemből áll és ezek mindegyike a mozgás szabadságának egy-egy fokát képviseli.

A. Ha a rendszer három (nem egyenesben fekvő) pontja csak saját síkjában mozoghat, akkor mind a három pontra nézve csak e síkbeli koordináták változók, míg a három pont egymástól való kölcsönös távolsága változatlan. E szerint a rendszer *síkbeli mozgásánál* a mozgás szabadsága fokainak száma *hárommal* kisebb, mint a fennmaradó szabadsági fokok száma három.

B. Ha a rendszer egyik pontja szilárd: csak ezen pont körüli forgások (*gömbi mozgások*) lehetségesek; s az egyik pont rögzítése által a szabadság *hat* fokainak száma *hárommal* kisebb, mint a rendszer mindegyik pontja csak közös középponti *gömbfelületen* mozoghat és mozgása szabadságának *három* foka van.

C. Ha a rendszer két pontja szilárd: csak ezen két ponton átmenő tengely körüli forgás lehetséges; a második pontnak (mely eddig gömbfelületen mozoghatott) szilárddá tévése által a szabadság fokainak száma még *kettővel* kisebb, mint a rendszer mindegyik pontja csak közös tengelyű *körben* mozoghat és mozgása szabadságának csak *egy* foka van.

Ezeket a megfontolásokat könnyen alkalmazhatjuk a merev rendszer kényszerének más eseteire is; az olvasóra bizzuk, hogy a következő egyszerű tételek helyességét (mely egyébként majdnem önként adódik) bizonyítsa be:

1. A teljesen szabadon mozgó merev rendszer mozgásának *hat* szabadsági foka van; feltétel *nincs*.

2. Ha a rendszer egyik pontja előírt felületen mozog, mozgásának *öt* szabadsági foka van; a feltétel csak *egy*.

3. Ha a rendszer két pontja előírt ugyanazon vagy két különböző felületen-, vagy egy pontja előírt görbén-	} mozog, a mozgás szabadságának <i>négy</i> foka van, a feltételek száma <i>kettő</i> .
---	---

4. Ha a rendszer három pontja előírt ugyanazon vagy két, vagy három felületen mozog-, vagy egyik pontja előírt felületen, másik pontja ugyanezen, vagy más felületen előírt pályán mozog-, vagy egy pontja szilárd,	} a mozgás szabadságának <i>három</i> foka van, a feltételek száma <i>három</i> .
---	---

5. Ha a rendszer négy pontja előírt ugyanazon, vagy két, vagy három, vagy négy felületen mozog,

vagy két pontja előírt felületen és harmadik pontja előírt ugyanezen, vagy más felületek egyikén fekvő görbén mozog, vagy két pontja előírt két görbén mozog, vagy egyik pontja szilárd, a másik pontja bizonyos gömbfelületi görbén mozog,

a mozgás szabadságának *két* foka van, a feltételek száma *négy*.

6. Ha a rendszer öt pontja előírt ugyanazon, vagy két, vagy három, vagy négy, vagy öt felületen mozog,

vagy három pontja előírt felületen (vagy felületeken) és negyedik pontja e felületen (vagy e felületek egyikén), vagy tettszöleges felületen fekvő görbén mozog, vagy egyik pontja előírt felületen, második és harmadik pontja ugyanezen (vagy más) felületen (vagy felületeken) fekvő görbén mozog,

vagy egyik pontja szilárd, második és harmadik pontja meghatározott két gömbfelületi görbén mozog-

a mozgás szabadságának *egy* foka van, a feltételek száma *öt*.

7. *Hat* feltétel a rendszert nyugalomra készíti.

II. *Jegyzet:* Könnyű analitikailag kimutatni, hogy *öt* feltétel mellett a rendszer minden pontja előírt görbéken, *négy* feltétel mellett előírt felületeken tartoznak mozogni.

a. Ha a rendszernek mozgása *öt* feltételnek van alávetve, csak *egy* feltétel (adat) marad hátra, hogy a mozgás teljesen meghatározva legyen. Ezt a feltételt úgy fejezhetjük ki, hogy azt mondjuk: a rendszernek valamely meghatározott x_1, y_1, z_1 pontjának független változója, mely gyanánt itt pl. az x_1 -et választhatni, meghatározza a rendszer többi A pontjainak valamenynyi koordinátáit. Ennek analitikai kifejezése:

$$x=f(x_1), \quad y=g(x_1), \quad z=h(x_1); \quad (1)$$

mely három egyenlet egy meghatározott oly térbeli görbét képvisel, melyen az x, y, z összszerendező A pont mozogni tartozik.

Az x_1 -nek az időtől való függése különböző lehet ugyan, de azért

az előírt görbék jellege ugyanaz, csak paraméterei különbözők a rendszer egyes pontjaira nézve.

b. Négy feltétel esetében csak két feltétel (adat) marad hátra arra nézve, hogy a rendszer mozgása teljesen meg legyen határozva. Ezt a két feltételt úgy fejezhetjük ki analitikailag, hogy a rendszer x_1, y_1, z_1 összszerendezőjű A_1 pontjának x_1 és y_1 koordinátái függvényei gyanánt tekintjük a többi A pontok koordinátáit, azaz,

$$x=f(x_1, y_1); \quad y=g(x_1, y_1); \quad z=h(x_1, y_1) \dots (2)$$

Ezek pedig oly felületet előtűntető egyenletek, mely felületen az x, y, z összszerendezőjű A pont mozogni tartozik.

c. A többi eseteknek analitikai előtűntetése szintén ily módon és könnyen történhetik; a kivitelt az olvasóra bízuk.

360. §. *A merev rendszer négy pontja előírt négy felületen mozog; létezik meghatározott két egyenes, EE és EE , mely a rendszer minden lehetséges elemi elmozdulása közben conjugált marad.*

1. *Két conjugált egyenes létezésének bebizonyítása.*

Legyen A_1, A_2, A_3, A_4 a rendszer azon négy pontja, mely az előírt F_1, F_2, F_3, F_4 négy felületen tartozik maradni. A rendszernek tetszőleges, t időpillanatra vonatkozó helyzetét véve figyelembe, húzzunk e négy A pontból az egyes felületekre az N_1, N_2, N_3, N_4 normálisakat. E normálisak iránya és helyzete általánosságban tetszőleges lévén, ezekre nézve a 308. §. III. tétele érvényes, ugyanis, hogy minden esetre két egyenes EE és EE , létezik, mely ezt a négy egyenest metszi.

Mivel a mozgás bármily pillanatában is, a négy normális merőleges az A_1, A_2, A_3, A_4 talppontjaik pályaívelemeire, azért minden egyes normális a benne fekvő valamenynyi pont sebességére merőlegesnek tartozik lenni (301. §. 1. tétele); már pedig e négy normális mind egyike metszi az EE és EE két egyenest és így a 305. §. 2. tétele szerint e két egyenesnek egy conjugált párt kell alkotnia. Evvel állításunk be van bizonyítva.

2. *A négy feltételnek alávetett rendszer minden lehetséges elemi elmozdulásánál csak meghatározott két egyenes képezhet conjugált párt.*

A bizonyítást úgy végezzük, hogy a kimondott eredményt egyelőre csak felvesszük és azután kimutatjuk, hogy az másként nem is lehet.

Felvéve, hogy a nevezett elemi mozgás közben csak EE és EE marad conjugált párnak, az 1. pont szerint e két egyenest valamenynyi azon normális kénytelen metszeni, mely az A_1, A_2, A_3, A_4 pontoknak előírt felületekre van emelve, azaz az N_1, N_2, N_3, N_4 normálisak.

Bármily is legyen e szerint az adott feltételek mellett a-momentán elmozdulás: a négy normális ugyanaz marad, és mivel e négy egyenest általánosságban csak két egyenes, *EE* és *EE* metszi, azért e két conjugált egyenes is ugyanaz marad, bármily legyen is, az adott feltételek mellett a momentán elmozdulás.

3. *Bármily pont előírt felületére emelt normális metszi az EE-t és az EE-t.*

Mintán négy feltétel mellett minden rendszerbeli *A* pont előírt (meghatározott) *F* felületen tartozik maradni [359. §. II. Jegyzete, b. 624. l.], azért bármily ily felületre emelt normálisra nézve áll az 1. alatti eredmény, ugyanis, hogy az valamenynyi pontjának sebességére merőleges.

Ha most a szükséges feltételek kifejezéseiben az A_4 , F_4 , N_4 helyébe a tetszőleges *A* pontra vonatkozó *F*-et és *N*-et helyettesítjük, akkor ez által a mozgás korlátozásának lényege nem változott s így a lehetséges mozgások ugyanazok mint a 2. pont utolsó kikezdésében. Ezért ezekre nézve az *EE* és *EE* conjugált pár ugyanaz és az *N* kénytelen e két egyenest metszeni.

Ez érvényes a rendszer minden pontjára nézve.

4. *Ha a négy normális egy és ugyanazon hyperboloidon fekszik, végtelen sok conjugált pár létezik.*

Az N_1 , N_2 , N_3 , N_4 négy normális közül általánosságban csak három-három fekehetik egy-egy egyhájú hyperboloidon [308. §. II. tétele] és így e négy normális hármas csoportjait (szám szerint négyet) *négy* ily hyperboloidon fekvőnek tekinthetni.

De ha mind a négy *egy* hyperboloidon fekszik, akkor e négy vonal a hyperboloid egyik generatrix-rendszeréhez tartozik, melyet a másik generatrix-rendszer *valamenynyi* egyenese metsz és így az 1. pont értelmében végtelen számú conjugált pár létezik és ekkor a 2. pont tétele sem érvényes.

5. *A tetszőleges A pont ívelemének normálisa.*

Húzzunk a rendszer tetszőleges *A* pontjából oly egyenest, mely az *EE*, *EE* conjugált egyenespárt metszi, akkor ez az egyenes a 305. §. 1. tétele szerint merőleges valamenynyi pontjának sebességére és így merőleges az *A* pont mindazon sebességeire, melyek a négy feltétel mellett lehetségesek. Vagy, mivel *A* ezen esetben egy meghatározott felületen tartozik maradni: az *A*-ból húzott, *EE*-t és *EE*-t metsző egyenes egyszersmind ezen felületnek és *A* valamenynyi lehetséges pályaelemeinek normálisa.

361. §. *Négy feltétel mellett végbemehető momen'án csavarmozgások jellemzői. Ezek tengelyfelülete (a cylindroid).*

A megelőző §. 2. pontjának tételét tartva szem előtt: a merev

3. A 359. §. II. *Jegyzetének b. pontja értelmében a négy feltételnek alávetett rendszer valamenynyi pontjai előírt felületeken maradnak a lehetséges elmozdulások közben; ellenben azonnal kiderül, hogy az EE és az EE pontjai mindig ugyanazon egyenesek mentén szenvednek momentán elmozdulást. Ez abból következik, mivel az EE momentán elmozdulása az EE körüli elemi forgással egyenlő (277. §. és 305. §. 5. és 6. pontja) és megfordítva.*

Jegyzet. A megelőző és a jelen §. eredményei érvényben maradnak, ha a négy feltétel másként van formulázva [359. §. III. szakaszának 5. pontja].

362. §. *A merev rendszer öt pontja előírt öt felületen tartozik maradni. E mozgás néhány általános sajátsága.*

1. *A momentán csavarmozgás jellemzőinek felkeresése és meghatározása.*

A merev rendszer valamely tetszőleges, t időpillanatra vonatkozó helyzetéből indulva ki, húzzuk A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 pontjaiból az F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 felületekre az N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 normálisakat. Ezen normálisak közül mindegyik, N_m merőleges az A_m talppontjának pályaelemére; de ekkor, a 301. §. 1 tétele szerint e normális egyszersmind merőleges valamenynyi, benne fekvő pontjának pályaeveleire.

Képezzünk most az öt normálisból valamenynyi quaternót (négyesével való kombinációt), szám szerint ötöt, akkor minden egyes ily kombinációra nézve érvényes az 360. §. 1. tétele, hogy ily négy egyenes vonalat a conjugált egyenesek egy párja mindig metsz; ez az utóbbi pár a 361. §. 1. tétele értelmében mindig azon conjugált forgási tengelyek párjátképezi, mely körüli forgások a rendszer momentán (itt egy szabadsági fokkal bíró) mozgását teljesen helyettesítik.

Jeleljék az öt kombinációhoz tartozó öt conjugált egyenespárt $E_1E_1, E_1E_1; \dots, E_5E_5, E_5E_5$.

Az első kombinációt (quaternót) az N_2, N_3, N_4, N_5 négy egyenes alkotja; a 284. és 361. §§. szerint az ezen kombinációhoz tartozó E_1E_1, E_1E_1 egyenespár legrövidebb távolsága, A_1A_1 , derékszög alatt metszi a rendszer momentán csavartengelyét (a centrális tengelyt); de ugyanazt teszi a második kombinációhoz tartozó E_2E_2, E_2E_2 conjugált egyenespár legrövidebb távolsága A_2A_2 , s i. t., azaz valamenynyi öt conjugált egyenespár legrövidebb távolsága.

Mivel e szerint az öt legrövidebb távolság, $A_1A_1, A_2A_2, A_3A_3, A_4A_4, A_5A_5$ a momentán csavartengelyt derékszög alatt metszi, azért a csavartengelynek ezen felsorolt egyenesek között lévő részei egyszersmind ezen A_1A_1, \dots egyeneseknek egymástól való legrövidebb távol-

ságai lesznek, mely utóbbi távolságok e szerint valamenynyien egy és ugyanazon egyenesben, a momentán csavartengelyben fekszenek.

Továbbá, egy tetszőleges E_1E_1 conjugált egyenest véve és ennek a momentán tengellyel képezett szögét δ_1 -el, az E_1E_1 -nek e tengelytől való távolát a_1 -el jelezve, a csavarodás viszonyára nézve áll [361. §.(1)]

$$-\frac{c_0}{\omega} = a_1 \operatorname{tg} \delta_1 \dots \dots \dots (1)$$

Evvel az egyetlen lehetséges csavarmozgás jellemzői elő vannak tüntetve; a lehetséges conjugált tengelypárok itt egy sugárcomplexus conjugált egyenesei 314. §. 3. pontja).

2. *Tetszőleges pont pályájának normálisa; tetszőleges görbe által leírt felület normálisa.*

Vizsgáljuk azt az LM felületet, melyet a merev rendszer valamely meghatározott lm görbéje az öt feltétel mellett leír és legyen N' az ezen felület tetszőleges A' pontjára emelt normális.

Az N' mindenestre az lm görbe A' pontján átmenő normális síkban, de egyszersmind az A' pont pályáivének normális síkjában is fog feküdni; e szerint az N' e két normális sík metszővonala.

3. *Tetszőleges felületnek a beburkolójával való érintkező vonala.*

A merev rendszer pontjaiból alkotott, vagy a rendszerrel merev kapcsolatban lévő tetszőleges, de merev alakú F'' felület a mozgás közben egymásután különböző helyzeteket foglal el és így beburkoló felülettel bír, melyet az F'' minden pillanatban bizonyos görbe mentén érint. Ámde a beburkoló felületnek természete szerint [Math. repertórium 80. §. B.] ez a görbe nem lehet más, mint az F'' egymáshoz végtelen közel lévő két szomszédos helyzetének metszőgörbéje. E görbének az F'' -en fekvő pontjai e szerint oly ívelemeket írnak le, melyek magában az F'' felületen (és egyszersmind az envelope on is) fekszenek; ha ezekből a pontokból kiindulólág az F'' -re normálisakat emelünk, ezek a talppontjaik által leírt ívelemekre merőlegesek és így minden egyese e normálisoknak, a 301. §. (1) tétele szerint, merőleges valamenynyi pontjának sebességére.

E normálisak közül bármily négyet két conjugált egyenes fogja metszeni.

4. *Esetek, mikor a rendszer valamely pontjából húzott öt egyenes egy síkban fekszik.*

a. Bocsássunk a rendszer valamely A pontjából az előírt öt felületre normálisakat és vegyük fel, hogy ezek ezt az öt felületet azokban az A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 pontokban találják, melyek rendre ezeken az előírt F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 felületeken maradni tartoznak.

A 301. §. 1. tétele szerint minden egyes normális talppontjának sebességére merőleges lévén, valamenynyi pontjának sebességére is merőleges; avagy, itt mind az öt normális merőleges az A pályájára.

E szerint ez az öt normális egy és ugyanazon síkban fekszik.

Ez az eredmény csak az említett speciális felvétel mellett érvényes.

b. Vegyük fel, hogy a rendszer tetszőleges A pontjából oly öt egyenest vonhatunk, melyek rendre az 1. alatt említett E_1E_1 , E_1E_1 , E_5E_5 , E_5E_5 conjugált párokat metszik. A 305. §. 1. tétele szerint az ily egyenesek merőlegesek valamenynyi pontjaik sebességére, e szerint merőlegesek közös A pontjuk sebességére is és így ez az öt egyenes egy síkban tartozik lenni. E tétel SYLVESTER-től ered (1861).

Jegyzet. A fent adott tárgyalások és szerkesztések alkalmazhatók oly esetekben is, ha az öt feltétel más alakban van adva (359. §. III. szakaszának 6. pontja); mert ha a rendszer valamely pontja előírt görbén tartozik maradni, ezt két adott felület metszövonalának lehet tekinteni, melyeken a pontnak mozognia kell; ha valamely rendszerpont szilárd, e feltétel az által helyettesíthető, hogy a pont három felület metszőpontján tartozik maradni s í. t.

363. §. *A merev rendszer három pontja előírt három felületen mozog.*

Ezen esetben a rendszer mozgása szabadsági fokának száma három.

Mivel még egy feltétel hozzákapcsolása szükséges, hogy pontjai előírt felületeken mozogjanak (359. §. II. *Jegyzete*), azért pontjai általánosságban három irány mentén mozoghatnak.

1. *Végtelen számú congruentiák.*

Az előírt F_1 , F_2 , F_3 felületekre az A_1 , A_2 , A_3 pontokból emelt egyes N_1 , N_2 , N_3 normálisak merőlegesek valamenynyi pontjaik sebességére (360. §. 1. pontjának második kikezdése) és ezért mindenestre lineáris complexus egyeneseinek tekinthetők (312. §.).

Mintán már *négy* adott normálishoz számtalan momentán csavartengely (361. §. 2. pontja) és így a 314. §. tételei értelmében számtalan ily complexus tartozik, melyek közös egyenesei e négy egyenes [313. §. 5. pontja és 319. §. 3. pontjának utolsó kikezdése], annál inkább fog létezni végtelen számú oly complexus, melynek közös egyenesei az említett három normális.

Ha a nevezett N_1 , N_2 , N_3 normálisakhoz még egy tetszőleges N negyedik egyenest (mint normálist) választhatunk, akkor e négy egyenes két conjugált egyenest és így egy congruentiát határozna meg (319. §.); ez egyenest pl. azon feltétel által nyernők, hogy a rendszer negyedik pontját, A -et előírt F felületen maradni kényszerítenők és az AN normális volna ez az egyenes.

Mintán e negyedik feltétel tetszőleges, azért számtalan congruentiát és hozzájuk tartozó végtelen sok directrix-párt nyerünk (319. §. 1.), mely utóbbiak mindig metszik az adott N_1 , N_2 , N_3 nor-

málasakat és mely párok mindegyike conjugált forgástengelyeket alkot (319. §. 2.).

2. *A complexusok közös sugaraiknak helye egyhéjú hyperboloid.*

A 321. §. 2. pontjában kimutattuk, hogy adott három egyenes a complexusok háromtagú csoportját határozza meg, melyek közös egyenesei az N_1 , N_2 , N_3 egyeneseken átfektetett egyhéjú hyperboloidnak (az ú. n. *regulus*-felületnek) egyik generatrix-rendszerét képezik (321. §. 1. pontja); míg valamenynyi EE , EE directrixek a generatrixek másik rendszeréhez tartoznak.

3. *A merő rendszer pontjai három irányban mozoghatnak, de a regulus pontjai előírt felületeken maradnak.*

A rendszer tetszőleges A pontjából húzzunk oly egyenest, mely az EE , EE directrix-rendszer két conjugált egyenesét metszi. Ekkor ez az egyenes valamenynyi pontjának sebességére merőleges lesz, bármily is legyen a momentán elmozdulás; és így ez az egyenes az A pont lehetséges momentán elmozdulásai egyik csoportjának normálisa.

De, ha az A pont az e §. 2. pontjában említett hyperboloidon fekszik, akkor belőle kiindulólág húzva azt az egyenest, mely két (conjugált) directrixet metsz: ez az egyenes a 307. §. II. tétele értelmében valamenynyi többi directrixet (melyek itt a generatrixek egyik rendszerét képezik) is fogja metszeni és így az A -ból csak *egyetlen* oly egyenest lehet húzni, mely valamenynyi pontjának sebességére merőleges (mert a generatrixek másik rendszeréhez tartozó egyenesek közül csak *egy* megyen az A ponton keresztül). E szerint az A pont lehetséges elmozdulásai egy *közös normálissal* bírnak, a mi azt mondja, hogy ekkor A előírt felületen tartozik maradni.

4. *A momentán csavarmozgás tengelyeinek helye.*

Négy adott N_1 , N_2 , N_3 , N normális esetében a momentán tengelyek helye egy cylindroid, (361. §. 2. pontja és 320. §.); miután itt a negyedik egyenes, N tetszőlegesen választható, azért jelenleg e tengelyek helye az oly cylindroidok *kétméretű* sokasága * vagy serege, melyek mindegyike az EE , EE directrix- (itt a hyperboloid egyik generatrix-) rendszer két conjugált egyenese segítségével van szerkesztve (míg az N_1 , N_2 , N_3 a generatrixek másik rendszeréhez tartoznak).

Jegyzet. Itt is érvényesek a fent talált eredmények, ha a három feltétel más alakban van adva (359. §. III. szakaszának 4. pontja).

* *Kétméretű* azért, mert ha az N_1 , N_2 , N_3 , N egyeneseket egy L egyenes metsz, akkor az N -et még számtalanféleképen, de úgy választhatni, hogy ez az L egyenes még mindig messe N -t; innen származik a cylindroidok egyméretű serege; miután pedig az N_1 , N_2 , N_3 -t metsző számtalan egyenes (generatrix) létezik és ezek mindegyikére az előbb említett meg-

364. §. *A merev rendszer két pontja előírt két felületen mozog.*

Ha az A_1 és A_2 pontok előírt F_1 és F_2 felületeken tartoznak maradni, akkor az A_1 -ből és A_2 -ből az F_1 - és F_2 -re emelt N_1 és N_2 normálisak merőlegesek valamenynyi pontjaik sebességére (301. §. 1. tétele).

Ezen esetben, a 319. és 322. §§. értelmében a conjugált tengelyek összesesége oly congruentiát alkot, melynek directrixei az N_1 és N_2 egyenesek. A megelőző §. 4. pontjában kifejtettekhez hasonló megfontolásokból következik, hogy az itt lehetséges összes momentán csavarmozgások tengelyei a cylindroidok *négyméretű* sokaságát* vagy seregét alkotják.

Jegyzet. Ezek az eredmények még akkor is érvényesek, ha a két feltétel oly alakban van kifejezve, hogy a rendszer valamely A_1 pontja előírt görbén kénytelen mozogni (359. §. III. szakaszának 3. pontja).

365. §. *A merev rendszer egyik pontja előírt felületen mozog.*

Ha az A_1 pont az előírt F_1 felületen tartozik maradni, akkor az A_1 -ből F_1 -re emelt N_1 normális A_1 pontja sebességére merőleges és így az N_1 önmagához conjugált egyenes (305. §. 3. tétele).

Ezen esetben (323. §.) a conjugált tengelyek összesességét mindazok az egyenesek alkotják, melyek az N_1 normalist metszik. E szerint az itt lehetséges momentán csavarmozgások tengelyei a tért teljesen betöltik és minden, tetszőleges fekvésű és irányú egyenest lehet momentán tengelynek választani.

Ez az utóbbi állítás abból következik, hogy minden tetszőleges OZ egyeneshez (momentán tengelyhez) egy azt derékszög alatt metsző A_0A_0 egyenest lehet húzni, melyet egy conjugált tengelypár legrövidebb távolságának már csak azért is lehet tekinteni, mivel A_0 és A_0 -ban az A_0A_0 -ra merőleges síkokat emelve, e síkok A és A pontokban fogják metszeni az N_1 adott egyenest és így A_0A és A_0A két conjugált (itt az N_0 -t metsző) tengelynek tekinthető, melyek momentán tengelye a tetszőlegesen választott OZ .

366. §. *A feltételek helyettesése gyorsulásokkal. A feltételi gyorsulások számításáról.*

1. A 89a §. megfontolásai értelmében minden feltétel alkalmasan választott gyorsulás által helyettesíthető; minden ily gyorsulás merőleges az előírt felületre vagy pályára.

A feltételi gyorsulás számítására azonban a pontra nézve a 130. §-ban adott eljárások a rendszerek kényszermozgására még nem elegendők, mivel itt a merev rendszer egy pontja gyorsulásának változtatása általánosságban a többiekét is változtatja.

fontolás érvényes, azért végtelen számú ily cylindroid-sereg létezik és így valóban az ily cylindroidok *kétméretű* sokasága lép fel.

* V. ö. a megelőző §. lábjegyzékét, 630. l..

Ugyanis, a merev rendszer n , számú $A_1 \dots A_i, A_k \dots A_n$ pontjainak egymáshoz viszonyított relativ helyzetük változatlan lévén, az

$$\left. \begin{aligned} r_{ik}^2 &= (x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2 = \text{constans}; \\ i &= 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad i \geq k; \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

egyenletek [szám szerint $\frac{1}{2}n(n-1)$ -en] állanak fenn; de ezek, miként tüstént kimutatjuk, egymástól nem függetlenek.

Közelebből pedig két pontból álló rendszernél egy ily (1) feltétel áll; három pontból álló rendszernél három ily feltétel.

Minden további pont három új feltételt kíván, mely azt mondja, hogy az új pont távolsága az előbbi három ponttól változatlan; ez által az új pont helyzete már teljesen meg van határozva.

E szerint az n pontból álló merev rendszernél az egymástól független ily feltételek száma

$$3 + 3(n-3) = 3n - 6 \dots (2)$$

Ha a rendszer nem volna merev, mindegyik pontja a többitől függetlenül mozoghatna s szabad mozgása három szabadsági fokkal bírna, s így a rendszer mozgása $3n$ fokkal; ámde a merevség feltétele az (1) alatti $(3n-6)$ számú független kapcsolatot követeli és így a merev a rendszer mozgása $3n - (3n-6)$, azaz hat szabadsági fokkal bír (359. §. III. szakasza).

2. A feltételi gyorsulások számítására e szerint a következő eljárás kinálkozik:

Fejezzük ki a feltételi gyorsulást vagy gyorsulásokat az előírt felületen vagy felületeken mozgó pont vagy pontok számára a 130. §. értelmében. Ezekkel és az (1) összefüggések második differenciál-quotiensei segítségével a rendszer többi pontjai számára is kiszámíthatjuk a feltételi gyorsulásokat, melyek hozzákapcsolása által a rendszer szabadon mozognak tekinthető.

E számítást valamint a vele járó analitikai tárgyalását a feltételeknek alávetett rendszereknek a dynamikában fogjuk megejteni.

367. §. Első példa a merev rendszerek kényszermozgására.

Valamely merev rendszer mozgása azon feltételeknek legyen alávetve, hogy egyik pontja egy meghatározott térbeli görbén mozogjon, továbbá, hogy a rendszernek ezen ponton átmenő egyik egyenesese mozgás közben mindig érintője legyen ezen meghatározott térbeli görbének, végre, hogy a rendszernek ezen egyenesen átmenő egyik síkja mozgás közben mindig egybe essék a térbeli görbe simuló síkjával.

Az első két feltételt más alakban is fejezhetni ki; ugyanis, tekintsünk egymáshoz végtelen közel fekvő két pontot, mely mindig egy előírt görbén tartozik maradni; ekkor a két pontot egybekapcsoló

egyenes mindig érintője a szilárd görbének és így a két feltétel ki van elégítve.

Az utolsó feltétel még úgy is fejezhető ki, hogy a merev rendszernek azon egyenese, mely egy tetszőleges időpillanatban az előírt görbe főnormálisa, az a mozgás közben is mindig főnormálisnak tartozik maradni.

A feltételek számát illetőleg észreveszszük, hogy mindegyik pontnak előírt görbén való maradása folytán két-két feltétel áll be, míg az érintőn átmenő síknak az osculáló síkkal való egybeesése folytán e sík forgása az érintő körül teljesen meg van határozva és így ez egy feltételt involvál. E szerint itt összesen öt feltétel áll fenn s a mozgás csak egy szabadsági fokkal bír.

Hogy a problémát könnyebben lehessen megvizsgálni, e mozgást még következőleg is fejezhetjük ki:

A merev rendszer azon síkja, mely egy időpillanatban a görbe (érintőjét és binormálisát tartalmazó) rectificáló síkja, mozgás közben is mindig rectificáló síknak marad és e síknak mindig ugyanazon pontja érinti az előírt görbét.

Ámde a rectificáló sík egymásra következő két szomszédos helyzete a *rectificáló egyenes*-ben metszi egymást [Math. repertórium. Kiegészítések, 2. lap]; ez az egyenes pedig az egymásra következő két főnormálisra merőleges (u. o.) avagy az egész görbület síkjára merőleges (értve ez alatt azt a síkot, mely az egész görbület $d\eta$ szögét tartalmazza és melyet nyerjük ha a két szomszédos főnormális irányát közös pontból rajzoljuk s e két vonalon át síkot fektetünk).

A kérdés most a körül forog, milyen csavarmozgással hozhatjuk a rectificáló síkot és a reá merőleges főnormális a szomszédos helyzetbe? A felelet a következő:

Ha a merev rendszert a rectificáló egyeneshez párhuzamos vonal körül a $d\eta$ elemi szöggel forgatjuk, ez által a rectificáló síkot új helyzetébe hozzuk, de a főnormális, mely e közben a rectificáló egyenesre még mindig merőleges marad, még nem jutott új helyzetébe; ezt elérjük, ha a rendszert a rectificáló egyenes mentén önmagához párhuzamosan addig eltoljuk, míg a főnormális új helyzetét födi.

E szerint a keresett csavarmozgás momentán tengelye az adott szilárd térbeli görbe mindenkor i rectificáló egyeneséhez párhuzamosan fekszik; e csavarmozgás forgásszöge (amplitudója) az egész görbület szöge, $d\eta$, translációja pedig az előszabott görbén leírt ívelem vetülete a rectificáló egyenesre.

A megelőzők értelmében a rectificáló egyenes a TB rectificáló síkba esik és az érintő vonallal oly szöget képez, melynek cosinusa $d\epsilon : d\eta$, a binormálissal pedig olyat, melynek cosinusa $d\theta : d\eta$, hol $d\theta$ a görbülés-, $d\epsilon$ csavarodás-, $d\eta$ az egész görbület szöge [Math. repertórium i. h. és e mű 71. §. (16).]

A momentán csavartengely is párhuzamos a TB síkhoz és a T és B -vel ugyanazokat a szögeket képezi mint a rectificáló egyenes.

A mi e tengely helyzetét a térben illeti, megjegyzendő hogy e tengely körüli forgás úgy tekinthető, mint a görbe görbületi tengelye körüli $d\theta$ szögű és a görbe tangense körüli $d\epsilon$ szögű két forgás eredője; e szerint a momentán csavartengely nem lehet más, mint az előszabott szilárd görbéhez simuló csavargörbe tengelye [Math. repertórium. Kiegészítések 1. és 2. lap].

Ezek értelmében a momentán csavarmozgás az adott, szilárd térbeli görbe jellemzői segítségével a legegyszerűbb módon, a simuló csavargörbe adataival van meghatározva [L. a pontmozgás 71. §-át.]

368. §. Második példa merev rendszerek kényszermozgására.

Valamely merev rendszer akként mozog, hogy egy A_1 pontja előírt F_1 felületen mozog, míg a rendszerrel merev kapcsolatban lévő sík egy másik F_2 felületet mindig és akként érint, miszerint e sík egy meghatározott A_2 pontja marad mindig érintési pontnak, mely ezen F_2 felületen görbületi görbét ír le.

Az egyszerű feltételek száma itt öt; az első egy egyszerű; a második egy négyszeres feltételt képvisel [az érintési A_2 pontnak a felületen maradása és előírt görbén való mozgása két feltétel, a síknak folytonos érintése pedig az annak normálisa irányát meghatározó két feltétel].

1. Ezen görbületi görbe főgörbületi sugara legyen ρ ; e sugár az F_2 -nek N_2 normálisába esik és iránycosinusai rendre a, b, c ; ezen N_2 normális talppontja az A_2 pont, melynek coordinátái x, y, z ; az A_2 által leírt ívelem ds , melyre nézve áll:

$$ds = [(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2]^{\frac{1}{2}} \dots \dots \dots (1)$$

Legyen B_2 az N_2 -ön fekvő, A_2 -től állandó l távolságban lévő pont, melynek e szerint a coordinátái, továbbá ezek növekedései és a B_2 által leírt $d\sigma$ ívelem:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x + al, & \eta &= y + bl, & \zeta &= z + cl, \\ d\xi &= dx + l da, & d\eta &= dy + l db, & d\zeta &= dz + l dc. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

$$d\sigma = [(d\xi)^2 + (d\eta)^2 + (d\zeta)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

2. A ds ív kezdő- és végpontjából az F_2 felületre emelt N_2 és N_2' normálisak egyszersmind merőlegesek a ds ívre magára; ha e normálisak iránycosinusai rendre:

$$a, b, c; \quad a + da, \quad b + db, \quad c + dc,$$

akkor e két normális által egymással képezett szög [Math. repertórium 71. §. (2a)] $d\psi$, melyre nézve:

$$(d\psi)^2 = (da)^2 + (db)^2 + (dc)^2 \dots \dots \dots (3)$$

Maga a ds ív merőleges lévén az N_2 -re:

$$adx + bdy + cdz = 0 \quad (4)$$

3. Szorozva a (2)-ben $d\xi$ -t, $d\eta$ -t, $d\zeta$ -t rendre a -, b -, c -vel és megjegyezve, hogy $ada + cdb + bdc = 0$, nyerjük, tekintettel a (4)-re:

$$ad\xi + bd\eta + cd\zeta = 0, \quad (5)$$

azaz, a B_2 pont pályájának $d\sigma$ eleme szintén merőleges az N_2 -re.

4. A görbületi görbék jellemző feltétele [Math. repertórium 95. §.], hogy a ds kezdő- és végpontjából a felületre emelt két normális a normális főmetszet síkjába esik; legyen C_n e két normális metszőpontja és ϱ_n a ds távolsága a C_n -től, (azaz ϱ_n a normális metszet görbületi sugara); végre ε az s osculáló síkja és e normális metszet között lévő szög.

Ha az XYZ rendszer kezdetét a C_n -be tesszük, akkor magasabb rendű kicsinyek elhanyagolásával a ds kezdő- és végpontjára nézve:

$$x = a\varrho_n; \quad y = b\varrho_n; \quad z = c\varrho_n; \quad x + dx = (a + da)\varrho_n \quad \text{s i. t.};$$

azaz:

$$dx = \varrho_n da; \quad d\eta = \varrho_n db; \quad dz = \varrho_n dc, \quad (6)$$

hol a ds görbületi sugara, ϱ , MEUSNIER tétele szerint [Math. repertórium 85. §. (3)]:

$$\varrho = \varrho_n \cos \varepsilon.$$

A (2) középső és a (6) kifejezéseiből:

$$d\xi = (\varrho_n + l) da; \quad d\eta = (\varrho_n + l) db; \quad d\zeta = (\varrho_n + l) dc \quad (7)$$

Evvel a B_2 pont elmozdulása teljesen ki van fejezve.

5. Az N_2 -ön fekvő C_n görbületi középpontra nézve áll $l = -\varrho_n$ és így ezen pontra nézve a (7)-ből:

$$d\xi = 0, \quad d\eta = 0, \quad d\zeta = 0,$$

azaz, a normális metszet C_n görbületi középpontja a momentán mozgás közben nyugalomban marad; ez annyit mond, hogy a momentán mozgás egyszerű forgásra redukálódik, melynek tengelye az ezen C_n középponton megyen keresztül.

De mivel e tengelynek az A_2 pont ívelemére merőlegesnek kell lennie, ez az ívelem pedig mint egy görbületi görbe ívelemé magasabbrendű csekélyek elhanyagolásával az F'_2 egyik normális főmetszetének [Math. repertórium 86. §.] íve, azért a momentán forgás tengelye a másik, az előbbivel derékszöget képező normális főmetszet síkjában fekszik.

Ha e momentán tengelyt EE -nek nevezzük, akkor a hozzátartozó conjugált EE vonalat azonnal találjuk.

Ugyanis, az N_2 normális merőleges valamennyi pontjának sebességére [301. §. 1. tétele] és mivel N_2 az EE -t az egyik normális főmetszet görbületi középpontjában (azaz a C_n pontban metszi), azért az N_2 -nek (a 305. §. 2. tétele szerint) az EE -t is kell metszenie.

Ha most az A_2 pontot a második, az előbbivel derékszöget képező normális metszet íveleme mentén mozgatjuk el, a megelőzők szerint ennek a második normális metszetnek görbületi középpontja (mely szintén az N_2 normálison fekszik) marad nyugalomban és a momentán forgás tengelye e ponton megyen át és az első főmetszet síkjában fekszik, míg a hozzá conjugált egyenes szintén ugyanezt az N_2 normálist metszi.

Továbbá, a 360. §. 2. pontjában bebizonyítottuk, hogy a *négy* feltételnek alávetett rendszernek bármily, a feltételekkel megegyező momentán elmozdulása közben csak *egy* meghatározott párja a conjugált egyeneseknek létezhetik; mivel pedig az adott négy feltétel mellett (elhagyva t. i. most az ötödiket, mely szerint az A_2 -nek az F_2 -ön leírt pályája görbületi görbe) az A_2 pont csak az F_2 felületen tartozik maradni, és e mozgás is, a 284. §. értelmében a két conjugált egyenes körüli forgás által helyettesíthető; mivel még a most tekintetbe vett két esetben először az egyik görbületi középponton átmenő EE , másodszor a másik görbületi középponton átmenő EE egyenes a momentán forgás tengelye, és mivel végre itt a conjugált egyeneseknek csak egy párja lehetséges, következik:

A jelen példában az EE és EE conjugált egyenesek az egymásra merőleges két normális metszet görbületi középpontjain haladnak át és e két metszet síkjaiban fekszenek.

A további részletek felkeresését az olvasóra bízunk.

12. Feladatok a merev rendszerek általános és relativ mozgására.

369. §. Feladatok merev rendszerek általános mozgására.

1. Bizonyítsassék be, hogy valamely merev rendszerhez tartozó egyenes pontjai sebességeinek (illetve elemi elmozdulásainak) magára az egyenesre való vetületei és pedig valamenynyi pontra nézve ugyanazon értékű. [A bizonyításnál felhasználható CHASLES tétele (277. §.) mely szerint az egyenes legáltalánosabb elemi elmozdulása mindig valamely meghatározott más (conjugált) egyenes körüli elemi forgás]. V.

2. A 306. §. tételei értelmében valamely $AB=t$ egyenes vonal tetszőleges mozgásánál valamenynyi pontjának sebességi irányai egy hyperbolás paraboloid generatrixei. E tételek alapján bebizonyítandó, hogy a sebességek vetületei az AB irányra egyenlők; továbbá ezen utóbbi sajátság alapján, hogy a merev rendszer tetszőleges A_1, A_2, A_3 pontjainak v_1, v_2, v_3 sebességi irányai és az $A_1A_2=l_{12}, A_2A_3=l_{23}, A_3A_1=l_{31}$ távolságok irányai között mindig a következő összefüggés áll fenn:

$$\cos(v_1, l_{12}) \cos(v_2, l_{23}) \cos(v_3, l_{31}) = \cos(v_1, l_{31}) \cos(v_2, l_{12}) \cos(v_3, l_{23}). \quad V.$$

3. Bizonyítsassék be, hogy a 309. §-ban tárgyalt tétel, hogy ugyanis a conjugált egyenesek tetszőleges két párja, E_1E_1, E_1E_1 és E_2E_2, E_2E_2 egy és ugyanazon egyhéjú hyperboloidon tartozik feküdni, a következő speciális esetet is foglalja magában: Ha az E_2E_2 a momentán csavar-

tengelylyel párhuzamos, akkor a felület hyperbolás paraboloiddá fajul és az E_1E_2 vonal végtelen távolságba jő. V.

4. Bizonyíttassék be, hogy a merev rendszer pontjainak azon sebességei, melyek egy bizonyos időpillanatban egy és ugyanazon síkban fekszenek, valamenynyien egy közönséges parabolát érintenek. V.

5. Bizonyíttassék be, hogy a merev rendszer pontjainak azon sebességei, melyek irányai a tér valamely pontján mennek keresztül, egy másodrendű kúpon fekszenek, melynek csúcsa a nevezett pont. V.

6. Bizonyíttassék be, hogy a merev rendszer azon pontjai, melyeknek sebességei megfelelnek a megelőző feladat feltételének (t. i. hogy irányai a tér egy bizonyos pontján haladnak keresztül) egy harmadrendű görbén, az φ . n. köbös ellipsisen fekszenek. V.

7. Bizonyíttassék be, hogy ha valamely merev rendszer EE egyenese ugyanezen egyenes egyik, F pontja pályájához érintő, akkor a hozzá conjugált EE egyenes szintén érintője egyik, II pontja pályájának, továbbá, hogy a PII egyenes a centrális tengelyre merőleges és hogy az EE és EE egyenesek egymásra merőlegesek. Ekkor egyszersmind az EE egyenes valamenynyi pontjának sebességei egy S síkban fekszenek és oly parabolának érintői, melynek gyűpontja a II pont; ez az utóbbi pont egyszersmind az S síknak kinematikai fókusa. Ugyanily eredmény áll az EE -re, egy Σ síkra és az P pontra nézve. [A bebizonyítás a conjugált tengelyek körüli forgások alapján végezhető (284. §.)]. S. G.

8. Vizsgáltassék meg a merev rendszer azon mozgása, melynél e rendszer valamely egyenesének adott három pontja adott három (nem párhuzamos) síkban mozog. A.

9. Vizsgáltassék meg az előbbi feladat mozgása azon különbséggel, hogy az adott három pont nem fekszik egy egyenesben. A.

10. Milyen a mozgás, ha a merev rendszer adott két egyenese két térbeli görbét folytonosan érint; mely feltételek mellett lehetséges ily mozgás? A.

11. Legyenek OX , OY , OZ egymásra merőleges tengelyek; a merev rendszer oly formán mozog, hogy bizonyos S síkja mindig egy és ugyanazon P pontban metszi az OZ tengelyt, míg ugyanezen sík meghatározott A és B pontjai az OX , illetve OY tengelyen síklanak; határoztassék meg a momentán csavartengely a rendszer tetszőleges, itt lehetséges helyzetére nézve.

[Jeleljék: $AB=l$, $OP=p$; továbbá α a szöget az O -ból az AB -re bocsátott merőleges és az OX tengely között. Könynyű kimutatni, hogy az S sík elemi mozgása két forgásból eredőnek tekinthető. Az első oly tengely körül történik, mely az OA és az OB vonalak fölött szerkesztett derékszögű négyyszög negyedik (az O -val diagonálisan szemközt fekvő) csúcsán megyen át és az OZ -hez párhuzamos (147. §. 1. példája); e forgás szögsebessége $\frac{da}{dt}$. A második forgás az AB körül $\frac{d}{dt} \left[\arctg \left(\frac{l \sin 2\alpha}{2p} \right) \right]$ szögsebességgel megyen végbe. Ezen egymást nem metsző tengelyek körüli forgások-

ból a 279. vagy a 361. §. mintája szerint szerkeszthető a csavar-mozgás]. S. G.

12. Határozassék meg a momentán csavarmozgás, ha a merev rendszer egy meghatározott síkjában fekvő görbe vonal ívelemei mozgás közben successive coincidlának egy adott gömbfelületen lévő meghatározott görbe ívelemeivel. A.

13. Milyen lesz a megelőző mozgás, ha az első vonal is gömbfelületi görbe, de a két gömb sugara különbözö? A.

14. Keressék a csavarmozgás abban az esetben, mikor valamely gömb akként mozog egy másik álló gömbön, hogy minden időelemben a két középpontot egybekapcsoló egyenes körül a gördülés szögével arányos szöggel forogjon a gördülő gömb? A.

15. Vizsgáltsék meg a merev rendszer mozgása, ha egymásra merőleges három merev síkja egy adott ellipsoidot folytonosan érint. Milyen a mozgás, ha az ellipsoid gömbbé fajul? V.

16. Vegyük fel egyszerűség kedvéért, hogy a föld középpontja egyenletesen körben mozog a nap körül, míg maga a föld ω állandó szögsebességgel forog a középpontján átmenő állandó irányú tengely körül; határozassék meg e földmozgás momentán csavartengelyének helye a földben és a térben (L. a 220. és 221. §§.-ok megfontolásait).

(Jeleljék α a föld körpályájának (az ecliptikának) sugarát, μ e sugár szögsebességet (a föld ú. n. középmozgását), ε a föld tengelyének a föld pályasíkjára normálisához való hajlásszögét (az ecliptika ferdeségét); akkor a következő eredmények érvényesek:

A földben a keresett egyenesvonalú felület egy ellipszoid henger, melynek alapja $\frac{2\mu\alpha}{\omega}$ és $\frac{2\mu\alpha}{\omega} \cos \varepsilon$ tengelyekkel bír. A térben ellenben e felület epicyclois-alapú henger, az epicycloist egy $\frac{\omega-\mu}{\omega+\mu} \cdot \frac{\mu\alpha}{\omega} \cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon$ sugarú kör középpontjától $\frac{\mu\alpha}{\omega} \sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon$ távolságban lévő pont írja le, mikor e kör egy másik $\frac{2\mu^2\alpha}{\omega^2+\mu\omega} \cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon$ sugarú körön gördül.) S. G.

17. A 310. §. első tétele szerint, ha a momentán csavartengelyek a térben egy síkra lefejtethő felületet alkotnak, akkor e tengelyeknek a merev rendszerben alkotott felülete szintén síkban lefejtethető. Ennek alapján bizonyítsák be, hogy ha e felületek nem hengeresek, akkor a merev rendszer bármily pontja pályájának osculáló csavargörbéje [71, 58. és 330a. §§.] egy egyenes, állandó sugarú hengerfelületen fekszik, melynek helyzete és méretei az egyes rendszerbeli pontokra nézve más-más értékűek]. S. G.

18. Bizonyítsák be a conjugált egyenespárok vagy conjugált tengelypárok alaptulajdonságaiból, ha valamely merev rendszer egy adott N , egyenese mindig merőleges valamenynyi pontjának sebességére (azaz, a mi tökéletesen ugyanazt jelenti, ha e rendszer valamely pontja előírt felületen tartozik maradni, 365. §.), hogy akkor bármily két egyenes, mely az adott egyenesen meggyen keresztül, egy conjugált tengelypárt képez és hogy ezek összessége oly speciális vonalcomplexust alkotnak, melyhez az

adott egyenest (az F_1 felület N_1 normálisát) metsző valamenynyi egyenes tartozik. V.

19. Bizonyítsák be az előbbi feladat alapján, ha a merev rendszer két adott egyenese N_1 , N_2 , külön-külön merőleges valamenynyi pontjaik sebességére (azaz, ha két pont előírt két F_1 , F_2 felületen tartozik maradni, 364. §.), hogy akkor a conjugált egyenes-(tengely-)párok összessége oly congruentiát alkot, melynek directrixei az adott N_1 , N_2 egyenesek (az F_1 és F_2 felületek N_1 és N_2 normálisai). V.

20. Bizonyítsák be folytatólag az előbbi feladatok alapján, hogy három adott önmagukhoz conjugált egyenes (három mozgásbeli feltétel, 363. §.) esetében a conjugált tengelypárok összessége egy egyhéjú hyperboloid generatrixeinek egyik rendszerét képezik, míg az adott három egyenes a másik rendszerhez tartozik [vagy, hogy a conjugált tengelypárok összességét a lineáriscomplexusok háromtagú csoportjának (321. §.) conjugált egyenespárjai képezik]. V.

21. Bizonyítsák be folytatólag, hogy négy adott önmagukhoz conjugált egyenes (négy feltétel, 360 és 361. §.) esetében a conjugált tengelypárok összességét a lineáris complexusok kéttagú csoportjának conjugált egyenespárjai alkotják (320. §.) és hogy végre öt adott, önmagukhoz conjugált egyenes (öt feltétel, 362. §.) esetében a conjugált tengelypárok összességét egyetlen egy lineáris complexus conjugált sugarai alkotják (314. §. 3. pontja). V.

22. Adva van egy harmadrendű térbeli görbe, bizonyítsák be, hogy a tér tetszőleges B pontjából a görbéhez három osculáló síkot lehet húzni, melyeknek a görbén lévő érintési pontjai a B ponton átmennő egy síkban fekszenek. [A bizonyítás a 318. §. alapján történhet]. V.

23. A 329. §. gyorsulási formulái alapján bizonyítsák be, hogy a merev rendszer mindazon pontjai, melyek gyorsulásainak abszolút értéke k paraméterrel egyenlő, oly ellipsoidon fekszenek, melynek középpontja a gyorsulás centruma, míg főtengelyei irány és nagyság szerint csak a k -tól, a szöggyorsulástól és a szögsebességtől függenek. A k paraméter különböző értékeinek megfelelő ellipsoidok koncentrikusak, hasonlóak és hasonló fekvésűek. V.

24. A megelőző feladat formulái alapján bizonyítsák be, hogy a rendszer minden síkjában létezik egy pont, melynek gyorsulása minimum, míg az egyenlő értékű gyorsulások görbéi e síkban hasonló és hasonló fekvésű ellipszisek, melyek középpontja e minimális gyorsulású pont. V.

25. Folytatva a megelőző két feladat tárgyalásait, bizonyítsák be, hogy a merev rendszer minden egyenes vonalában egy minimális gyorsulású pont létezik és hogy a tőle egyenlő távolságban lévő pontok gyorsulásai egyenlő értékűek. V.

26. Bizonyítsák be, hogy a merev pontrendszer bármely egyenese pontjai pályáivainak görbületi tengelyei minden időpillanatban egy egyhéjú ellipszises hyperboloid generatrix-rendszerei egyikét képezik. (A fel-

adat megfelel az egyenes vonal sík mozgásánál fellépőnek, 199. §. 1. és 203. §. 49. feladata. A bizonyítás az 305, 306 s 309. §§. alapján történhetik). V.

27. Bizonyítsák be, hogy a megelőző feladatban mozgó egyenes pályáival oszúló gömbjeinek középpontjai (egymásra következő görbületi tengelyeik metszőpontjai) egy harmadrendű térbeli görbén, az oszúló gömbök középpontjainak görbéjén fekszenek. (A bizonyítás a 305, 306, 309, 330a. §§. alapján végezhető). V.

370. §. *Feladatok merev rendszerek gömbi és általános mozgása magasabb rendű gyorsulásaira.*

28. Jelelve α , β , γ cosinusokkal egy meghatározott irányt, bizonyítsák be, hogy a rendszer azon pontjai, melyek $n-1$ -ed rendű gyorsulása ez irányhoz párhuzamos, megfelelnek az

$$x^{(n)} : y^{(n)} : z^{(n)} = \alpha : \beta : \gamma$$

egyenes vonalnak, [$(x^{(n)})$, $y^{(n)}$, $z^{(n)}$ -et a 334. §. (1) formulái szerint x , y , z -vel fejezve ki.] V.

29. Legyenek α , β , γ egy sík normálisának iránycosinusai, bizonyítsák be, hogy a rendszer mindazon pontjai, melyek e síkhoz párhuzamos $n-1$ -ed rendű gyorsulással bírnak, az

$$\alpha x^{(n)} + \beta y^{(n)} + \gamma z^{(n)} = 0$$

egyenletnek megfelelő, az $n-1$ -ed rendű gyorsulás középpontján átmenő síkban fekszenek. V.

30. Legyen $F(x, y, z) = 0$ tetszőleges kúpfelület, bizonyítsák be, hogy a rendszer azon pontjai, melyek $n-1$ -ed gyorsulásai e kúp generatrixeivel párhuzamosak, evvel egyenlő fokú $F(x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)}) = 0$ oly kúpfelületen fekszenek, melynek csúcspontja az $n-1$ -ed rendű gyorsulások középpontja. Mutassák ki, hogy e felület hengerré fajul, ha e közép pont végtelen távolságban van, vagy ha az $n-1$ -ed gyorsulásnak nem csak középpontja, de tengelye is van, (melynek valamenynyi pontjára nézve e gyorsulás zérus). V.

31. Legyenek φ_{l-1} , φ_{m-1} , φ_{n-1} három magasabb rendű gyorsulás; bizonyítsák be, hogy a) a rendszer csak nyolcz pontjában lehet e három irány egymásra merőleges; b) a rendszer azon pontjai, e melyekre nézve e gyorsulások egyike merőleges a többi kettőre, egy negyedrendű térbeli görbén fekszenek. V.

32. Bizonyítsák be, hogy a rendszer azon pontjai, melyek $n-1$ -ed rendű gyorsulásai mind egy és ugyanazon a , b , c koordinátájú A_0 ponton mennek keresztül, az

$$x^{(n)} : y^{(n)} : z^{(n)} = (x-a) : (y-b) : (z-c)$$

egyenlet által képviselt, az $n-1$ -ed rendű gyorsulások középpontján áthaladó negyedrendű görbén fekszenek. V.

371. §. *Feladatok pontok és merev rendszerek relativ mozgására.*

33. A 354. §-ban a vízszintes síkon haladó pont mozgását vizsgáltuk meg; miképen módosul e probléma ha $a)$ e §. (1) egyenleteiben az I. Általános esetre nézve az ω^2 -tel szorzott tagokat nem hanyagoljuk el [itt alkalmazható a 354. §. II. pontja Jegyzetében említett eljárás, 611. l.]; $b)$, ha e §. II. Speciális eseteiben a (10) egyenlet ω^2 -tel szorzott tagjait elhanyagoljuk s az eredményt (14)-el összehasonlítjuk? V.

34a. Miképen tárgyalandó a 354. §. pontjának mozgása, ha síkja nem horizontális, hanem ennek 1. ha normálisa a meridián síkjába esik és a vertikálissal α szöget képez; 2. ha normálisa a nyugot-kelet vonalán átmenő vertikális síkban fekszik és a vertikálissal β szöget képez; 3. ha e normális a vertikálissal α , a vízszintes síkra való vetülete a nyugot-kelet vonallal ϑ szöget képez? A.

34b. A megelőző probléma esetei különösen fejtendők meg a pólusra nézve (354. §. 2. pontja); kimutatandó, hogy akkor e három eset egygyé olvad. A.

35a. Valamely nehéz pont a földnehézségi gyorsulás befolyása alatt egy a vertikális körül forgó lejtőn gördül lefelé; fejeztessék ki a CORIOLIS-féle gyorsulás. képeztesse a mozgás egyenletei és fejtessenek ezek meg, ha a forgás egyenletes. Mekkora a ψ_n feltéti gyorsulás (89a és 130. §§.)? A.

35b. Valamely pont a földnehézségi gyorsulás befolyása alatt oly mozgó lejtőn gördül lefelé, melynek hajlásszöge mindig ugyanazon vertikális síkban marad. Megállapítandók a pont általános és relativ mozgásának differenciálegyenletei; fejtessenek ezek meg, 1. ha a lejtőnek a hajlásszöge síkjában egyenletes vízszintes translációja van; 2. ha e transláció egyenletesen gyorsuló. Bebizonyítandó, hogy az 1. esetben a pont abszolút pályája az

$$x^2 \sin^2 \alpha + 2xy \sin \alpha \cos \alpha + y^2 \cos^2 \alpha - 2c^2 y = 0$$

alakú parabola, ha α a lejtő hajlásszöge és c vízszintes haladó sebessége; továbbá, hogy a relativ mozgás a lejtő hajlásvonalán $gt \sin \alpha$ sebességgel történik.

A második esetben, ha p a lejtő vízszintes gyorsulása, mely a hajlásszög csúcsától el van fordítva, akkor a kényszer és a lejtő mozgása folytán a g -hez lépő gyorsulás $g \cos \alpha - p \sin \alpha$, mely a lejtőre merőleges; ha pedig p a hajlásszög csúcsa felé tart, akkor a hozzálépő gyorsulás $g \cos \alpha + p \sin \alpha$. Az abszolút pálya egyenes vonal, mely

$$y = \frac{g \sin \alpha + p \cos \alpha}{-g \cos \alpha + p \sin \alpha} x, \quad \text{illetve} \quad y = \frac{-g \sin \alpha + p \cos \alpha}{g \cos \alpha + p \sin \alpha} x.$$

Az utóbbi egyenes vízszintes lesz, ha $g \sin \alpha = p \cos \alpha$.

A relativ pálya a lejtő hajlásvonala, melyen a mozgás $(g \sin \alpha + p \cos \alpha) t$, illetve $(g \sin \alpha - p \cos \alpha) t$ sebességgel megyen végbe V.

36. A 355. §-ban a föld felülete közelében mozgó pontnak a föld-

höz viszonyított relativ mozgása differenciálegyenleteit [353. §. (7)] állandó g -re nézve és az $\omega^2 x$, $\omega^2 y$, $\omega^2 z$ tagok elhanyagolásával integráltuk [355. §. (6) és (9)]; kísértessék meg ezen egyenletek integrációját a g -nek pontosabb, az x , y , z koordinátáktól a 355. §. 2. Jegyzetében említett $g = g_0 + \alpha x + \beta y + \gamma z$ alakban függő értékével és a nevezett tagok elhanyagolása nélkül és pedig a) vagy a 354. §. II. pontja Jegyzetében körvonalozott, most három egyenletre kiterjesztendő eljárás értelmében; b) vagy a fokozatos közelítés módszerét alkalmazva, a 353. §. (7) rendszere $\omega^2 x$, $\omega^2 y$, $\omega^2 z$ tagjaiba az x , y , z helyébe a 355. §. (6) és (9) közelítő értékeit helyetteszük, miáltal e tagok az idő explicit, egész, racionális függvényeiként lépnek fel, s így a nevezett egyenletrendszer a 355. §. eljárása szerint integrálható. A.

36a. Állíttassanak fel a 353. §. (7) differenciálegyenletei a következő megfontolások alapján: felvéve az OO_1 körüli $+\omega$ és $-\omega$ szögsebességű, a mozgást nem változtató két forgást (272. ábra 606. lap), kombinálva ezeket a PO körüli $+\omega$ szögsebességű forgással [161. §.], egy közös ω sebességű translációt és OO_1 körüli $+\omega$ szögsebességű forgást nyerünk. Ezenkívül az O centripetális gyorsulása $-\omega^2 \rho$ lévén, észrevevesszük, hogy a relativ mozgás nem változik, ha a földhöz s a vele merev kapcsolatban lévő XXZ rendszerhez $-\omega$ sebességű közös translációt és $+\omega^2 \rho$ centrifugális gyorsulást adunk. De ez által az O pont nyugalomba jött és az XYZ az OO_1 körül ω szögsebességgel forog, míg a mozgó pont tényleges gyorsulása a föld vonzásának és a centrifugális gyorsulásnak eredője (a szabad esés gyorsulása). Ezen adatokkal képeztessenek a 341. §. (3) egyenletei $v = -1$ és $v = 0$ esetekre és belőlük e relativ mozgás differenciálegyenletei, megjegyezve, hogy itt $\varphi_{1,x} = 0$, $\varphi_{1,y} = 0$, $\varphi_{1,z} = -g$. V.

37. A 85. §-ban egy síkban forgó koordináta-rendszerre vonatkozó relativ gyorsulás összetevői vannak kifejtve; ott az OX_1Y_1 az elszállító rendszer; kifejezendő a 339. §. CORIOLIS-féle tétele szerint ezen esetben az elszállító és a CORIOLIS-féle gyorsulás, és ezek segítségével képezendő a relativ gyorsulásnak ott adott két componense x''_1 és y''_1 . A.

38. Valamely pontra egy mozgó centrumból gyorsulás hat; a gyorsulás törvénye tetszőleges legyen, de a centrum sík mozgást végezzen. Felállítandók az abszolút és a relativ mozgás differenciálegyenletei. A.

39. Fejtessék meg a megelőző probléma azon speciálisabb esetben, mikor a centrum egyenes vonalon halad tovább és a mozgó pont (abszolút és relativ) sebessége mindig e ponton és a centrum pályáján áthaladó síkban fekszik. Részletezendő e mozgás, ha a centrum sebessége a) egyenletes; b) egyenletesen gyorsuló. V.

40. Fejtessék meg a megelőző probléma, ha a centrum egyenletes körmozgásban van. V.

41. Valamely centrumból származó tetszőleges gyorsulás befolyása alatt valamely mozgó pont centrális pályát ír le e középpont körül; az elszállító koordináta-rendszer Z , tengelye a centrumon átmenő s a pálya síkjára merőleges egyenes legyen, mely körül az XY , sík a pálya sík-

jában forogjon. Felállítandók a relativ mozgás egyenletei és azon esetre nézve fejtendők meg, mikor a forgás szögsebessége egyenletes és a gyorsulás a centrumtól való távolsággal egyenesen arányos. A.

42. Vizsgáltsák meg a megelőző feladat azon általánosabb esete, mikor az elszállító rendszer a centrumon átmenő Z , tengelye körül forog ugyan, de e tengely nem merőleges az abszolút pálya síkjára. Az egyenletes forgás és a centrumtól való távolsággal arányos gyorsulás esete itt is fejtessék meg. A.

43. Valamely észlelő a nap középpontjában legyen és a nappal együtt egyenletesen forogjon; az észlelő a csillagok helyzetét a nappal kapcsolatban lévő, vele közös középpontú elszállító rendszerre vonatkoztatja. A bolygók a nap középpontjától számított távolság négyzetével fordítva arányos gyorsulással mozognak a nap körül; fejtessék meg az észlelőre vonatkozó relativ mozgás. V.

44. Az észlelő a gömbalakú nap (illetve bolygó) *felületén* legyen és e felülettel mereven egybekapcsolt zenito-horizontális elszállító rendszerre vonatkoztassa az égi testek mozgását. [V. ö. a 269. ábrát. 598. l.]. Állíttassanak fel a relativ mozgás egyenletei oly csillagra (bolygóra, illetve holdra) nézve, mely centrális mozgásának centruma körül *kört* ír le, melynek síkja a nap (illetve a bolygó) forgás tengelyére merőleges. V.

45. Fejtessék meg a megelőző probléma, ha a centrális pálya ellipsis vagy hyperbola és az elszállító rendszer tengelye nem esik egybe a centrális pálya normálisával. V.

46. A dynamikában azt a feladatot fogjuk megvizsgálni, mikor egy nehéz pont egy sima belsejű, kicsiny, egyenletes keresztmetszetű egyenes csőben a földnehézségi gyorsulás befolyása alatt surlódás nélkül mozog; a cső a vertikálishoz hajlott és egy rajta átmenő vertikális körül forogva, tengelye egyenes, vertikális körkúpot ír le; állíttassanak fel abszolút és relativ mozgásának differentiálegyenletei és fejtessenek ezek meg, ha a forgás szögsebessége állandó.

[Czélserű itt a következő, általánosabb ily problémára is érvényes megfontolásokból kiindulni:

Legyen a z -k tengelye függőlegesen lefelé irányítva és r a cső görbevonalú tengelye ds elemének távolsága a z -k tengelyétől; a cső e geometriai tengelye általánosságban egy vertikális *sík görbe* legyen, melynek egyenlete $r=h(z)$. E cső saját síkjában fekvő vertikális tengely körül forogjon és $\vartheta=f(t)$ fejezze ki a forgásszög függését az időtől.

Jelelje ψ_{n_1} azt a feltéti gyorsulást (89a. és 130. §.), mely a *nyugvó* csőben a pont mozgása folytán fellép, és mely itt mindig a csőnek saját síkjában fekvő mindenkori normálisa mentén fekszik; legyen ψ_{n_2} a csőnek említett *forgása* folytán fellépő feltéti gyorsulás, mely itt mindig a forgás sebességével ellentett irányú, azaz a csőnek saját síkjára merőleges normálisa mentén fekszik e szerint $\psi_n = [\psi_{n_1}^2 + \psi_{n_2}^2]^{\frac{1}{2}}$ az eredő, a cső tengelyére mindig merőleges feltéti gyorsulás. Legyenek végre a feltételektől független, adott gyorsulásnak radiális, rotatórius és z -menti

componensei Z_r, Z_ϑ, Z_z , akkor a feltételi gyorsulás megfelelő összetevőit az adott gyorsulásaihoz adva, az így szabaddá tett pont abszolút mozgásának egyenletei:

$$\varphi_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 = Z_r + \psi_{n_1} \frac{dz}{ds};$$

$$\varphi_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\vartheta}{dt} \right) = Z_\vartheta - \psi_{n_2};$$

$$\varphi_z = \frac{d^2 z}{dt^2} = Z_z - \psi_{n_1} \frac{dr}{ds},$$

mely egyenletek és az $r=h(z)$ és $\vartheta=f(t)$ összefüggések segítségével az abszolút mozgás teljesen meghatározható.

A relatív mozgás egyenleteit nyerjük, ha pl. a felírtak középsőjéhez $-\varphi_\vartheta$ -át, az abszolút sebességekhez $-\frac{d\vartheta}{dt}$ forgást s ennél fogva az első egyenlethez még $+r \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2$ -centripetális gyorsulást adunk; ez által a cső nyugalomba jő, s a felírt egyenletek középsője eltűnik, habár a ψ_{n_2} feltételi gyorsulás (itt jobban mondva feltételi erő), itt nem zérus, de az rz -k síkjában végbemenő mozgásra nem folyhat be.

Ha csak a földnehézség gyorsulása a ható, akkor $Z_r=Z_\vartheta=0$; $Z_z=g$. A további eljárás már csak menyynyiségteni műveletek végrehajtásában áll]. V.

47. A megelőző feladat azon esetében, mikor a szögsebesség állandó, megállapítandók azok a feltételek, melyek mellett a pont a csőben nyugalomban marad (azaz, mikor a relatív gyorsulás és sebesség értéke zérus); fejtessék ki ekkor a cső geometriai tengelyére merőleges feltételi gyorsulás, ψ_n (89a. és 130. §§. és a megelőző 46. feladat megfontolásai.). V.

48. Felállítandók az abszolút és a relatív mozgás differenciálegyenletei oly pontra nézve, mely a földnehézségi gyorsulás befolyása alatt surlódás nélkül esvén, egy a vertikális körül forgó vertikális síkban tartozik maradni. Fejtessék meg e mozgás ha a forgás szögsebessége állandó és a forgás tengelye a forgó vertikális síkban van. Bizonyítsák be, hogy ezen egyszerű esetben a mozgó pont pályájának egyenletei:

$$2\omega r = (r_0\omega + r'_0) e^{\omega t} + (r_0\omega - r'_0) e^{-\omega t}; \quad z = z'_0 t + \frac{1}{2}gt^2,$$

hol a z -k tengelye függőlegesen lefelé van irányítva, r a pont távolsága ezen tengelytől, ω az állandó szögsebesség, $r_0, 0, r'_0, z'_0$ az r és z , illetve ezek sebességi komponenseinek értéke $t=0$ -kor. V.

49. Valamely síma sík egy benne fekvő vízszintes tengely körül egyenletesen forog; egy pont, melyre csak a föld nehézségi gyorsulása hat, e sík mentén lesz elhajítva; vizsgáltassék meg a pont mozgása és határozassék meg, hol és mikor hagyja el e síkot (azaz mikor és hol lesz a relatív mozgásban a ψ_n feltételi gyorsulás [89a és 130. §§.] zérus). Sch.

50. Egy rugalmas fonálon felfüggesztett vízszintes csészében egy nehéz pont létezik, mely nyugalom esetében a csészétől g nagyságú, füg-

gölegesen felfelé irányított feltételi gyorsulást szenved; bizonyíttassék be, hogy ez a relativ feltételi gyorsulás, ha a csésze a felfüggesztő fonál rugalmas meghosszabbodása és megrövidülése folytán vertikális irányú egyszerű harmonikus lengéseket veszen fel, szintén egyszerű harmonikus változásokat szenved. A.

51. Valamely felfelé homorú sima forgási felület vertikális forgási tengelye körül állandó szögsebességgel forog; a belső felületen egy szintén sima nehéz gömböcske (pont) van; kerestessenek azok a helyzetek, melyeknél a pont a felülethez képest nyugalomban van (azaz, mikor a relativ gyorsulás és sebesség összetevői zérusok. Bizonyíttassék be, hogy ekkor $g = \omega^2 \rho \operatorname{tg} \alpha$, hol g a földnehézség gyorsulása, ω a forgás szögsebessége, ρ a pontnak s a vele érintkező felületi elemnek távolsága a forgás tengelyétől, α e felületi elem normálisának a vízszintessel való hajlásszöge. Részleteztessék a félgömb alakú héj esete. V.

52. Egy hengeres, részben folyadékkal töltött edény állandó szögsebességgel forog vertikális tengelye körül. Ha a folyadék állapota stationárius lett (azaz, ha a folyadék az edényhez viszonyítva nyugalomba, egyensúlyba jutott) akkor szabad felületének minden pontjára nézve áll, hogy a reá ható gyorsulások eredői mindenütt merőlegesek a szabad felületre. Bebizonyítandó, hogy e szabad felület forgási paraboloid, melynek tengelye az edényével esik egybe; kifejezendő a nemző parabola paramétere a földnehézségi gyorsulásból és a forgás szögsebességéből. V.